Rita Borromeo Ferri, Jaime Mena Lorca,
Arturo Mena Lorca, Editores

Fomento de la Educación-STEM y la Modelización Matemática para profesores

Fundamentos, ejemplos y experiencias

kassel
university
press

Rita Borromeo Ferri, Jaime Mena Lorca,
Arturo Mena Lorca, (Editores)

Fomento de la Educación-STEM y la Modelización Matemática para profesores

Fundamentos, ejemplos y experiencias

kassel
university
press

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-7376-0966-1
DOI: https://doi.org/doi:10.17170/kobra-202106174132

https://kup.uni-kassel.de

Druck: Print Management Logistic Solutions, Kassel
Printed in Germany

Proemio

Este libro es un presente de los autores a los profesores de Matemáticas de Chile.
La idea de hacerlo fue expresada hace poco más de un año por la Dra. Rita Borromeo Ferri, de la Universität Kassel, en Alemania, una autoridad mundial en la enseñanza del modelamiento matemático, cuando estaba en una visita de investigación en nuestra Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, PUCV. Los otros dos editores teníamos una aspiración similar, pero, ciertamente, y aun a sabiendas de su preocupación por los aprendizajes de matemática en nuestro país y su generosa contribución a diversos proyectos, no podríamos habérselo sugerido.
Hablé, luego, con María Jesús Honorato, entonces Coordinadora Nacional de la Unidad de Curriculum y Evaluación, UCE, del MINEDUC, para que el libro fuera accesible a los profesores chilenos; ella manifestó su interés y conformidad con la idea: la UCE lo pondría a disposición de los profesores, en versión electrónica.
Acordado lo anterior, invitamos a varios especialistas del país, que se han destacado en la educación matemática y, en particular, modelamiento y STEM; hay, entre ellos, matemáticos, ingenieros, educadores de la Matemática, biólogos, físicos; todos ellos doctores en su respectiva especialidad. La Dra. Borromeo Ferri y el Dr. Andreas Meister elaborarían también un capítulo sobre una muy interesante modalidad de enseñanza del modelamiento matemático para profesores que llevan a cabo en Alemania. Ninguno de los autores recibirá emolumento por su trabajo para el libro.
Con alegría, entonces, y con agradecimiento a los autores, a María Isabel Baeza, actual Coordinadora Nacional de la UCE, y al Dr. Manuel Bravo, decano de la Facultad de Ciencias de la PUCV, quienes generosamente lo acogieron, presentamos este libro destinado al uso de los profesores, en una etapa particularmente dificultosa para la enseñanza y los aprendizajes de Matemáticas en Chile y en el orbe.

Arturo Mena Lorca
Instituto de Matemáticas
Pontificia Universidad de Valparaíso

Presentación

El nuevo curriculum escolar chileno en la asignatura de Matemática tiene como foco el desarrollo de las habilidades del siglo XXI, las cuales renuevan las cuatro habilidades de matemática que “Oviene desarrollando desde primero básico hasta segundo medio: resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar; ahora estas habilidades cubren los dos últimos años de la escolaridad, y así se puede decir que ellas caracterizan el desarrollo de la matemática en los doce años de estudios.

El espíritu de la Ley General de Educación nos moviliza a proponer y ejecutar de una manera didáctica el aprendizaje de las habilidades y actitudes del Siglo XXI. Así también, nos mueve a generar y apoyar iniciativas que tienen como principio el aprendizaje de conocimientos modernizados, donde los contenidos son cercanos a los estudiantes y donde el objetivo es poner en práctica en las aulas el desarrollo de habilidades, y promover una educación escolar que debe ocuparse de la formación de personas integrales, provistas de espíritu crítico y capaces de participar de manera propositiva en la vida del país.

Bajo este gran objetivo, y como una de las tareas que mueve a la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile, se encuentra el desarrollo de la habilidad de matemática de MODELAR, entendiendo que esta habilidad se desarrolla de manera progresiva y en armonía con el nivel etario de los estudiantes. Para los expertos del área de matemática de esta unidad ministerial, modelar permite obtener un modelo matemático de una situación real, y reconocen que es un proceso de elaboración que incluye varios pasos, entre los cuales están: la descripción de la situación real por medio de esquemas, palabras o simplificaciones; construcción y diseño de un modelo matemático que tiene varias iteraciones de comparación y ajustes según la realidad; obtención de resultados y la interpretación de ellos según el contexto, para finalmente validar el modelo en una situación particular o transferirla a otra similares. Esta noción del proceso de modelación debe mantener una mirada holística del desarrollo de esta habilidad y su relación con los diferentes ejes: álgebra, funciones, geometría, números y operaciones, medición, estadística y probabilidades.

En este contexto, y dentro de la particularidad de los años 2020 y 2021, en que nos encontramos viviendo tiempos difíciles mundialmente, producto de la pandemia por Covid-19, los autores de este libro, en un acto de generosidad han dedicado su tiempo a traspasar sus conocimientos en modelamientos matemáticos en beneficio de los profesores y estudiantes no solo de Chile sino del mundo. Con esto, nos demuestran que, en tiempo de restricciones, estamos todos trabajando con un mismo fin, lograr aprendizajes profundos y significativos, y que la tecnología nos permite compartir para llevar a cabo nuestras metas comunes.

Este libro es una contribución para desarrollar la habilidad de modelar matemáticamente, y representa un gran aporte para la comprensión y el trabajo en aula. Los autores, destacados a nivel internacional, han procurado promover las habilidades y actitudes del siglo XXI, entre ellas el demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato. En sus diferentes capítulos, nos muestran el significado de trabajar con esfuerzo, perseverancia y rigor en la búsqueda de nuevas e ingeniosas soluciones para problemas reales, como también dar significado a la actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas, entendiendo que los modelos matemáticos son una alternativa del razonamiento para tomar posturas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Como Coordinadora Nacional de la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile, y además profesora de matemática y física, es un enorme gusto presentarles el título “Fomento de la Educación-STEM y la Modelización Matemática para profesores. Fundamentos, ejemplos y experiencias” porque estoy convencida que es y será un aporte significativo para las actuales y futuras generaciones de profesores de nuestro país. Los invito a todos a leer y sacar el máximo de provecho de todas las ideas aquí presentes, llevar las actividades a sus clases y ajustarlas según sus necesidades contextuales, para sí lograr que nuestros estudiantes cada día más se fascinen con la matemática.

Finalmente, aprovecho la oportunidad de ofrecer una sincera felicitación y reconocimiento por el trabajo de investigación y recopilación realizado por los autores de cada capítulo, y transmitir también el agradecimiento del Ministerio de Educación de Chile por conceder los permisos de publicación de esta obra, de manera gratuita, en la plataforma Curriculum Nacional de la Unidad de Curriculum y Evaluación.

María Isabel Baeza Errázuriz
Coordinadora Nacional UCE,
Unidad de Curriculum y Evaluación.
Ministerio de Educación. Gobierno de Chile

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro, como otros en el área de la educación matemática, procura mostrar diversas formas que los profesores pueden utilizar para que sus estudiantes aprecien el rol de la matemática en sus vidas y la sepan utilizar y valorar cuando la requieran.

LA TAREA ACTUAL DEL PROFESOR

Exigencias sobre el profesor de matemáticas

Desde poco antes del comienzo del milenio, las exigencias sobre el profesor que enseña matemáticas en Enseñanza Básica o Media, han venido aumentando. En particular, en Media, hay nuevas materias: primero fue Estadística descriptiva, luego tecnologías digitales; ahora los electivos incluyen Cálculo infinitesimal, Geometría 3D, Inferencia estadística, y Pensamiento computacional. Hay, también nuevos enfoques, nuevos énfasis. Por lo demás, es claro que se está aún en una cierta transición, y se sabe que algunas materias y modalidades de trabajo tomarán cada vez más importancia.

Tal aumento de exigencias puede parecer injusto, pero es, en todo caso, inevitable. Una razón de ello es que el concepto mismo de *profesional* –como es el caso, obviamente, del *profesor*– hoy en día incluye perfeccionamiento o desarrollo a lo largo de la vida. En diferentes profesiones, el no estar al día en el campo de especialidad no solo comporta descrédito, sino también, eventualmente, despido, demanda legal, etc. (De todas maneras, no se conocen muchas profesiones a cuyos cultores cada interlocutor o aun beneficiario de su actividad les trate de enseñar y exigir qué debe hacer, cómo realizarlo, cómo evaluar, etc.).

Raíces del 'cambio' en matemáticas

La necesidad de estas exigencias de apariencia novedosa tiene muy hondas y antiguas raíces, según recordamos a continuación.

Supongamos que el profesor enseña el procedimiento de la suma (adición), y luego propone problemas que se resuelven con esa operación; más adelante, enseña el proceso de la resta (substracción), y propone problemas con ella. Imaginemos que, un día posterior, propone un problema y los niños preguntan: "Profe, ¿con qué se hace, con la 'suma' o con la 'resta'?". Hay algo profundamente alarmante en el ejemplo. Ciertamente, muchos niños terminarán entendiendo cuándo vienen al caso cada uno de esos procedimientos; sin embargo, es claro que, si el propósito de este aprendizaje en alguna época pudo tal vez ser adiestrarse en maneras de ejecutar cómputos *per se* (lo cual es, en todo caso, dudoso), en la actualidad esa finalidad se ha desplazado sensiblemente hacia los problemas que se pueden resolver usando determinados

procedimientos; es decir, hoy día hay mayor énfasis puesto en lo que se intentaba hacer desde siempre.
De hecho, el propósito de la enseñanza no ha cambiado, pues el cómputo nunca fue sino un medio para un fin: por supuesto, no el de alcanzar resultados y abandonarlos, sino el de utilizarlos para resolver situaciones que los requerían. Algo parece haberse desvanecido un tanto en el camino.

La matemática que se requiere

Ahora bien, a comienzos del siglo anterior, se podría entender que lo que un ciudadano necesitaba saber de matemáticas eran "las cuatro operaciones" y, tal vez, algunos conceptos y hechos geométricos. Sin embargo, observamos, cada vez con mayor insistencia, no solo que eso no basta, sino que las personas no estamos, en general, realizando aquellas operaciones básicas, sino digitando números en algún tipo de aparato electrónico. La pregunta sempiterna, ¿Qué matemática requiere una persona?, entonces, va claramente obteniendo o al menos requiriendo de una respuesta nueva, o considerablemente modificada.
Aquella respuesta debe expresarse con claridad, y, en primera instancia, sin considerar las dificultades que puedan encontrarse en el camino. Al respecto, cabe recordar que, hace poco más de un siglo, el que la mayoría del país supiera las cuatro operaciones fue un logro, similar al de la alfabetización del país. (En 1865 se realizó primer censo de Chile, que dio un total de 1.824.358 habitantes, con una proporción 0,4% mayor de mujeres. El 79,2% de los varones, y el 86,2% de las mujeres eran analfabetos. Hacia 1100, el porcentaje de personas que sabían leer y escribir en Europa era de un 2%; casi todos varones[1]).
Con entera seguridad, en algún momento, que la generalidad de las personas supiera leer y escribir, y realizar las cuatro operaciones, fue considerado difícil, impracticable, inalcanzable.
Como sea, la atención se ha desplazado notoriamente desde las rutinas de cálculo hacia los problemas. Esto no debería ser novedoso, porque la historia muestra que naturalmente la matemática se generó para resolver problemas de la vida, y que, andando el tiempo, se hizo necesario sistematizar ese conocimiento, que adquirió así cierta 'independencia' en relación con aquellos problemas. En alguna época, la enseñanza, tal vez en búsqueda de eficiencia, se centró en el aprendizaje del corpus teórico de algún área y en determinado nivel, y, en demasiadas ocasiones, olvidó los problemas para los cuales se había generado esa área en particular.
Como sabemos, organizar el conocimiento de manera armónica, ordenada –y, en el caso de la matemática, que exprese con claridad las relaciones entre unas y otras afirmaciones, y la

[1] Salvo en una aclaración terminológica, más adelante, no usamos referencias bibliográficas en este comentario preliminar. El lector interesado las encontrará abundantemente en los diversos capítulos.

posibilidad de demostrarlas a partir de unas cuantas convenientemente elegidas–, no solo provee de mayor claridad conceptual y evidencia de la solidez de aquel conocimiento, sino que, además, permite extender su rango de aplicación a situaciones novedosas y necesarias. Sin embargo, estudiar solo ese conocimiento bien estructurado y no tener suficientemente a la vista los problemas que con ellos se pueden abordar no solo comporta pérdida de motivación intrínseca para su estudio en la mayoría de las personas, sino que, además, lo esteriliza. En efecto, la consabida respuesta que el docente dio en alguna ocasión, de que "alguna vez servirá para algo", no solo es insuficiente para su interlocutor, sino también poco creíble, pues un conocimiento que no se ha aprendido o no se sabe para qué se lo fijó de algún modo, difícilmente estará disponible para que sea útil en la eventualidad de que se lo necesite.

Una respuesta frecuente ante la situación descrita ha sido enseñar contenidos y agregar luego aplicaciones. Esto es, como también sabemos, insuficiente, pues el aprendiz queda siempre ajeno a la generación del conocimiento, que debe entonces tratar de memorizar –en su contenido y en su aplicación– y, si bien no es de esperar que pueda siempre emular a los grandes matemáticos o científicos en su originalidad y tratamiento de problemas, ciertamente se puede intentar que pueda aproximarse al estudio de manera más creativa y crítica. Por lo demás, en muchas ocasiones el espacio destinado a 'aplicar' la matemática podía ser minúsculo y fragmentado (un curso de trigonometría, por ejemplo, podía tratar largamente identidades y ecuaciones, sin destinar acaso tiempo a la utilidad de estas para abordar problemas geométricos).

Ahora bien, el aspecto teórico de la matemática es indispensable, y, ciertamente, cada estudiante debe conocer de la claridad conceptual y lingüística, el rigor transparente y la naturaleza científica de la disciplina; sin embargo, todos sabemos que ello, por sí solo, no basta.

Avance en reversa

Detengámonos un instante en que la enseñanza de la matemática ha tendido a proceder al revés de cómo se genera la matemática.

Seguramente, pasar primero la teoría y después hacer aplicaciones, entraña la enseñanza de que un sólido edificio conceptual ofrece una gran capacidad de resolver problemas reales, necesarios, determinantes y, eventualmente, muy difíciles. Sin embargo, es obvio que el sistema no estaba dando resultados, y que nuestros estudiantes, como lo mostraron, entre otras, las mediciones internacionales, no eran capaces de resolver problemas para los cuales la enseñanza recibida debía haberles provisto de herramientas.

El derecho de aprender matemática

Lo que demanda el siglo XXI son, como sabemos, competencias distintas a las del pasado, aun reciente. Más aún, ha quedado en claro que el conocimiento de una generación no alcanza para lo que la siguiente debe enfrentar. La educación requiere, entonces, de un cambio sustantivo en su concepción.

En matemáticas, como sabemos, debemos proceder cuidadosamente. No basta con declaraciones entusiastas, que muchas veces entrañan peligros para personas que no solo sufren excesivamente en los cursos, sino que, además, pierden oportunidades en su vida. El derecho a la educación en ciencias, matemáticas incluidas, es uno reconocido por el país, y consagrado por la UNESCO como fundamental.

Lo que muestran los datos

Los indicadores nos sitúan, en Matemáticas, entre los primeros de Latinoamérica. (El único país americano de buen rendimiento es Canadá. Estados Unidos alcanzó la media de la OECD recién en la última medición de PISA, y gasta el doble por alumno que República Eslovaca para obtener un rendimiento ligeramente inferior).

La prueba PISA nos ubica en primer lugar, y con un crecimiento sostenido –si bien no tan rápido como se quisiera y se necesita–. Es una buena noticia que casi la mitad de nuestros estudiantes esté bajo el nivel 2 de esa prueba, esto es, ya sea en el nivel 1 –el mínimo de la prueba– o bajo la escala; la noticia es buena porque no hace mucho la razón era superior a 1:2. Una noticia no tan halagüeña es que menos de 1 de cada 50 niños chilenos esté en uno de los dos tramos más altos de esa prueba, 5 y 6 (en los países de mejores resultados, ese es, poco más o menos, el porcentaje de niños que están bajo la escala).

Una mirada a la razón aproximada de alumnos que está bajo el nivel 2 en la prueba en distintos grupos (en promedio) es especialmente ilustrativa: en América Latina es 2:3; en países (de la muestra) de PIB similar al de Chile, 1:3; en los países de la OCDE, 1:4.

A lo anterior hay que añadir, como consideración importante para nuestra tarea, diferencias del rendimiento de mujeres y varones (un fenómeno complejo), y de estudiantes de enseñanza científico humanista y técnico profesional.

Es inevitable concluir que aquel derecho de aprender matemáticas está siendo en alguna medida desatendido, y que, además, podemos mejorar los aprendizajes, a menos que creamos (con la cabeza y/o con el corazón, tal vez) que nuestros niños son menos inteligentes que los de otros lugares.

Los objetivos

El entendido en que funciona el sistema escolar, sancionado, por lo demás, por la legislación, es que la educación escolar debe ocuparse de la formación de personas integrales, provistas de espíritu crítico, capaces de participar de manera propositiva en la vida del país. Por supuesto, y dado que la enseñanza terciaria es opcional, el sistema debe también preparar a los estudiantes para su futuro ocupacional, que requiere cada vez más competencias.

Si bien lo anterior es más bien fácil de declarar, y está explícito y reiterado en mucha normativa, en la práctica no es fácil avanzar a la vez en lo relativo a los valores generales y a los requerimientos ocupacionales. Ello trae cierta tensión al tema curricular, no solo el de las escuelas, y liceos o colegios, sino también el de la formación de profesores. Ciertamente, y a pesar de las recomendaciones explícitas que viene haciendo la OCDE desde hace más de tres lustros para la formación de los profesores chilenos, las instituciones formadoras varían de manera considerable en la 'proporción' de desarrollo de esos aspectos que ofrece a sus estudiantes.

Al respecto, vale la pena reparar en que mediciones como la de la prueba PISA en matemáticas no entrega indicadores que solo hablan de esa disciplina, sino de capacidades que son más transversales, y que son importantes en otras áreas del conocimiento y del hacer. Por ejemplo, *generalizar* es un proceso que debe aprenderse en distintas áreas, y en matemáticas tiene un lugar especial, fundamentado en la manera de argumentar; por otra parte, mantener una actitud creativa, tener espíritu crítico –lo cual está en parte al cuidado de la asignatura de Matemática del currículo–, no se restringen solamente a aprendizajes de matemáticas.

Tampoco podemos olvidar que el sistema escolar debe tomar responsabilidad por la empleabilidad de sus futuros egresados, particularmente en un escenario que impone cada vez más exigencias. Al respecto, es muy conveniente tener presente que, en octubre de 2020, el *World Economic Forum* estimaba que, en los próximos 5 años, 85 millones de trabajos pasarán de seres humanos a máquinas, y que se crearán cerca de un centenar de millones de nuevos trabajos.

Debemos pues avanzar simultáneamente en dos sendas considerablemente demandantes y unidas de manera inextricable: la de las competencias y la de aprendizaje específico de la matemática.

Virtudes esenciales

Si nos detenemos en el desarrollo de virtudes consideradas fundamentales, tales como las que señalamos, creatividad y espíritu crítico, seguramente encontraremos motivo de aun mayor preocupación.

De acuerdo a la información de que se dispone, muchas personas chilenas que enseñan matemáticas hemos enfrentado situaciones al tenor de la siguiente: se nos acerca una niña, un joven, de algún nivel educativo (una hija, un sobrino, una nieta), y nos hace (¡por fin!) una pregunta de matemáticas. Ansiosos ante tal oportunidad, nos alegramos y, sonrientes y esperanzados, nos disponemos a develar los misterios de la disciplina. Nuestra sonrisa, sin embargo, es de corta duración, y se congela en un rictus, ante la respuesta que recibimos: "El profesor me dijo que lo haga *de esta manera*". Punto.
Ante tal situación, ¿podemos afirmar, siquiera que estemos siquiera apuntando en la dirección de la formación del espíritu crítico, la creatividad y otras virtudes por el estilo?

Competencias del siglo XXI

Hacia donde miremos encontraremos referencias a las competencias que se requieren a comienzos del milenio.
Ciertamente, los diferentes listados de esas *competencias del siglo XXI* son el resultado del trabajo de profesionales y estudiosos de distintas áreas y de diferentes latitudes, y cualquiera podría no estar de acuerdo con alguna de ellas o con la importancia relativa que se les atribuye. Sin embargo, sería seguramente un error no atender al núcleo de la cuestión, que no dice relación tanto con las decisiones de algunos como con los fenómenos globales. Estos traen, de suyo, y como se puede apreciar en cualquier trámite público o privado que un individuo debe hacer, un énfasis creciente en el manejo de la información y, más en general, en el uso de nuevas tecnologías, particularmente electrónicas –esto último, como sabemos, debido a la pandemia, se aceleró y afectó a la población en general–. Las competencias que se listan son en gran medida las que se necesitan para ingresar y permanecer (como sabemos, muchos van quedando en el camino) en un escenario laboral exigente, y, además, para participar como ciudadano integral, propositivo, preocupado del medio ambiente, inclusivo; adicionalmente, las necesita, de hecho, para enfrentar los proyectos familiares que quiere emprender.

¿Qué podemos hacer?

Ante la situación hasta aquí descrita, naturalmente nos queda la gran pregunta de qué podemos hacer frente a la magnitud de los cambios y la porfiada insuficiencia de los aprendizajes. Ciertamente, un individuo que no tiene las competencias que su entorno le exige no puede desarrollarse plenamente, no puede participar enteramente de la vida ciudadana, el entorno familiar que construye es deficitario, etc.
Sabemos que, si ese individuo aprende matemáticas, sus expectativas mejoran. El currículo nos señala algunas competencias específicas centrales –Representar, Comunicar y argumentar,

Resolver problemas, Modelar–; este libro trata de una de ellas, y muestra de qué manera comprende en alguna medida a las restantes.

Los servidores electrónicos

La experiencia indica que los avances en la práctica educacional no ocurren a la velocidad que se desea, a pesar de los esfuerzos que se realizan; así también lo señalan los datos.

En esta dirección, un obstáculo mayor es la frecuentemente escasa destreza operatoria que manifiestan los estudiantes; ello puede llevarnos a pensar en hacer mayores esfuerzos para establecer una base adecuada de destreza en los cómputos. Así se ha hecho, en numerosas oportunidades, con el éxito que conocemos, un tanto modesto, y con la consecuencia de que queda menos tiempo para ocuparse de los problemas que esa operatoria (y, más bien, el conocimiento en que está inserto, claro) permite enfrentar.

Afortunadamente, los servidores electrónicos vienen en nuestro auxilio, quitando protagonismo a la necesidad de disponer de aquellas destrezas operatorias.

Por supuesto, es este un terreno sobre el cual se debe andar con cuidado. Evidentemente, aprender matemáticas no consiste en disponer de un recetario de fórmulas que funcionan de una manera un tanto misteriosa o mágica, y, por similares razones a las que fundamentan la frase anterior, aprender esa disciplina tampoco es reunir una colección de aparatos que proveen de una colección de *apps*. Obviamente si bastara con disponer de unas cuantas fórmulas, el aprendizaje de la matemática se habría conseguido hace tiempo (y, por lo demás, conviene traer a colación, el ejercicio de idear estrategias operatorias mantiene un lugar destacado en el desarrollo del pensamiento matemático). Como sea, disponer de una colección de artificios para factorizar expresiones algebraicas ha perdido ya relevancia, no solo porque una máquina lo hace mejor y con rapidez, sino más bien porque factorizar nunca fue un propósito en sí. Como decíamos, es este un tema delicado, pero parece obvio que no podemos limitarnos a seguir enfrentando los problemas de aprendizaje en el modo que tradicionalmente se ha hecho, y que el cambio de modalidad requiere de apuntar en una dirección apropiada para los requerimientos actuales.

Respecto de lo anterior, parece necesario abrirse a la posibilidad de que niños que no son ágiles en los cómputos puedan pensar, sin embargo, problemas, y participar de su resolución. Es, también, forzoso, considerar la posibilidad de evaluar los aprendizajes en escenarios colaborativos y con uso de diversos instrumentos externos de cómputo.

La mar de fondo de lo que estamos trayendo a colación es de mucha mayor profundidad, para la educación y para la cultura, que lo que estamos enunciando aquí. De cualquier modo, para siquiera intentar lo anterior, es necesario disponer de algún tipo de estrategia. De ello trata este libro.

Una dificultad que debemos considerar es que los procesos que aquí se proponen suelen alejarse ostensiblemente de la tradición en que muchos profesores se han formado, y difieren también en forma notoria de los sistemas de control de calidad de la docencia acostumbrados y de lo que esperan ver, por ejemplo, en los cuadernos, quienes examinan su tarea –apoderados incluidos–.
Por ejemplo, si los estudiantes usan software de la web para realizar los cálculos estadísticos o matemáticos, es muy posible que no quede registro en aquellos cuadernos; las guías de trabajo no serán listados de ejercicios o problemas, etc. Esto dice relación con trabajo de proyectos, medición por competencias y no de contenidos, adentrarse en el mundo real y no en el de manuales que sirvieron para satisfacer otras exigencias que las actuales.
Al respecto, un dato sugerente puede ser el que muestra un estudio de TIMMS de hace unos años. Al comparar los porcentajes de materia cubierta versus problemas correctamente resueltos, se encontró que en Singapur estos eran 82 y 74, en Estados Unidos 82 y 58, y en Japón 54 y 69, respectivamente.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Qué es un modelo

El concepto de modelo es tan substancial a la ciencia que la historia misma de ella y sus tres grandes etapas se relacionan con cambios del gran modelo de mundo físico que se sustenta cada vez.
En tiempos de Aristóteles, el modelo era uno geocéntrico, con la tierra inmóvil y diversas capas esféricas por las cuales circulaban los planetas o se ubicaban las estrellas. El modelo de Newton, explícitamente opuesto al anterior –en particular, es heliocéntrico–, modifica esa concepción, pero, además, cambia la dirección del asunto: este modelo no es solo la recolección de los descubrimientos de Copérnico, Galileo y el propio Newton, sino fundamentalmente una serie de fórmulas *–modelos–* de cómo ocurre el movimiento en la tierra y en los cielos.
De manera similar, al pensar, por ejemplo, una circunferencia, un modelo matemático de ella está dado por la ecuación $x^2+y^2=r^2$.
El significado varía, y algunos expertos matemáticos consideran modelos solo a ecuaciones diferenciales, o sistemas de ellas; adicionalmente, hay toda una rama de la lógica matemática que se ocupa de modelos en un sentido un tanto distinto.
Tales diferencias en la acepción del término *modelo* no deben perturbarnos: el uso que el experto hace del lenguaje no debe confundirse con la matemática misma; por ejemplo, el modelo de la caída de los cuerpos es cuadrático, pero, obviamente, una parábola cuya constante del término cuadrático no es la de la aceleración de gravedad, no representa esa caída –por lo demás, si se deja caer un cuerpo, la parábola no es perceptible a la primera mirada–.

Tal vez, en lugar de comenzar por una definición del *concepto* de modelo, valga la pena conocer primero algunos modelos, adicionales a los más frecuentes, y trabajar con la *noción* de modelo que vamos construyendo y completando.
Al respecto, seguramente conviene distinguir desde ya la modelización y la resolución de problemas en general: un problema podría tratar una cuestión puramente matemática, y el modelo ha de tener una conexión necesaria con la 'realidad'. En todo caso, daremos más adelante una versión explícita de aquello en que consiste un modelo, versión que suele llevar el nombre de uno de los autores/editores de este libro, y que se usa a lo largo y ancho del mundo.

Modelos en la historia y educación matemática

A lo largo de la historia, se percibe el uso de modelos en muy diversas situaciones. En los manuales de estudio se encuentran, por ejemplo, los modelos que usaban los egipcios para pagar el impuesto (con interés compuesto) al faraón, de acuerdo a la medida del terreno que tenían a su cuidado; uno puede imaginar, además, modelos que habitantes más antiguos debían elaborar para el desplazamiento y disposición de bloques de piedra para construir las pirámides. Es evidente que mucha matemática se generó a partir de problemas como esos.
La sistematización que hizo Euclides de la matemática de su tiempo fue, como sabemos, un gran acierto, un gran logro. Sus libros (lo que no se perdió de ellos) o comentarios de ellos se usaron para enseñar matemáticas por más de dos milenios. Sin embargo, debemos insistir, aprender con ellos es invertir el orden en que aparecen las ideas matemáticas. Ello nos pone ante una tensa dualidad: si bien no es práctico ni, realmente, posible aprender matemáticas acercándose a ella a partir de los problemas que la generaron, recreando escenarios en que muchas veces no había conceptuación ni claridad suficientes, ni siquiera lenguaje *ad hoc*, debemos evitar que los estudiantes queden a oscuras respecto de su pregunta habitual, y legítima: ¿Para qué aprendemos esto?

El lugar de los cómputos, de la memoria y de ciertos hechos

Para una persona que no se convertirá en un especialista –es decir, para la inmensa mayoría–, seguramente es apropiado enfatizar más la actividad matemática que el entender a cabalidad un edificio matemático.
Adicionalmente, conviene reiterar que hacer todos los cómputos de un problema usando la propia cabeza, si bien fue necesario en alguna época (aun cuando quienes usaban ábacos se adelantaron un tanto), eso ha ido progresivamente cobrando menos relevancia: si un curso de cálculo infinitesimal demoraba en llegar a poder dibujar una curva (y de modo que podía no quedar suficiente tiempo para abordar problemas reales), ahora que la curva la entrega un servidor electrónico en una fracción de segundo parece más claro que la finalidad del dibujo era

el análisis de la información, y que la mente puede ocuparse de aspectos más creativos, y más fructíferos.
Por lo demás, hay que agregar que ya se ve que, progresivamente, es más difícil realizar todos los cómputos por los seres humanos, y que, por ejemplo, para la planificación de la economía, es necesario tratar con lo que hoy se llama *big data*: grandes colecciones de datos, no enteramente procesables por seres humanos.
También el papel de la memoria disminuye: la información está, literalmente, por doquier –a solo unos pasos y unos cuantos clics–.
Mirado en perspectiva, podemos clarificar no solo dónde hay que hacer los énfasis, sino también reconocer que algunos conocimientos del pasado, permanentes como son los de la matemática, han perdido relieve o incluso vigencia en el uso común. Por ejemplo, la regla de los signos que Descartes utilizaba hace ya casi cuatro siglos para identificar raíces de una ecuación polinomial, y el estudio de la ecuación de segundo grado, aun cuando puedan parecer entretenidos, interesantes e instructivos, definitivamente han perdido vigor, pues son, ambas son muy poco realistas. Aquella regla parte del supuesto de que se tiene un polinomio con coeficientes enteros, cosa que parece ocurrir solo en los textos de estudio y en las aulas. De la ecuación de segundo grado se puede colegir hoy con mayor claridad que se la estudia, a la postre, porque es más sencilla: la cúbica es difícil de tratar, la cuarta virtualmente desconocida, desde el grado 5 no se tiene una fórmula general; peor aún, por lo general, los problemas que se pueden modelar con modelos polinomiales son relativamente escasos (si bien ocasionalmente y para algunos propósitos, se pueden aproximar localmente con ellos).

Una cierta complicidad

Hay, o podemos suponer, lo que llamaríamos una profunda *complicidad* entre el mundo real y la matemática, de raíces filosóficas (epistemológicas, metodológicas) profundas. Es allí donde se sitúa el aprendizaje de un ciudadano que no necesariamente se dedicará a la matemática y que tal vez no siga estudios superiores, y, por supuesto, también el de cualquiera cuyos estudios superiores contemplen formación matemática.
En un caso bien conocido, el modelo de mecánica celeste elaborado por Pierre Simon Laplace un siglo y medio más tarde que Newton e inspirado en él, no se correspondía con las observaciones realizadas para la órbita de Urano. J. C. Adams en Cambridge y U. Leverrier en París, trabajando independientemente sobre el modelo, calcularon que debía de haber una masa gravitatoria que producía una aberración de aquella órbita. Calcularon también dónde debía estar esa masa, y al enfocar los telescopios vieron a Neptuno por primera vez en la historia, hacia 1846.

Por su parte, W. R. Hamilton, realizando estudios de mecánica y viendo que los números complejos no daban cuenta de las situaciones que le interesaban, creó los cuaterniones, que permitieron a los físicos establecer relaciones de teorías que se venían desarrollando separadamente aun cuando los experimentos indicaban similitudes, y elaborar la teoría electromagnética: electricidad y magnetismo reunidos por la matemática.
La poderosa relación entre la matemática y la 'realidad' es el fundamento de la enseñanza matemática a nivel escolar; en particular, la matemática (álgebra, geometría, estadística) es el leguaje de las ciencias y nos ayuda a abordar y entender problemas que enfrentamos como ciudadanos.

Modelización y competencias

Como venimos diciendo, se requiere de un cambio drástico en la concepción de lo que es aprender y enseñar matemáticas.
Es allí donde se deben considerar las competencias del siglo XXI, el trabajo colaborativo, la tecnología, cierta integración de las disciplinas científicas y la matemática, y el abordar problemas reales con datos reales. Se necesita modelar para entender fenómenos.
Adicionalmente, la modelización matemática ofrece una oportunidad de aprender la matemática del mismo modo en que, en términos generales, se la elabora –y, además, aquel en que con frecuencia surgieron grandes ideas de la matemática–.
Ello no obstante, cierta ausencia de tradición en una proporción apreciable de nuestras instituciones formadoras se traduce en que cada insistencia del currículo en enfatizar la modelización matemática comporte una suerte de amenaza a los profesores, una cuestión más a la cual atender en medio de una agenda ya excesivamente sobrecargada. Muchos profesores estiman que este tipo de actividad es excesivamente difícil y compleja, y una cantidad apreciable de ellos lo entiende solo como aplicar modelos ya hechos, o, en caso de generarlos, que sean una suerte de ejercicios ficticios, sin datos reales y sin importancia práctica.
Por el contrario, si queremos que la modelización matemática ayude a desarrollar las competencias que se procuran con ella, hay que utilizar datos que los estudiantes reconozcan como reales.
Por cierto, un estudiante enfrentado a este tipo de enseñanza puede reaccionar de manera diferente que ante la sola recepción de contenidos. De hecho, los datos indican no solo un interés mayor en el estudio, sino también un aumento de la autoestima y, con ello, una mayor confianza en su propia actividad.

Modelización y STEM

El acrónimo STEM (*Science, Technology, Engineering, Mathematics*) añade de manera explícita varios elementos que para algunos podrían ser connaturales a la modelización matemática en general, pero que están convenientemente relevados y reunidos.

S. Por una parte, y como sabemos, STEM ayuda a comprender la naturaleza inter-disciplinaria de la Matemática. Si bien las teorías matemáticas se desarrollan y pueden ser estudiadas de manera independiente de la ciencia, no es esa la manera en que se la ha generado, en general, y se puede argumentar que en su relación y aplicación en las ciencias se la comprende mejor.

T. La tecnología, entre otras cosas, impulsa fuertemente a no realizar cómputos 'a mano' si se dispone alternativas electrónicas (…). Esto es muy interesante, por cuanto, para el profesor de Matemáticas, un obstáculo sempiterno es que parte de sus alumnos no cuenta con destrezas operatorias, y suele quedar rezagada. Usando apropiadamente tecnología, todos pueden participar en la clase, aportar ideas, desarrollar su pensamiento, despertar su creatividad, resolver problemas.

E. Hablando en términos generales, la E del acrónimo dice relación con el hecho de que la ingeniería no se ocupa de estudiar problemas *per se*, sino de dar soluciones efectivas a problemas existentes. Además, trabaja siempre con datos reales, no idealizaciones; de otra manera, no podría dar respuestas adecuadas.

M. El aspecto matemático nos es más familiar, pero debemos reiterar que la óptica aquí no es acumular una cantidad de modelos que la matemática y la ciencia tienen y que podrían servir para un 'más adelante' un tanto hipotético –y que, por lo demás, si se llega a materializar una situación en que se requiera alguno de esos modelos, es muy probable que ese conocimiento no bien enraizado no esté ya disponible (si es que alguna vez lo estuvo, en primer lugar)–.

Modelización y 'realidad'

Así pues, no hablamos aquí de modelización como solo un ejercicio académico o escolar, sino de enfrentar problemas reales, con datos reales, y respuestas efectivas.

Por supuesto, los modelos que se usan en las ciencias y en las matemáticas han sido hechos por expertos, y, por otra parte, y como se suele decir, no se nace sabiendo. Pero cualquier estudiante conoce, de hecho, algunos modelos matemáticos, aun cuando no se los nombre con este término; es esa la primera versión de este aprendizaje. Luego podrá cooperar a modificar algún modelo para un fenómeno determinado. La progresión continúa en distintos grados de complejidad y realismo (en el texto se dan dos aproximaciones explícitas a ella).

Hay, por supuesto, una variedad de perspectivas que se han desarrollado para usar la modelización para los propósitos que hemos venido reseñando.
Afortunadamente para los (otros dos) editores, la editora, también autora de un capítulo de este libro, está asociada a un modelo-de-modelización que se ha venido usado en muchas partes del mundo: el ciclo de Blum y Leiß, que la literatura suele citar como ciclo de Blum-Borromeo Ferri[2], y que se describe a continuación.

EL CICLO DE MODELIZACIÓN

Si se va a construir un modelo, es natural pensar que hay en ello algo de ensayo y error: se hace una hipótesis simplificada de la situación, y se la pone a prueba. Ahora bien, es posible que un primer intento resulte muy descaminado y que haya que desecharlo rápidamente; aun si esa aproximación inicial es buena, es probable que haya que precisarla, pulirla.
El comentario anterior, aun hecho en términos tan generales, manifiesta cómo procede la ciencia experimental, cómo su método inductivo llega a conclusiones verificables, corrigiendo eventualmente algunos supuestos que solemos hacer y de los cuales a veces ni siquiera somos conscientes. Esa manera de trabajar ha permitido el avance de la ciencia y, con ello, el de la civilización como la conocemos.
La modelización matemática pone a un individuo o grupo ante una situación o problema de la "realidad" externa, al que quiere(n) dar solución, y para lo cual se recurre a la Matemática. Se seguirá, seguramente un ciclo de aproximaciones sucesivas a la solución, hasta alcanzar un grado de satisfacción suficiente. Seguramente, ello puede llevar a preguntas muy generales y de carácter tal vez epistemológico (qué es aquella realidad, cómo influye el que los modeladores pertenezcan a ella, por qué razón la representación matemática resulta adecuada para encontrar soluciones…); ello no obstante, y tras un tiempo considerable de uso de esta manera de trabajar, se la considera un instrumento confiable para comprender situaciones, resolver problemas de muy variada naturaleza.
Por supuesto, para que el trabajo de modelización matemática sea bien hecho, es necesario precisar sus partes, y examinar cómo se organizan y cómo funcionan; por ejemplo, y para

[2] La versión original del ciclo apareció en 2006, por Werner Blum y Dominik Leiß (en "Filling up" – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks, en M. Bosch (Ed.), *CERME-4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixols, pp. 1623-1633). Tras la versión que dieron Werner Blum y Rita Borromeo Ferri en 2009 (Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Applications, 1*(1), 45-48), la literatura suele denominarlo "Ciclo de Blum – Borromeo Ferri".

comenzar, cómo se traducen datos, nociones, supuestos, relaciones y condiciones del problema –expresados en términos inmediatos o de alguna disciplina– al lenguaje y la teoría matemáticos. Por otra parte, para el caso del uso del modelamiento matemático para la enseñanza de la matemática, de las ciencias y de otras disciplinas, y para favorecer que los estudiantes aprendan a usarlo para resolver problemas de su entorno, es necesario, además, precisar y describir los procesos cognitivos que le están asociados.

Ha habido varios ‘modelos’ para entender, precisamente, la modelización matemática y su puesta en juego con propósitos educaciones, y prolongados estudios para explicitar sus fundamentos teóricos y la evidencia empírica que los sustentan. Entre ellos, uno particularmente exitoso es el generado por Blum, Leiß y Borromeo Ferri, que presentamos aquí en términos generales. (Encontrará usted bibliografía sobre el modelo al interior del libro).

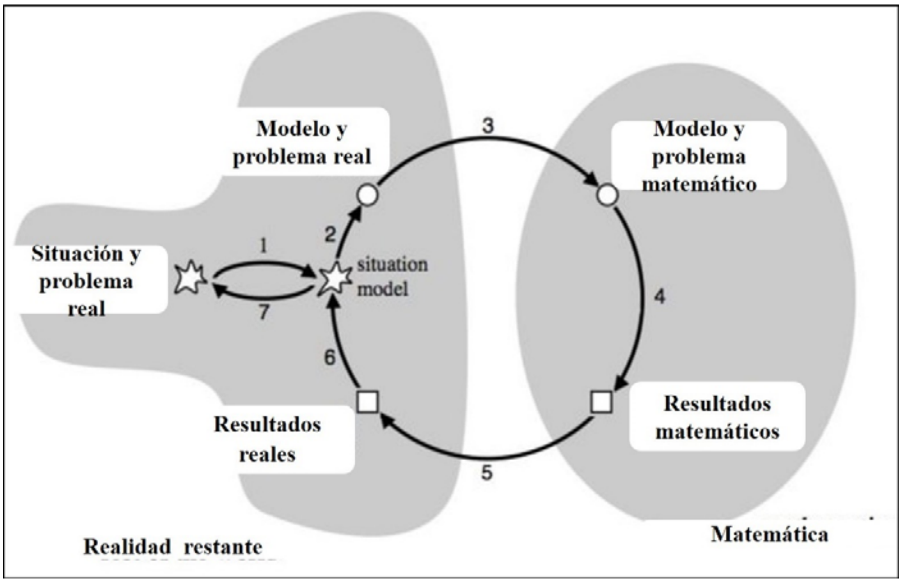


Fig. 1: Ciclo de Modelización (Blum & Leiß, 2007)

(Los números indican transiciones)

- Situación/problema en el mundo real.
- (1). Proceso de construcción de un primer modelo
- Primer modelo a partir de su entendimiento parcial del problema (incluso en forma implícita e inconsciente).
- (2). El modelador filtra información del problema; define cómo tratarlo (de acuerdo a su estilo de pensamiento matemático); lo idealiza y simplifica (más conscientemente que antes).
- Modelo real hecho de dibujos o fórmulas; incluye conocimiento extramatemático (manifiesto en declaraciones verbales que lo sustentan).

- (3). Matematización: se construye un modelo matemático; también se usa dibujos o fórmulas y se incluye conocimiento extramatemático (pero las declaraciones son de naturaleza matemática).
- Modelo matemático
- (4). Trabajo matemático (requiere competencias matemáticas del modelador).
- Resultados matemáticos
- (5). Los resultados matemáticos son interpretados (incluso inconscientemente).
- Resultados reales.
- (6) Validación de los resultados reales de acuerdo a su correspondencia eventual con la representación mental de la situación (intuitiva e inconscientemente; o bien con base en el análisis, reflexivo de la correspondencia entre problema y su representación).
- Modelo de la situación
- (7) Contrastación del modelo obtenido con la situación real.

Si bien trabajos ulteriores de quienes generaron este ciclo les han llevado naturalmente a refinar esa propuesta, nos ha parecido adecuado para el libro dar aquí una reseña del ciclo, utilizando el cual, por lo demás, se han hecho varios de los trabajos que se presentan.

EL LIBRO

Ofrecemos ahora una visión del libro y su generación

Los autores

Las credenciales de los autores varían desde educación matemática y didáctica de la matemática, a matemáticas, ingeniería, biología, física.
Todos ellos dedican buena parte de su tiempo, si no toda, a cuestiones de enseñanza de la matemática o de la ciencia, y, en particular, de modelización matemática y/o su enseñanza, tanto en proyectos de intervención como de investigación en el tema. Algunos de ellos tienen su propia página web o su plataforma computacional, especialmente diseñadas (se encontrará sus ‘coordenadas electrónicas’ en sus respectivos capítulos) como recurso adicional para apoyar el trabajo de aula.
Más adelante, incluiremos sendas reseñas de sus *currículum vítae*.

Temas y consideraciones

Los temas abordados por los autores son variados, y dan una idea de la amplitud del área de la modelización matemática en el sistema escolar; en principio, son para Enseñanza Media, pero un número apreciable de ellos sirve para niños desde tercero básico.

Todos los capítulos recurren a tecnología –computadoras, *tablets*, teléfonos celulares, sensores–, de diferentes maneras, sea para buscar y analizar información, o como recurso de procesamiento de datos, o bien como medio de visualización y también de cómputo (como uso de sensores, programación inicial y en bloques; incluso, para observar clases), y muchos declaran expresamente la necesidad del trabajo colaborativo.

Se encontrará situaciones que tratan, por ejemplo: el tamaño de un *hula-hula* (*hoola hoop*); formas eficientes de abordar la problemática de vivir en las quebradas de Valparaíso; cómo usar plataformas de datos gigantescas; control de plagas; manejo de recursos energéticos limpios; polinización de arándanos; selección natural; volumen de barricas de vino; construcción de invernaderos; riegos; acelerómetros, etc.

En la tradición de que es bueno conocer modelos antes de elaborar los propios, hay un capítulo destinado a las leyes de Newton y algunos conceptos fundamentales de la física. La manera en que se presentan las leyes es particular y procura que el aprendiz pueda conocer mejor su entorno –y, al profesor de matemáticas, tal vez, temporalmente un tanto alejado del tema, le servirá para recordar sus elementos–.

Una buena ilustración de lo que comporta el realismo de cada situación se da en el problema de las barricas, propuesto en una región vitivinícola, y en el que se consideran las condiciones del vino en contacto con la madera.

En general, los capítulos muestran cómo empezar el trabajo, pueden incluso comenzar por aprendizajes de las *apps* si es que las utilizan, cómo progresar en él –ya sea cambiando el rol de alumnos y profesores, o bien ampliando progresivamente un modelo inicial–, y avanzan hasta obtener resultados de interés. Además, es fácil percibir que los problemas que se proponen pueden extrapolarse a fenómenos más amplios. Sin embargo, no es ello necesariamente el fin del asunto, pues a veces, en la búsqueda de la comprensión del trabajo interdisciplinario y de la complejidad de los fenómenos, se agregan también comentarios o conclusiones que desafían lo que a veces llamamos nuestra intuición –un ejemplo de ello es cómo la selección natural, contrariamente a lo que se suele oír, se inclina por la colaboración–.

Aprendizaje de la modelización

Los capítulos invitan todos a hacerse preguntas, a tratar temas reales con datos reales, y a buscar soluciones efectivas, a comprender el mundo del que somos parte.

Algunos ofrecen marcos teóricos o conceptuales diversos para ayudar a la mirada del profesor, otros se adentran directamente en los temas.

La cuestión es siempre aprender a modelar, modelando.

Hay situaciones se prestan a proyectos cortos, otros requieren de más largo aliento. En cualquier caso, la mayoría sigue el modelo de Blum – Borromeo Ferri o alguno similar.

Algunos capítulos incluyen análisis de resultados obtenidos, conclusiones, y recomendaciones de diverso tipo al profesor –dificultades que se pueden encontrar, evaluación de los aprendizajes, e. g.–.

Se encontrará también modelos teóricos, comprobados de manera empírica, de las competencias que deben desarrollar los profesores para la modelización matemática. Además, recomendaciones para que escuelas e instituciones formadoras trabajen en conjunto para mejorar los aprendizajes.

Invitación

Como se aprecia, en lugar de reseñar aquí cada uno de los trabajos, hemos optado por invitar a usted –enfáticamente– a hojear los resúmenes de los capítulos y detenerse a su gusto en lo que le parezca necesario, conveniente, oportuno o atractivo.

Nota terminológica

Hablamos siempre de *modelización* o *modelamiento*, pero tratamos de no usar *modelación* y, menos, *modelaje*.

La RAE distingue entre *modelizar* –construir el modelo o esquema teórico de algo– y *modelar* –formar una figura comuna materia blanda, configurar o conformar algo, presentar con exactitud la imagen de las figuras, exhibir diseños de moda–. El uso disciplinario, por su parte, releva el término *modelamiento,* que se ha vuelto frecuente. Finalmente, hemos descartado el término *modelaje*, que, al menos en América Latina, tiene una connotación indiscutible de pasarelas de exhibición.

Rita Borromeo Ferri
Jaime Mena Lorca
Arturo Mena Lorca

Capítulo 1
Planificación y realización de jornadas de modelización matemática – Promoción de la cooperación entre escuelas y universidades

Rita Borromeo Ferri y Andreas Meister
Instituto de Matemáticas, Universidad de Kassel, Alemania

¡Sólo aprendes modelización matemática si lo haces tú mismo! Las jornadas de modelización matemática en la escuela ofrecen a estudiantes y profesores la oportunidad de experimentar lo que significa aplicar las matemáticas en la realidad y ver que, además de las matemáticas, las otras asignaturas STEM también son importantes. En nuestro capítulo reportamos sobre las Jornadas de Modelización que hemos estado llevando a cabo durante mucho tiempo, y mostramos cómo se planifican los días de modelización en y con las escuelas. Los futuros profesores de matemáticas participan en la planificación de las jornadas de modelización mediante un seminario en la universidad, y luego acompañan a los estudiantes durante tres días en la escuela. Esto crea una buena e importante cooperación entre la escuela y la universidad, lo cual debería ser el objetivo permanente de esas jornadas
Palabras clave: jornadas de modelización matemática, educación STEM, formación de profesores.

1. Introducción

La enseñanza de la modelización matemática sigue siendo un gran desafío para los profesores. Especialmente en los últimos años, se ha alcanzado mayor comprensión a nivel internacional en el campo de investigación del profesionalismo de los maestros en la modelización. Así pues, se han desarrollado y probado nuevos, diversos y concretos conceptos didácticos para aplicación en la enseñanza, así como tareas de modelización para escuelas primarias y secundarias (Borromeo Ferri, 2018a; Borromeo Ferri & Blum, 2018; Schukajlow & Blum, 2018; Eilerts & Skutella, 2018).
Entretanto, los ministerios de educación de los países también han tomado conciencia de que la modelización matemática sólo puede aplicarse en el aula si se la comienza en la universidad; un buen ejemplo para Chile es el descrito por Huincahue, Borromeo Ferri, y Mena-Lorca (2018).

La actitud de los futuros profesores hacia la modelización matemática cambia significativamente después de un seminario de modelización. Muchos futuros profesores perciben la modelización como un contenido muy complejo y difícil (Borromeo Ferri, 2020). En nuestro seminario sobre modelización, descrito aquí, las experiencias propias son de gran importancia: los futuros profesores han resuelto por sí mismos tareas de modelización; han tenido la oportunidad de desarrollar sus propias tareas de modelización y de ponerlas en práctica y reflexionar sobre ellas en clase; han experimentado que tanto los conocimientos teóricos como los prácticos son necesarios para el éxito de la enseñanza.
Entretanto, existen modelos teóricos y también empíricamente probados de las competencias que requieren los profesores para la modelización matemática, como por ejemplo, el representado en la Fig. 1 de Borromeo Ferri (2018a), o el de Klock et al. (2019). Estos modelos ofrecen tanto a los formadores de profesores, como a los estudiantes y también a los profesores en ejercicio, la posibilidad de mostrar qué contenidos son relevantes dentro de un seminario.

Dimensión teórica	a) Ciclos de modelización b) Modelización de objetivos/perspectivas c) Tipos de tareas de modelización
Dimensión de la tarea	a) Resolver tareas de moda varias veces b) Analizar cognitivamente tareas de modelización c) Desarrollar tareas de modelización
Dimensión educativa	a) Lecciones de planificación de tareas de modelización b) Enseñar tareas de modelización c) Intervenir en caso de dificultades
Dimensión diagnóstica	a) Identificar las fases del proceso de modelización b) Identificar dificultades y errores c) Evaluar los elementos de prueba

Fig. 1: Modelo de competencias para la enseñanza de la modelización matemática (Borromeo Ferri & Blum, 2010; Borromeo Ferri, 2018a)

Los resultados de los estudios empíricos de intervención muestran que las competencias en las 4 dimensiones señaladas por Borromeo Ferri aumentan significativamente a través de un seminario de modelización (Borromeo Ferri, 2019).

Sobre la base del estado de las investigaciones nacionales e internacionales (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri, & Greefrath, 2015), se pueden distinguir dos tipos principales de seminarios de modelización: En primer lugar, hay seminarios en los que los estudiantes desarrollan tareas de modelización, además de formación teórica, y luego reflexionan sobre la enseñanza y el cómo en el seminario. En segundo lugar, están los llamados "días o semanas de modelización". El "tipo de seminario" "jornadas de modelización" será el tema central de este documento. Sobre todo, debe quedar claro que las jornadas de modelización permiten una buena y también necesaria cooperación entre la escuela y la universidad y, por lo tanto, la formación de los profesores.

Desde hace unos 15 años se celebran en Alemania eventos como jornadas o semanas de modelización (por ejemplo Kaiser y Schwarz, 2010). Estas actividades de modelización están en parte diseñadas para diferentes propósitos y objetivos. Por ejemplo, a veces sólo los estudiantes excelentes son invitados especialmente a pasar una semana de sus vacaciones resolviendo una compleja tarea de modelización en la universidad. Por lo general, los estudiantes que tienen un gran interés o talento en las matemáticas son motivados a participar en estos eventos (Bock & Bracke, 2015). Este enfoque es ciertamente útil porque estos alumnos adquieren entonces una visión mucho más profunda de las matemáticas. Los alumnos experimentan así el carácter interdisciplinario de las matemáticas, lo que puede reforzar su deseo de estudiarlas más adelante(Borromeo Ferri, Grünewald, & Kaiser, 2013) .

Las metas y objetivos de las jornadas de modelización que hemos llevado a cabo en los últimos 10 años difieren de aquellos formatos de otros institutos en muchos aspectos, tales como la población estudiantil, la edad, y la estructura general, que viene determinada por la cooperación entre la escuela y la institución formadora (de profesores de matemáticas). En primer lugar, no seleccionamos a los estudiantes según su rendimiento matemático o el nivel escolar (bajo, medio, alto) en el que están. Alumnos de 9º grado participan en jornadas de modelización matemática. Es una gran experiencia, especialmente para esos estudiantes, poder trabajar en un problema de modelización durante tres días con el apoyo de los futuros profesores.

En primer lugar, mostraremos cómo los futuros profesores de la institución formadora se preparan para las jornadas de modelización en la escuela mediante un seminario. Luego se aclarará cómo se planifican las jornadas de modelización y cómo se llevan a cabo en la escuela. Además, daremos ejemplos de tareas de modelización que ya hemos utilizado varias veces en la escuela. Son ayudas organizativas importantes que permiten llevarlas a cabo. Sin el apoyo de los profesores de las escuelas, esto es difícilmente posible. A través de los muchos años de investigación que acompañan a nuestras jornadas de modelización matemática, también mostramos las opiniones de los alumnos participantes y de los futuros profesores. Finalmente, haremos una discusión de los resultados alcanzados.

2. Preparación de los futuros profesores para las jornadas de modelización matemática en la escuela

A continuación, se describe la particularidad de las jornadas de modelización en la Universidad de Kassel, que se puede ver, entre otras cosas, en el Equipo de Enseñanza (ambos autores de este artículo) del seminario de teoría-práctica. El objetivo es también que los futuros profesores experimenten una visión multifacética de la modelización matemática. Un matemático aplicado (el segundo autor de este artículo), que ha trabajado durante años en proyectos fuera de la universidad, puede dar a los futuros profesores una visión de las áreas en las que las matemáticas son importantes en la aplicación concreta. Esto también comporta el cómo se hace el trabajo interdisciplinario en grupos sobre problemas reales. Un didacta de la matemática (el primer autor) puede proporcionar a los futuros profesores conceptos didácticos para la aplicación de la modelización, o promover las aptitudes de diagnóstico e intervención. La experiencia de los dos profesores universitarios del equipo de enseñanza en el seminario en la universidad, muestra que una visión multiperspectiva de la modelización matemática puede ser posible –como en el "formato de Kassel de jornadas de modelización".

El seminario en la Universidad

El seminario consta de dos partes: la primera es más teórica, la segunda parte es práctica, porque tiene lugar en la escuela.

En la primera parte, la base didáctica y profesional para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática se trata en cinco sesiones. La introducción al tema es proporcionada por los profesores del equipo. Desde la perspectiva de las matemáticas aplicadas, se utilizan ejemplos para mostrar en qué áreas las matemáticas son necesarias para la solución de problemas reales. La forma en que este contenido, a menudo complejo, puede finalmente ser enseñado a los estudiantes, se muestra desde una perspectiva didáctica. Los futuros profesores también aprenden que las tareas de modelización tienen un impacto significativo y positivo en la imagen que los alumnos tienen de las matemáticas.

Concretamente, los futuros profesores se ocuparán del concepto de modelización, de los diferentes ciclos de modelización, de los criterios de las tareas de modelización y de los conceptos para su introducción en la escuela. En particular, se aborda el tema de las intervenciones de los profesores en la modelización matemática. Esas intervenciones se definen generalmente como todas las intervenciones verbales y no verbales del profesor en el proceso de resolución de los estudiantes. Hemos elegido este enfoque porque, más adelante, como profesor de matemáticas, es importante saber cómo intervenir. Utilizamos videos de modelización de jornadas anteriores para que los futuros maestros puedan aprender a diferenciar entre las formas de intervención y luego aplicarlas en la escuela. La modelización matemática sólo puede aprenderse resolviendo tareas de modelización uno mismo; si es posible, en equipo. Sólo cuando haya experimentado usted mismo el potencial de las tareas basadas en la realidad y lo desafiantes que pueden ser las tareas de modelización, podrá ponerse mejor en la forma de pensar de los alumnos. Así, los futuros profesores trabajan en pequeños grupos en los bloques de sesiones en las tres complejas tareas previstas para las jornadas de modelización en la escuela (en 2019, dos de esas tareas fueron el desarrollo de un modelo de control, y rendimiento de vehículos). Las soluciones serán presentadas por los futuros profesores en el seminario, profundizadas junto con el Equipo del Seminario, y discutidas para su aplicación didáctica y en relación con intervenciones que puedan hacer y sean de utilidad para los estudiantes. Los futuros profesores deben tener un buen dominio de las tres tareas de modelización que se han elegido para las jornadas, porque al principio de los días de modelización en la escuela no saben cuál de esas tareas elegirá el grupo de estudiantes asignado.

Ejemplo de una de las tres tareas de modelización para las jornadas de modelización matemática

Ahora mostramos una tarea de modelización que fue elegida a menudo por los estudiantes de las jornadas de modelización matemática. Los estudiantes tienen una relación directa con la tarea, porque se trata de conducir un autobús. En las grandes ciudades de Chile, como Santiago, hay muchas líneas de autobuses. En Viña del Mar y Valparaíso también hay muchos autobuses. Los futuros profesores, al principio, no encontraron que la solución de la tarea fuera fácil. Normalmente, el ciclo de modelización tiene que ser recorrido varias veces, para que uno obtenga un buen modelo. Sólo podemos mostrar un recorrido aquí.

¿Cuál es la distancia óptima entre las paradas de autobús a lo largo de una línea de autobús?
- Los residentes quieren una parada de autobús lo más cerca posible de su apartamento/casa, para poder llegar rápidamente a la parada.
- Cuando está en el autobús, la gente quiere tener una gran distancia entre las paradas de autobús, porque así llega más rápido a su destino.
- El objetivo es encontrar la distancia óptima entre las paradas de autobús.

La siguiente solución de muestra para este problema de modelización fue elaborada por Stender (2016), y preparada nuevamente por Borromeo Ferri (2018a). Esta solución es diferente del proceso que la mayoría de los estudiantes elaborarán.

Para crear un modelo real, las siguientes suposiciones son útiles y se utilizarán en el siguiente proceso de modelización:

- aceleración y desaceleración del autobús;
- hora de subir y bajar del autobús;
- longitud de la ruta;
- hora de caminar a la parada del autobús;
- tamaño del vecindario;
- velocidad del autobús.

Se asume que el autobús se desplaza en línea recta y de longitud indefinida (véase la Fig. 2). El vecindario se extiende por igual a ambos lados con un ancho total de *2r*. Las paradas de autobús tienen una distancia constante x. El tiempo de viaje se considera para una persona que toma el autobús en la línea *s*. Así, el viaje comienza en un punto variable y es representativo de un pasajero medio. El autobús viaja a la velocidad v_B y el pasajero va a la velocidad v_F hasta la parada de autobús, y su el camino discurre primero en línea recta y vertical y luego a lo largo de la línea de autobús.

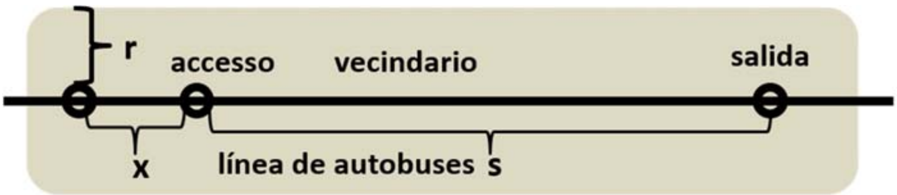


Fig. 2: Vecindario con línea de autobuses (Stender, 2016)

La idea básica del modelo matemático de la imagen es que la distancia entre las paradas de autobús es óptima si el tiempo de viaje del pasajero y la distancia a pie hasta y desde la parada de autobús son mínimos, dependiendo de *x.* Se tienen en cuenta tres componentes para el tiempo que pasa el pasajero:

1. el camino a pie desde y hacia la parada de autobús;
2. el tiempo de viaje del autobús a lo largo de la ruta s a una velocidad constante v_B;
3. el tiempo adicional que necesita el autobús cuando los pasajeros suben y bajan del mismo, y el hecho de que el autobús debe reducir la velocidad antes de detenerse.

Con la ayuda del siguiente cálculo se pueden resolver los componentes mencionados anteriormente: En primer lugar, la distancia máxima que el pasajero puede recorrer hasta la parada de autobús es *r*. Asumiendo que los puntos de partida están distribuidos uniformemente dentro de los barrios, la distancia promedio para caminar hasta la línea [en dirección N/S] es $\frac{r}{2}$. Si la distancia máxima [E/W] del pasajero a la siguiente parada es $\frac{x}{2}$, entonces la distancia promedio a pie [en dirección E/W] es $\frac{x}{4}$. Por lo tanto, el promedio de la distancia total a pie hasta la parada de autobús es

$$w_1 = \frac{r}{2} + \frac{x}{4} = \frac{2r + x}{4}$$

Debido a que el pasajero tiene que llegar al destino final después de dejar el autobús, se estima que la distancia total a pie es el doble: $w = \frac{2r+x}{2}$.

Para este propósito, la persona se toma el tiempo $T_F = \frac{w}{v_F} = \frac{2r+x}{2v_F}$.

Para el viaje en autobús, $T_B = \frac{s}{v_B}$.

El tiempo adicional hasta la parada de cada autobús, incluyendo el tiempo de conducción y de frenado, es un valor estimado de $T_H = 30$ segundos.

El tiempo total necesario en las paradas de autobús es $T_W = \frac{s}{x} \cdot T_H$.

Un componente del tiempo T_H y el tiempo adicional T_B para la aceleración y la desaceleración también puede ser calculados. Para la aceleración es $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, y $v(t) = at$.

El tiempo de aceleración tiene el tiempo $t_1 = \frac{v_B}{a}$ y la distancia recorrida durante ese período es $s_1 = \frac{1}{2}a{t_1}^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_B}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{{v_B}^2}{a}$.

Asumimos que la aceleración y la desaceleración son iguales. Entonces para la distancia total recorrida durante la frenada y la aceleración $s_2 = 2s_1 = \frac{{v_B}^2}{a}$. Para la parte del viaje que el autobús cubre sin parar, el tiempo es $t_3 = \frac{s_2}{v_B} = \frac{{v_B}^2}{v_B \cdot a} = \frac{v_B}{a}$, mientras que las paradas toman un tiempo $t_2 = 2t_1 = \frac{2v_B}{a}$. El tiempo adicional para la aceleración y desaceleración es $T_B = t_2 - t_3 = \frac{2v_B}{a} - \frac{v_B}{a} = \frac{v_B}{a}$. El tiempo que le toma a la gente subir y bajar del autobús aún debe ser estimado, pero el tiempo de 30s parece realista. Por lo tanto, el tiempo total de viaje de una persona es

$(x) = \frac{2r+x}{2v_F} + \frac{s}{v_B} + \frac{s}{x} \cdot T_H$.

Por ejemplo, para *s*=12 km, para $v_F = 5\, {km}/{h}$ y para $T_H = 30$s, se obtiene $1000m$, que es la distancia óptima entre las paradas de autobús.

Mostraremos una resolución de los estudiantes, más tarde. Con esta tarea queríamos mostrar que los futuros profesores tienen que dominar la asignatura de matemáticas por encima de todo. Esto es más difícil para los futuros profesores de la escuela secundaria que para el llamado "Gymnasium" (el tipo de escuela más difícil de Alemania, hasta el grado 13). En Alemania, la formación de los profesores difiere de la de Chile o los Estados Unidos. Desde el principio se deben estudiar dos materias (por ejemplo, matemáticas e inglés, o biología y música) y además de eso se debe estudiar la pedagogía, la psicología y la didáctica de cada una de las materias. Con los conocimientos previos de la primera parte del seminario en la universidad, los futuros profesores están ahora bien preparados para la segunda parte, la parte práctica del seminario.

3. Organizar y llevar a cabo jornadas de modelización matemática en la escuela

Por muchas razones, hemos estado celebrando días de modelización en las escuelas durante años. La cooperación entre escuelas, universidades e instituciones formadoras de enorme importancia, también, por supuesto, en lo que respecta a la ejecución de proyectos de investigación. Por lo tanto, es importante que los investigadores establezcan mucho contacto con las escuelas. Se necesita el apoyo de los directores de la escuela, porque las jornadas de modelización duran 3 días enteros. En Kassel esto ya no es un problema, porque las escuelas preguntan cuándo llegaremos finalmente con nuestros futuros profesores. Para las escuelas, los días de modelización se han convertido en un sello de aprobación para una buena educación STEM.
Otros objetivos de los días de modelización son que los estudiantes de la escuela puedan:

- entender que las matemáticas son útiles y son la base de muchas profesiones (¡las matemáticas son más que la aritmética!);
- aplicar las matemáticas al resolver una pregunta de la vida real y reconocer su carácter interdisciplinario;
- entender lo que significa la modelización matemática y aumentar las habilidades de modelización;
- trabajar continuamente y concentrarse en un problema de modelización durante tres días;
- comunicarse y discutir las matemáticas de manera efectiva en un grupo pequeño;
- entender el proceso de resolución y su resultado como grupo e individualmente.

Como ya se ha mencionado, los días de modelización siempre duran tres días, de 8 a 13 horas. En Kassel, a veces participan clases enteras, dependiendo del tipo de escuela, a partir del 9° grado. En promedio, hay entre 60 y 100 estudiantes que trabajan en una tarea, en grupos de 5-6 personas durante las jornadas de modelización matemática. Cada grupo de estudiantes es supervisado por dos futuros profesores, para que las decisiones técnicas y didácticas puedan ser aclaradas en equipo. Los profesores de matemáticas de la escuela visitan a sus estudiantes, pero no participan en su supervisión cercana. De esta manera los futuros profesores pueden ser los únicos responsables de su grupo de estudiantes. Las jornadas de modelización matemática comienzan tras la bienvenida, con la presentación de las tres tareas por los profesores del equipo. Al comienzo, el matemático aplicado muestra los problemas en los que ha trabajado o en los que está involucrado en la actualidad, y así da a los estudiantes una idea de las oportunidades profesionales que ofrecen los estudios de matemáticas.

Los estudiantes tienen 15 minutos para elegir en grupo una de las tres preguntas. Los futuros profesores son asignados a los grupos respectivos por sorteo. El último día, los estudiantes presentan sus resultados en forma de breves conferencias y el llamado "Gallery tour". Esto permite a todos los participantes presentar los resultados. Participan la dirección de la escuela, estudiantes de otras clases y profesores interesados de la escuela. Al final de cada día de modelización, los profesores, futuros profesores y conferenciantes se reúnen para reflexionar.

En la Fig. 3 mostramos un póster creado por los estudiantes con la solución de la tarea de modelización de la línea de autobuses. Aunque la solución está en alemán, el cálculo matemático es claro:

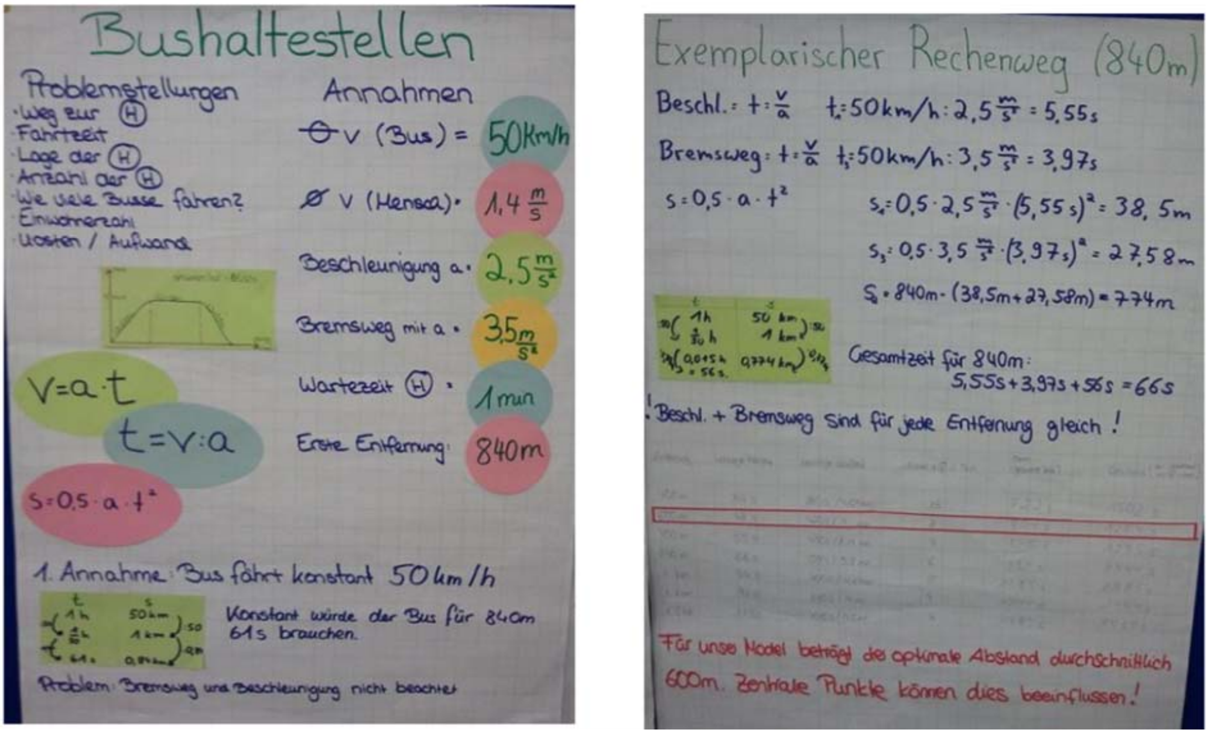


Fig. 3: Solución de la tarea de modelización de la línea de autobuses, por los alumnos

La solución es de un grupo de alumnos de la clase 10. Se trata de alumnos que no se consideran de alto rendimiento, pero que resolvieron la tarea con mucha motivación y gran alegría. Como ya se ha dicho, el objetivo era hacer un póster para el "Gallery tour". La estudiante universitaria (futura profesora de matemáticas), que acompañó a este grupo durante los tres días, describió en su reflexión que fue un reto, pero que aprendió mucho.

En otra solución (Fig. 4, se puede ver que los estudiantes también pueden clasificar los pasos de la solución en las diferentes fases del ciclo de modelización, marcadas en el cartel con 1, 2, 3). La introducción del ciclo de modelización en el segundo día de jornadas de modelización tiene una fuerte influencia en el proceso de solución de los estudiantes. Ellos son capaces de estructurar sus procedimientos y trabajar a nivel metacognitivo. Es importante que los estudiantes también aprendan los términos "modelo real" y "modelo matemático". Esto les dará una comprensión de lo que significa modelización matemática, y de que sus procesos no son lineales. Algunas fases tienen que recorrerse varias veces para obtener un resultado realista para el problema dado, tal como se representa en el modelo. La experiencia práctica y la investigación actual (Borromeo Ferri, 2018) muestran que el ciclo de modelización es útil y comprensible para los estudiantes.

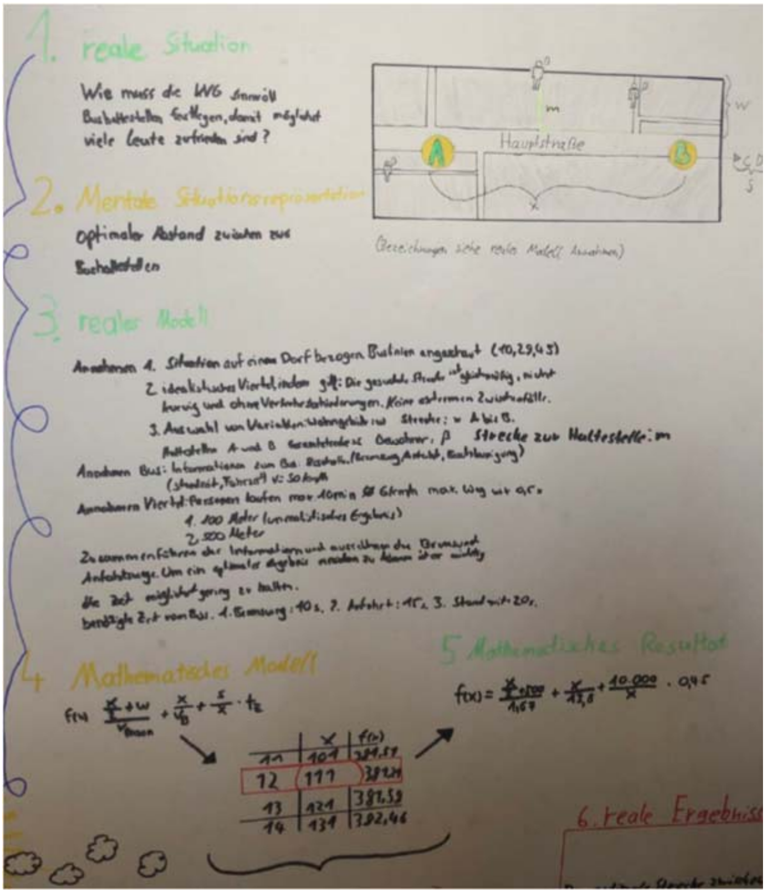


Fig. 4: Solución de la tarea de modelización de la línea de autobuses de los alumnos

Estructura de los días y actividades de modelización

Resuminos a continuación una visión general de la estructura de los días de modelización y lo que se hace con los estudiantes en los respectivos días además de resolver las tareas.

Días	Actividades/objetivos (incluidas las experiencias)
Día 1 8:00- 13:00	• Bienvenida y apertura en el salón de actos de la escuela. Breve introducción sobre lo que significa la modelización matemática. Se aclaran los objetivos de las jornadas de modelización. • Presentación de tres problemas de modelización • A los estudiantes universitarios se les asigna por sorteo un grupo de 5-6 estudiantes. • Los estudiantes comienzan a resolver el problema en grupo con los futuros profesores asignados. *El primer día, es necesario que los estudiantes entiendan el problema de modelización y discutan la diferencia con otros problemas de matemáticas que conocían antes. Por lo general, los estudiantes nunca han trabajado en problemas de modelización antes. Además, los estudiantes deben buscar datos pertinentes al problema para hacer suposiciones iniciales y simplificar el problema dado.*
Día 2 8:00- 13:00	• Comienza el día pidiendo a los futuros profesores que den una breve visión general de los resultados del día anterior, que fueron hechos por los estudiantes. • Introducción del ciclo de modelización *Durante este día los estudiantes hacen un gran progreso en su proceso de solución. Los estudiantes trabajan de forma más estructurada y reflexionan más, porque conocen el ciclo de modelización y sus fases.*
Día 3 8:00- 13:00	• El horario de trabajo es hasta el mediodía. Después del almuerzo cada grupo de estudiantes debe estar listo para una presentación. No todos los grupos pueden presentar los resultados al pleno. Se seleccionan tres grupos que presentarán resultados sobre los tres diferentes problemas de modelización relativa. *Objetivo para todos los grupos, independientemente de la presentación en el plenario: Elaboración de un póster con los resultados. Para reconocer el arduo trabajo de los estudiantes, se cuelgan los carteles en el salón de actos después de la presentación plenaria para un recorrido por la galería. Se invita grupos de edad más jóvenes y también a los profesores a este evento.*

Tabla 1: Estructura de los días y actividades de modelización

4. Jornadas de modelización matemática – Puente entre la escuela y la universidad para una buena educación de los profesores de matemáticas

Se ha hecho evidente que las jornadas de modelización matemática son diferentes de la enseñanza cotidiana. Se dispone de más tiempo para resolver una compleja cuestión de la vida real en un grupo pequeño. La implementación de estas jornadas de modelización no es demasiado complicada si se construye un puente entre la universidad (institución formadora de profesores de matemáticas) y las escuelas. Si los profesores, y especialmente los directores, de las escuelas quieren apoyar la modelización matemática en su escuela durante dos o tres días con un grupo de estudiantes de cierta edad, se trabaja con ellos y se prepara a sus estudiantes universitarios para este desafío. Los días de modelización han sido acompañados científicamente durante años bajo diferentes perspectivas (Borromeo Ferri, 2018b). Los estudios se referían tanto a los futuros profesores como a los estudiantes. En uno de ellos se demostró que bastan sólo tres días de modelización matemática para un aumento significativo de la capacidad de modelización de los estudiantes (Borromeo Ferri et al., 2013) y a un cambio de imagen de las matemáticas. También se puede observar un aumento en la adquisición de competencias entre los futuros profesores, especialmente en sus intervenciones en la elaboración de modelos. Asimismo, se obtuvo una comprensión más profunda de los interesantes problemas reales, por ejemplo, en la industria, que sólo pueden ser resueltos mediante el uso de las matemáticas. Muchos estudiantes sólo se dieron cuenta de la naturaleza interdisciplinaria de las matemáticas a través de tareas de modelización (Borromeo-Ferri & Meister, 2019).

Perspectivas de futuros profesores y estudiantes de matemáticas en jornadas de modelización matemática

La investigación científica en curso sobre las jornadas de modelización ha producido ahora una gran cantidad de datos basados en diferentes tipos de situaciones. En el presente documento se examinarán más detalladamente las siguientes preguntas, utilizando los diarios de aprendizaje de los futuros profesores, por una parte, y las encuestas escritas de los estudiantes por otra, como base de datos para sus respuestas.

1. ¿Qué opiniones sobre la modelización matemática como materia de enseñanza-aprendizaje en la educación universitaria y con respecto a la enseñanza y el aprendizaje en la escuela pueden captar los futuros profesores?
2. ¿Qué puntos de vista centrales sobre la modelización matemática pueden ser capturados en los estudiantes?

La encuesta escrita a los estudiantes siempre se realizó después de los días de la modelización. Consiste de preguntas abiertas para ellos, y también fueron una retroalimentación para los futuros profesores que monitoreaban os grupos. Las preguntas centrales fueron:

- ¿Qué te parecieron los días de modelización?
- ¿Ha cambiado tu idea de las matemáticas?
- ¿Qué te pareció el trabajo en grupo durante los tres días?
- Los futuros profesores ¿te cuidaron bien?

Para los análisis, se seleccionaron al azar 50 diarios de aprendizaje (Borromeo Ferri 2018b) de los futuros profesores (4º a 6º año de semestres) y 50 cuestionarios de los estudiantes (de 15 a 17 años de edad), a medida que se disponía de más datos. Sobre la base del esquema de codificación ya establecido utilizando la *Grounded Theory* (Strauss & Corbin, 2003) en Borromeo Ferri (2018b), se podrían evaluar los datos para las preguntas anteriores.

Perspectivas de los futuros profesores

Los siguientes puntos de vista muestran las percepciones subjetivas que muy a menudo se nombraron y que, por lo tanto, condujeron a la creación de categorías. En primer lugar nos ocuparemos de los futuros profesores.

1. *Perspectiva: Expandir el propio horizonte – El conocimiento sobre la aplicabilidad de las matemáticas*

En su mayor parte, los futuros profesores de matemáticas tienen poco conocimiento de las profesiones en las que se aplican las matemáticas. Por consiguiente, el seminario concede gran importancia a mostrar diversos ejemplos desde una perspectiva aplicada. Así, la profesión de matemático adquiere un nuevo significado para los futuros profesores, ya que especialmente en las matemáticas aplicadas se llevan a cabo proyectos de investigación interdisciplinarios. Estos hallazgos influyen en la comprensión de la modelización matemática, y también en lo que respecta a la enseñanza en las escuelas. Así pues, las siguientes percepciones subjetivas de los futuros profesores aclaran la visión de la modelización que proviene de las matemáticas *aplicadas* y explica los problemas interdisciplinarios reales, ilustrando así el campo profesional del matemático:

"Para mí fue de gran ayuda que se mostraran los problemas reales en los que trabajan los matemáticos. No lo sabía antes, así que amplió mis horizontes".	"Cuando enseñe en la escuela más tarde, al menos puedo mostrar tales ejemplos. Eso con el bebé en la incubadora fue muy interesante, y ¡nunca pensé antes que las matemáticas podrían ser usadas para calcular la termorregulación óptima al abrir la incubadora!"
"Se necesita una tarea de modelización de 90 minutos para las lecciones diarias. Los problemas complejos, como nos mostró el Sr. M. en el seminario, no son entonces factibles, por supuesto. Pero, sin los ejemplos, no hubiera sabido lo que significaba modelar correctamente en mi profesión".	"No había pensado en eso antes. Desde las algas hasta la A380, necesitas matemáticas en todas partes, ¡es genial!"

Tabla 2: Perspectiva matemática aplicada de los futuros profesores sobre la modelización

2. *Perspectiva de los futuros profesores sobre la viabilidad de la elaboración de modelos en la escuela*

La estructura del seminario se ha desarrollado para lograr un equilibrio entre la teoría y la práctica. Durante los tres días en la escuela, los futuros profesores tienen la oportunidad de aplicar sus conocimientos de las sesiones de seminario preparatorio directamente. El aspecto central, que se destaca y se trabaja aquí, es el *punto de vista de los* futuros profesores *con respecto a la viabilidad de la modelización en la escuela*. Esto significa, sobre todo, los antecedentes didácticos y metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática, que se trataron activamente en el seminario. Los siguientes puntos de vista subjetivos dan una idea de esto:

"Como ejercicio para mí como futuro profesor, no había nada mejor que esta oportunidad de probarme a mí mismo. En mi opinión, este seminario fue la mezcla perfecta de teoría (seminario universitario) y práctica (días en la escuela). Así que todo el trasfondo teórico tiene sentido. Simplemente se aprende mucho, pero sin saber qué es exactamente lo que hay detrás. Sin embargo, no puedo decir lo mismo de este seminario ".	"Los días de modelización en la escuela fueron una nueva experiencia para mí. Sólo conocí las tareas de modelización en la Universidad de Kassel. Por consiguiente, nunca antes había experimentado su efecto y el enfoque de los estudiantes. Me impresionó mucho la perseverancia y la motivación de mi grupo de estudiantes".
"Después de que se me permitió observar a los estudiantes durante tres días mientras probaban su mano en las tareas de modelización, trabajaban en ellas y las presentaban, me quedó claro cuántas competencias se promueven en el proceso".	"El seminario me dio una perspectiva diferente sobre la modelización. Al principio, no creía que las tareas de modelamiento pudieran crear una curva de aprendizaje tan diversa para los estudiantes".

Tabla 3: Perspectivas de los futuros profesores sobre la viabilidad de la modelización en la escuela

Perspectivas de los estudiantes

Ahora siguen las percepciones subjetivas de los estudiantes. Muchos alumnos habían resuelto tal tarea por primera vez en todo su tiempo escolar, por los días de modelización. Los alumnos tuvieron que lidiar con un problema real complejo, que tuvieron que "modelar". El concepto de " modelización matemática" y el procesamiento de un solo problema durante un período de tres días era nuevo para los alumnos. El ciclo de modelización fue introducido por los futuros profesores el primer o segundo día. Así, los estudiantes también recibieron una formación teórica. Por último, utilizaron el ciclo como instrumento metacognitivo para el proceso de modelización ulterior y, al presentar los resultados, para la clasificación de sus pasos de solución.

1. *Perspectiva: "Las matemáticas son más que calcular" – Experimentar la aplicabilidad de las matemáticas*

Uno de los objetivos de los días de modelización es hacer que los estudiantes experimenten directamente la aplicabilidad de las matemáticas. Las habilidades de modelización deben ser aprendidas y promovidas continuamente.

A continuación se muestra la perspectiva de la aplicación de las matemáticas y el proceso de modelización de los alumnos. Esto es muy complejo; pero las declaraciones prototípicas de los estudiantes deberían representarlo:

"Aprendí mucho sobre la importancia de las matemáticas y la modelización, me gustó eso”.	"¡No habría pensado que las matemáticas podrían ser útiles en las paradas de autobús, por ejemplo! Fue muy interesante, y algo completamente nuevo y no sólo matemáticas como en la clase".
"Lo que me gustó fue el conocimiento extramatemático y el aspecto de la interpretación y la validación".	"Es emocionante cuando no todo está predeterminado, como en los problemas matemáticos normales. Tienes que conseguir la información y luego las matemáticas. No es fácil".
"La modelización me ha demostrado que, en el caso de problemas reales, el resultado calculado debe ser siempre contrastado con la realidad. Si no lo haces, puede tener malas consecuencias, como el colapso de un puente o un accidente de avión".	"El ciclo de modelización me ayudó mucho; pude colocar mi enfoque allí y sabía lo que estaba haciendo, por así decirlo!".
"¡Las matemáticas no son tan aburridas!".	

Tabla 4: Opinión de los estudiantes: "Las matemáticas son más que sólo aritmética" – Experimentar la aplicabilidad de las matemáticas

2. *Perspectiva: Alcanzar la meta con trabajo en equipo*

En particular, las jornadas de modelización matemática ofrecen la oportunidad de que los estudiantes trabajen en una tarea en equipo, como en la vida laboral real. El objetivo es presentar las soluciones de la tarea. Los tres días de cooperación promueven procesos de dinámica de grupo. Estos son observados con interés por los futuros profesores. Durante los jornadas de modelización, el trabajo en gran parte independiente de los alumnos se concibe como un escenario de aprendizaje, porque los futuros profesores actúan según el "principio de ayuda mínima" (Zech, 2002). La visión de los estudiantes de la modelización matemática como un proceso de trabajo en grupo se ilustra con las siguientes afirmaciones subjetivas y prototípicas:

"Me gustó especialmente el trabajo independiente en el grupo y que tuviéramos que discutir en equipo para poder continuar".	"Nuestro equipo trabajó muy bien en conjunto, el ambiente era bueno. De lo contrario, nunca hacemos un trabajo de grupo tan largo en clase. Cada uno tenía su papel y nosotros lo hicimos".
"La motivación de trabajo de los individuos del grupo era pobre, lo encontré estúpido. No puedes simplemente salirte. Tampoco puedes hacer eso en el trabajo".	"Estábamos solos a pesar de la ayuda de los profesores en prácticas, fue una experiencia estupenda. Más de lo mismo".

Tabla 5: Punto de vista de los estudiantes: Alcanzar la meta con trabajo en equipo

3. Resumen y perspectivas

Las jornadas de modelización son enriquecedoras tanto para los futuros profesores como para los estudiantes, y contribuyen a crear nuevas perspectivas en las matemáticas.
Dos puntos de vista centrales se hicieron claros entre los futuros profesores:

- Visión de la matemática aplicada a la modelización
- Perspectiva sobre la viabilidad de la modelización en la escuela

El examen intensivo de las tareas de modelización desde la perspectiva de las matemáticas universitarias fue un reto, pero importante para los futuros profesores. No sólo son importantes los modelos matemáticos simples, con los que se podrían haber resuelto las tareas, sino que también es importante la formación matemática universitaria, que constituye la base de los estudios de matemáticas. Estrechamente relacionada con esto está la perspectiva matemática aplicada a la modelización. Una variedad de problemas reales de la industria y la ciencia, que pueden ser resueltos con la ayuda de las matemáticas, han ampliado los horizontes de los futuros profesores, entre otras cosas con respecto al espectro del campo profesional del matemático. Además, las experiencias propias adquiridas en el seminario para resolver tareas de modelización con conocimientos teóricos de base, se suman a la aplicación práctica en la escuela con todos los desafíos didáctico-metodológicos. Por lo tanto, el conocimiento de los futuros maestros sobre la viabilidad de la modelización en la escuela es importante y significativo, lo que quedó claro en muchas declaraciones.
En cuanto a los estudiantes, se preguntó qué puntos de vista centrales sobre la modelización matemática y las actividades asociadas a ella se pueden captar. También se podrían reconstruir dos visiones centrales:

- Perspectiva sobre la aplicación de las matemáticas y el proceso de modelización
- Perspectiva de la modelización matemática como proceso de trabajo en grupo

Esos enfoques ilustran lo que significa la modelización matemática para los estudiantes, conceptualmente y como actividad. El procesamiento de un problema real y el uso del ciclo de modelización como herramienta metacognitiva hacen que la modelización sea tangible para los estudiantes. Este sentimiento es evidente en muchas declaraciones. Ambas partes siempre destacan positivamente la estrecha colaboración de los futuros profesores con los alumnos. No se trata tanto de la modelización como de una actividad, sino más bien del proceso de negociación didáctica de los implicados y de los aspectos interdisciplinarios.
En general, las jornadas de modelización matemática son una actividad ideal para la cooperación entre escuelas y universidades, especialmente para la formación de alta calidad de los profesores

de matemáticas en todos los niveles escolares. Las jornadas de modelización también son adecuadas para la escuela primaria, por supuesto con las tareas correspondientes.

Nota

Rita Borromeo Ferri y Andreas Meister fueron premiados por el Ministro de Educación del Estado de Hesse, Alemania en 2018 por el seminario "Jornadas de modelización matemática". Recibieron, además, el premio de enseñanza otorgado por la excelencia en la enseñanza universitaria del Estado de Hesse.

Bibliografía

Bock, W. & Bracke, M. (2015). Applied School Mathematics – Made in Kaiserslautern. In H. Neunzert & D. Prätzel-Wolters (Eds.), *Currents in Industrial Mathematics: From Concepts to Research to Education.* (pp. 402–437). Berlin: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018a). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham: Springer International Publishing.

Borromeo Ferri, R. (2018b). Reflexionskompetenzen von Studierenden beim Lehren und Lernen mathematischer Modellierung. In R. Borromeo Ferri & W. Blum (Eds.), *Lehrerkompetenzen zum Unterrichten mathematischer Modellierung – Konzepte und Transfer* (pp. 3–20). Wiesbaden: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2019). Assessing Teaching Competencies for Mathematical Modelling. In Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherland (Chair), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408728

Borromeo Ferri, R. (2020). Make Mathematical Modeling Marvelous! – Follow Mr. K. For Your Lesson Tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher Journal*, *78*(1), 44–54.

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. In: European Society for Research in Mathematics Education (Eds.). Proceedings of CERME 6, Lyon, France, 2046-2055.

Borromeo Ferri, R., Grünewald, S. & Kaiser, G. (2013). Effekte kurzzeitiger Interventionen auf Modellierungsprozesse. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (pp. 41–56). Wiesbaden: Springer.

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (Eds.) (2018). *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Lehrerkompetenzen zum Unterrichten mathematischer Modellierung: Konzepte und Transfer*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Borromeo Ferri, R. & Meister, A. (2019). Aprendizagem efetiva em STEM com a abordagem de Ensino por Ligações Transversais – Fazer uma educação matemática interdisciplinar de sucesso! *Educação E Matemática*, *154*, 9–13.

Eilerts, K. & Skutella, K. (Eds.) (2018). *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5: Ein ISTRON-Band für die Grundschule*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Huincahue, J., Borromeo Ferri, R. & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelización matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza De Las Ciencias*, *36*(1), 99–115.

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education – examples and experiences. *Journal Für Mathematikdidaktik*, *31*(1-2), 51–76.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 357–383). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Klock H., Wess R., Greefrath G. & Siller, H-S. (2019). Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens bei (angehenden) Lehrkräften - Erfassung und Evaluation. In T. Leuders, E. Christophel, M. Hemmer, K. Korneck, & P. Labudde (Eds.), *Fachdidaktische Forschungen zur Lehrerbildung* (pp. 135–146). Münster: Waxmann.

Schukajlow, S. & Blum, W. (Eds.) (2018). *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Stender, P. (2016). *Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben.* Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (2003). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd. ed.). Thousand Oaks: Sage Publ.

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Beltz Pädagogik*. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Capítulo 2

Modelización y STEM. Una propuesta de intervención en la formación inicial de profesores de matemática y su validación en el sistema escolar de secundaria

María Aravena Díaz
Centro de Investigación en Educación Matemática, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

Este capítulo presenta una propuesta de intervención para la formación inicial de profesores de matemática enfocada en la modelización y STEM. Se discute la importancia de incorporar la modelización como puente para promover la integración de las disciplinas STEM, a través de procesos de modelamiento matemático, por la necesidad de formar a los futuros profesores en los nuevos desafíos que implica la escuela en el siglo XXI. Posteriormente, se desarrolla la propuesta de intervención, que tiene como base la teoría de la actividad, donde los futuros profesores fueron sometidos a tareas de modelamiento en contextos STEM, formulación de problemas auténticos, diseño e implementación de clases STEM en las aulas de secundaria y retroalimentación del proceso formativo. Finalmente, se presentan recomendaciones e implicaciones didácticas que muestran aciertos y dificultades en dicho proceso, así como la potencialidad del modelamiento como base para transitar entre las áreas STEM.
Palabras clave: Modelamiento matemático, formación de profesores en STEM, propuesta STEM

1. Introducción

En el capítulo se presenta una propuesta para la formación inicial de profesores de matemática centrada en Educación STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*), donde se ha considerado el modelamiento matemático como un puente de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, para ayudarles a transitar entre las habilidades STEM (Gilbert, Boulter & Elmer, 2000; Hallström & Schönborn, 2019) de tal manera de mejorar las prácticas tempranas y profesionales en el sistema educativo (Lingesfiard, 2011, Aravena et al., 2011; Servinc & Lesh, 2017). El propósito se centra en apoyar la formación inicial de profesores para que estén preparados para lidiar en estos nuevos escenarios y dar respuesta a los desafíos que trae consigo la escuela del Siglo XXI (Corfo y Fundación Chile, 2017; Scott, 2015; Kurup et al., 2019).

Las razones que están en la base de la propuesta, se fundamentan en que hoy más que nunca los avances de la sociedad giran en torno a la ciencia, la tecnología y la ingeniería apoyados por las herramientas analíticas de la matemática (Fadzil & Saat, 2014; Hallström & Schönborn, 2019), debido al acelerado progreso en el ámbito científico y tecnológico, donde las implicaciones de las matemáticas en las ciencias (e. g., simulaciones, visualización, representaciones) y avances tecnológicos (e. g., realidad aumentada, fabricación aditiva, *big data* y análisis) son cada vez más importantes, no solo para el progreso de la ciencia y la tecnología, sino también para ayudar a mejorar la calidad de vida de las personas (English, 2016).

Para dar respuesta a estos desafíos, se consideró abordar el desarrollo de habilidades STEM en los futuros profesores de matemática, como una vía importante para que sus alumnos logren una "auténtica alfabetización científica y tecnológica" (Hallström & Schönborn, 2019, p. 9; Sanders, 2009). La necesidad de desarrollar estas habilidades es un aspecto clave hoy día, ya que debemos preparar a los alumnos para la autosuficiencia, la incertidumbre y la proactividad, lo que les ayudará a reaccionar de manera estratégica a eventos o riesgos globales o locales (pandemias, olas epidémicas, enfermedades, crisis económicas, medioambientales o desastres naturales (Brynjolfsson & McAffe, 2014; Cook & Bush, 2018).

Tomando en consideración lo anteriormente expuesto, hay dos ideas centrales que me han llevado a generar esta propuesta de trabajo. La primera es que cada vez es más urgente que los estudiantes del sistema escolar puedan avanzar hacia una formación integrada de las disciplinas, para que logren comprender el rol de la matemática y de la actividad científica para la sociedad actual y futura, apoyados por las tecnologías como herramienta fundamental para una puesta al día de las matemáticas (Aravena et al., 2011); y la segunda es utilizar la modelización matemática como base de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en STEM (Li & Schoenfeld, 2019), pues se ha reportado en diversas investigaciones, que las acciones del modelamiento matemático han permitido el desarrollo de múltiples habilidades en la formación de los alumnos, en todos los niveles de enseñanza (Blum & Niss, 1991; Gómez, 2007; Greefrath & Vorhölter, 2016; Biembengut, 2016; Aravena, 2016; Sevinc & Lesh, 2018), destacándose, entre otras, desarrollo de la creatividad, análisis crítico, descubrimiento, capacidad investigativa, y capacidad comunicativa y argumentativa al proyectar los conocimientos con el mundo externo (Niss, 2010; Villa-Ochoa et al., 2017; Aravena, 2016).

Así también, el modelamiento matemático como base de STEM, se constituye en un campo natural de aplicación (Boyer, 2007; Biembengut, 2016; Hallström & Schönborn, 2019) en el desarrollo científico y tecnológico (nanotecnología, *big data* y análisis, fabricación aditiva, realidad aumentada), mediante la búsqueda de relaciones y su descripción a través del lenguaje matemático (Gómez, 2007; Hallström & Schönborn, 2019) y, cuando se acompaña del soporte tecnológico a través de representaciones, simulaciones, experimentaciones y visualizaciones de fenómenos (Lesh & Doerr, 2000; Sanders, 2009; Wang et al. 2011), proporciona una mayor comprensión de los conocimientos científicos (Greefrath 2011; Sanders, 2009), reconociendo al mismo tiempo los límites de la aplicación de los mismos (Lesh & Doerr, 2000; Sanders, 2009; Wang et al. 2011; Chiu & Lin, 2019).

Como se puede observar, la modelización para educación STEM se constituye en una vía importante como apoyo al aprendizaje de los estudiantes, en todos los niveles de formación, para que puedan desarrollar habilidades que atraviesan las disciplinas. Para ello, es esencial preparar a los futuros profesores de matemática, ciencia o tecnología para la integración STEM, puesto que son el vehículo para implementar una formación acorde a las necesidades actuales, acercando problemas auténticos del mundo real a las aulas, ya que los problemas del mundo real son complejos y requieren de articulaciones disciplinarias para su resolución (Sanders, 2009).

La propuesta de trabajo la he dividido en 4 apartados.

En el primero se presenta el programa de intervención, que considera un estudio del contexto escolar como elemento clave para diseñar los tipos de problemas en contextos auténticos y cercanos a la realidad de los alumnos, puesto que se ha demostrado que de esta manera se favorece la interrelación de las disciplinas con enfoque STEM (Wang et al., 2011) y atiende a la diversidad otorgando igualdad de oportunidades en el aprendizaje de los estudiantes (Leont´ev, 1987; Jorba y Sanmartí, 1996, Orey & Rosa, 2018).

El segundo apartado se enfoca en el diseño de la propuesta de intervención, que comprende cuatro etapas: 1) implementación de tareas de modelamiento para analizar el perfil inicial de los futuros profesores, lo que ayuda a regular las debilidades y obstáculos antes de que inicien el diseño de la secuencia de aula; 2) elaboración de la secuencia, donde los futuros profesores trabajan colaborativamente en el proceso de diseño de clases STEM (Castro-Félix & Daniels, 2018), que comprende: formulación y reformulación de problemas de modelamiento en contextos auténticos relacionados con los aspectos culturales, ambientales y sociales propios de la región (Rosa & Orey, 2011; Orey & Rosa, 2018); y desarrollo de posibles soluciones de cada uno de los problemas utilizando las diferentes etapas del ciclo de modelamiento; 3) selección de un modelo de enseñanza para el aula y estrategias de intervención; y 4) estrategias de implementación y gestión en el aula, enfocada a potenciar el trabajo colaborativo con los estudiantes del sistema escolar.

El tercer apartado se centra en el análisis de la intervención en el aula, como elemento clave para la retroalimentación del proceso en prácticas STEM, donde se valora la calidad de la gestión de aula, las estrategias utilizadas con los alumnos para la profundización y ampliación de los conocimientos de estas disciplinas, las aplicaciones en contextos STEM culturalmente relevantes y el análisis de las habilidades desarrolladas durante la puesta en práctica en las aulas. Se analizan también estrategias de intervención sobre el apoyo a la diversidad en el aula para fomentar el interés del alumnado por las áreas STEM (Kitchen, Sonnert & Sadler, 2018; Kurup et al., 2019).

El cuarto apartado hace referencia a la importancia de la evaluación de los aprendizajes en el proceso formativo; allí presento una rúbrica y pauta de evaluación que permite regular y autorregular el proceso formativo de los futuros profesores en el desarrollo de sus habilidades.

Finalmente, agrego algunas conclusiones y recomendaciones que pueden servir de apoyo para posibles intervenciones en contextos similares.

2. Programa de intervención para la formación de profesores de matemática

La propuesta de intervención emerge como una innovación, en el contexto de la formación inicial de profesores de matemática, donde se consideró el modelo constructivista que tiene como base la teoría de la actividad, debido a que el aprendizaje ocurre en un contexto social, con situaciones auténticas que favorece la interrelación de las disciplinas con enfoque STEM (Ritz & Fan, 2015) y atiende a la diversidad otorgando igualdad de oportunidades en el aprendizaje de los estudiantes (Leont´ev, 1978; Jorba y Sanmartí, 1996). Además, esta propuesta ayuda a estructurar el proceso formativo en diferentes etapas secuenciales y proporciona un lente para analizar y retroalimentar el proceso de diseño e implementación (Clough, Berg & Olson, 2009). En la figura 1 se muestra el sistema global de la propuesta de intervención que incorpora: contexto sociocultural escolar; estructuración de la secuencia de aula y dinámica del sistema en la implementación, que permite validar la propuesta teórica de problemas STEM y modelamiento matemático en las aulas de secundaria para su posterior análisis, reflexión y retroalimentación de los futuros docentes

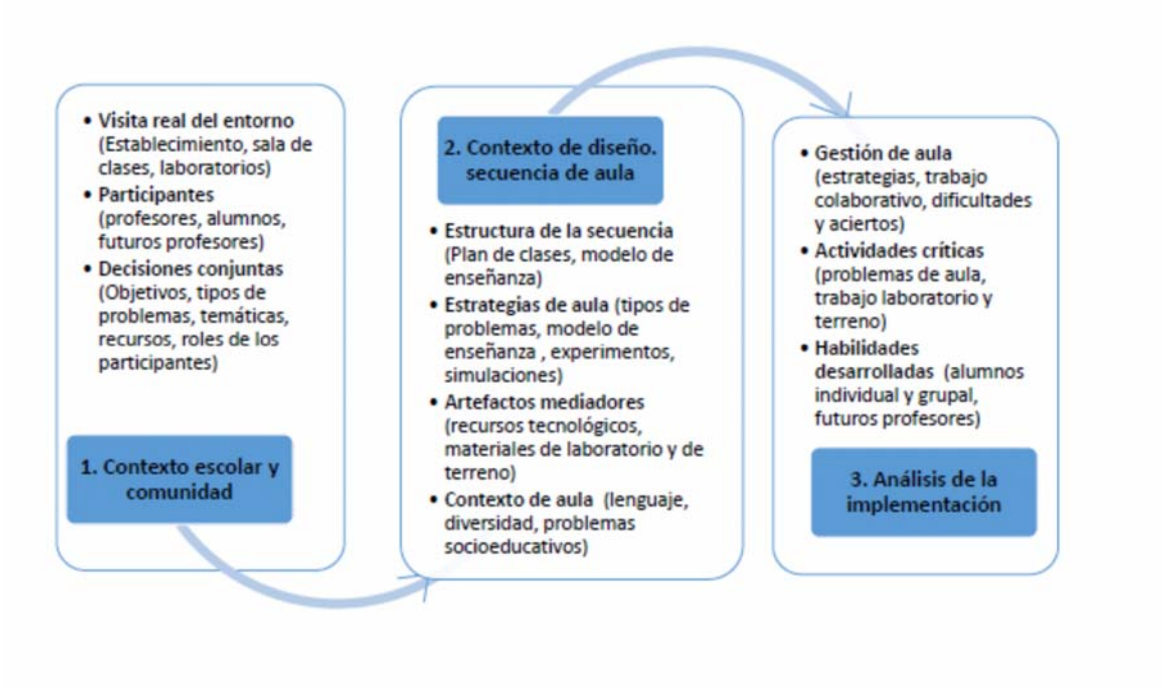


Fig. 1: Sistema Global de la propuesta de intervención

Contexto escolar y comunidad.

La participación de los futuros profesores en propuestas de intervención debe considerar la planificación de clases con enfoque STEM para centros educativos concretos; por ello, se debe realizar un estudio del contexto escolar, para reconocer el entorno sociocultural de los alumnos, con el propósito de que la intervención se ajuste a las necesidades del sistema educativo. Además, considerar los componentes de la actividad como son: alumnos, profesores, artefactos y recursos en los establecimientos, para enfocar la intervención en los contextos en cuales se actúa. En el caso de esta experiencia, que duró un semestre incluyendo la implementación en las aulas y el análisis del proceso formativo, el equipo docente y los grupos de futuros profesores asistieron a los centros escolares para reconocer el contexto de los alumnos; las concepciones que subyacen en los profesores en ejercicio; los tipos de problemas susceptibles de trabajar y las posibilidades de experimentación en terreno.

Estructura del proceso formativo. Contexto de diseño y gestión

El proceso de aprendizaje STEM de los futuros profesores debe ser un proceso constructivo (Allen, Webb & Matthews, 2016), que se caracterice por los significados asociados a las tareas de modelamiento en contextos STEM, donde el contexto social en el que se desarrollará es fundamental para generar las actividades de modelamiento (Muñoz et al., 2014). El enfoque, para estrechar vínculos con los medios escolares, debe ser profundizar los conocimientos de los futuros profesores, desarrollar las habilidades STEM con problemas auténticos de modelamiento y prepararlos en el diseño de problemas para promover experiencias de aprendizaje sin perder de vista el entorno sociocultural de los estudiantes (Kaiser & Schwarz, 2010; Villa-Ochoa, Bustamante y Berrio, 2010; Rosa & Orey, 2013; Muñoz, et al., 2014). En la implementación de esta experiencia formativa se diseñaron 4 etapas que corresponden a:

Etapa 1. Implementación de tareas de modelamiento en futuros profesores

Antes de introducir a los futuros profesores en el diseño de una propuesta de intervención en el aula, es muy importante evaluar su perfil inicial de las habilidades STEM en tareas de modelamiento. Para ello se deben diseñar instrumentos tipo prueba con el propósito de regular y autorregular las dificultades y obstáculos para enfrentar la segunda etapa. En el experimento, se diseñaron 3 problemas de modelamiento con enfoque STEM que fueron trabajados por los futuros profesores lo que permitió realizar una evaluación inicial y establecer las mejoras necesarias para la etapa de diseño. En el caso de los contenidos asociados a los problemas se tomó de referencia las recomendaciones de Vorhölter, Krüger & Wendt (2019), quien evidencia que las tareas de modelamiento con problemas auténticos son complejas, debido a que no se proporcionan conocimientos STEM a utilizar por parte de los estudiantes, por lo que en el diseño de instrumentos de evaluación y capacitación se articularon los conocimientos que habían sido trabajados durante sus años de formación hasta tercer año de estudios universitarios. En la figura 2, se presenta uno de los problemas que se implementó, de manera individual, en un laboratorio de computación organizado para trabajar en línea.

Cabe destacar que este problema fue abordado por Kepler y Cardano. Ambos estudiaron el problema de estimación del volumen de los toneles. En el caso de Kepler se dice que este problema lo inspiró a escribir su obra *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* [Nueva estereometría de los toneles de vino] en 1615 (Nieves y Mejía, 2004).

Contexto del problema

El problema que se presenta en la Figura 2, es de contexto real en la Región del Maule, como una de las mayores productoras de vino del país, donde pequeños agricultores almacenan sus vinos en este tipo de barricas o también en barricas de greda. Los grandes viñedos en la actualidad poseen toneles de acero inoxidable, problema que fue trabajado para analizar el perfil de progreso respecto de las habilidades STEM, al final de la experiencia. La tarea consistió en modelar el volumen de las barricas, realizar representaciones y simulaciones con diferentes medidas, y explicar la construcción de éstas para presentar una propuesta a los agricultores de la región. Las habilidades involucradas corresponden a: habilidades matemáticas, como: modelar, representar, comunicar y argumentar; habilidades científicas, como exploración mediante el cálculo de diferentes unidades de volumen y estudio de las condiciones del vino en contacto con la madera y utilización de lenguaje científico; y habilidades tecnológicas, como: diseñar en 3D, simular y representar utilizando algún software y planillas Excel para ingresar datos.

Barricas del Valle del Maule

La Región del Maule es la de mayor producción vinícola de Chile. Actualmente posee una superficie de tres millones de hectáreas y está conformado por las provincias de Talca, Linares y Cauquenes. Las barricas son muy conocidas, desde décadas, en la Región del Maule. Los viticultores las utilizan para almacenar vinos y son construidas con madera de roble. Estas existían en la Mesopotamia, pero con madera de palma que era más difícil su construcción. Fueron los romanos en sus conquistas que descubrieron que los galos utilizaban barricas de madera de roble para almacenar cerveza, la que copiaron para transportar el vino, dejando de lado las ánforas de arcilla. Descubren además que el vino mejoraba su condición en contacto con la madera. En la actualidad también se usan como decoración

Una barrica está formada por duelas que se abomban y unen con aros de hierro para formar un cilindro convexo (Fig. 3) cerrándose ambos extremos con tapas circulares. Al medio se le deja un hueco para su llenado o rellenado, operaciones que se realizan tras extraer el 'espiche' (tapón del tonel que puede ser de madera, vidrio, barro, o silicona)

Fig.3. Foto de barricas

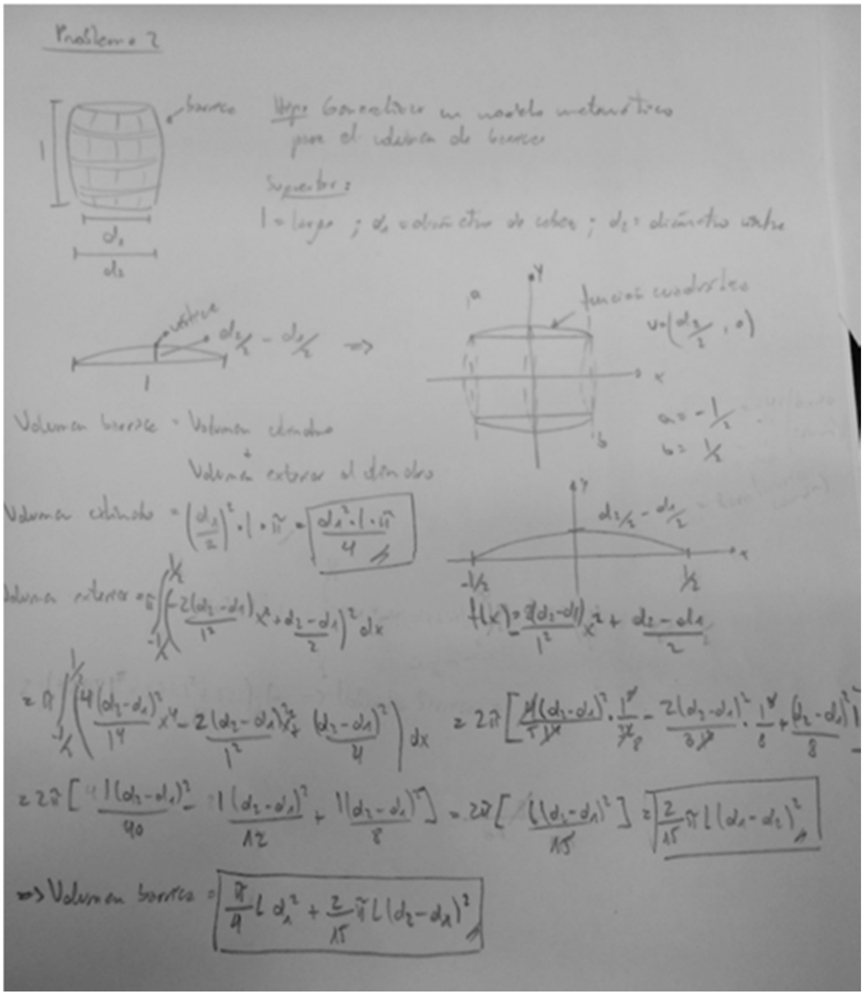
(Problema formulado a partir de la información de: https://vinedosazteca.com/origen-e-historia-de-las-barricas-de-roble/)

Fig. 2: Tarea de modelamiento desarrollada por un alumno en la etapa inicial

En la Figura 3, se muestra una secuencia de trabajo realizada por un alumno donde se observa la forma en que el alumno se enfrentó al problema. Para la descripción y análisis de la producción se utilizó el ciclo de modelamiento propuesto por Maaß, (2006), que explico en detalle más adelante. El problema presentó dificultades en su resolución, a pesar que está dentro de las producciones de alto logro en esta etapa, debido a que la mayoría solo realizó algunos bosquejos del barril identificándolo con el cilindro, pero no identifican condiciones y restricciones iniciales para describir un modelo real y poder emprender el camino hacia la matematización. Una de las mayores dificultades dice relación con el ciclo de modelamiento, ya que la mayor parte del trabajo se centra en procesos de trabajo matemático para encontrar la solución, pero los futuros profesores se olvidan de la validación o utilizan solo validaciones parciales, sin considerar las condiciones y restricciones iniciales (Aravena, 2016). Este enfoque podría ser producto de lo planteado por Sevinc & Lesh (2018), cuando manifiesta que los métodos de resolución con que han aprendido ejercen una fuerte influencia en su formación.

Sobre la validación del modelo, que ha formulado, hay dificultades al no poder validar, con los distintos valores que se habían sugerido, lo cual concuerda con investigaciones sobre la dificultad de esta fase del ciclo en los distintos niveles de formación (Blum & Borromeo, 2009). El futuro profesor no realiza ninguna generalización, así como tampoco identifica fortalezas y limitaciones que son necesarias para la construcción de las diferentes barricas. Investigaciones reportan que esta fase del ciclo presenta complejidades en los alumnos, debido a que es poco trabajada en todos los niveles de formación (Aravena, 2016). En las representaciones no hace uso de software, y sobre las habilidades científicas, no las considera en su resolución.

Fig. 3: Producción de un alumno en el proceso de modelamiento



Retroalimentación del proceso y estudio de ciclos de modelamiento

A partir de la revisión de las tareas de modelamiento de los futuros profesores, se generó una retroalimentación para superar las debilidades que manifestaron en la resolución de problemas para enfrentar la segunda etapa. Para ello, se realiza un estudio de elementos teóricos sobre ciclos de modelamiento, donde analizan ejemplos de investigaciones, para rehacer los problemas que fueron desarrollados en esta etapa.

Para emprender tareas de modelamiento es necesario que los formadores de formadores tengan en consideración el significado de modelo matemático y ciclos de modelamiento para usar y crear un modelo matemático en el contexto educativo (Blum & Niss, 1991; Maaß, 2006; Blum & Borromeo, 2009). En esta experiencia se analizó, con los futuros profesores, la idea de modelo matemático que subyace en sus concepciones, detectándose diferentes confusiones y dificultades en el proceso. Por tanto, se analizó la definición de Niss (1987), quien hace referencia que, para modelar una situación, debe existir una correspondencia que permita generar una interacción entre un problema real y el mundo matemático, tal correspondencia permite que los objetos y relaciones del problema real estén relacionados con objetos y relaciones matemáticas. Con mayor precisión (como se cita Blum & Niss, 1991) plantea que "*a mathematical model can be viewed as a triple (S, M, R), consisting of some real problem situation S, some collection M of mathematical entities and some relation R by which objects and relations of S are related to objects and relations of M"* [un modelo matemático puede verse como un triple (S, M, R), que consiste en alguna situación de problema real S, alguna colección M de entidades matemáticas y alguna relación R por la cual los objetos y relaciones de S son relacionados con objetos y relaciones de M] (p.39). Pero hay que tener en consideración que los problemas de la realidad son complejos, y que los modelos matemáticos son solo representaciones simplificadas de la realidad observada mediante métodos matemáticos (Blum & Niss, 1991). Se estudian ciclos de modelamiento seleccionando el propuesto por Maaß (2006), para la etapa de diseño de las actividades de aula, que ayude a regular las etapas del proceso de modelamiento en la implementación con los estudiantes de secundaria. Detallo en términos generales el ciclo de modelamiento propuesto por Maaß (2006), para lo cual me apoyaré en la Figura 4, tomando el esquema que he traducido de la autora para explicar las diferentes etapas del ciclo. Distingue entre realidad y matemáticas, así como otros autores que han descrito ciclos de modelamiento (Blum & Niss, 1991; Blum & Borromeo, 2009). Cabe destacar que hay algunas controversias con separar la realidad de las matemáticas, pues las matemáticas también son parte de la realidad, pero considero que la entrada al mundo matemático es para identificar los procesos y métodos propiamente matemáticos, sin perder de vista la realidad ya que el ciclo de modelamiento no es un proceso lineal.

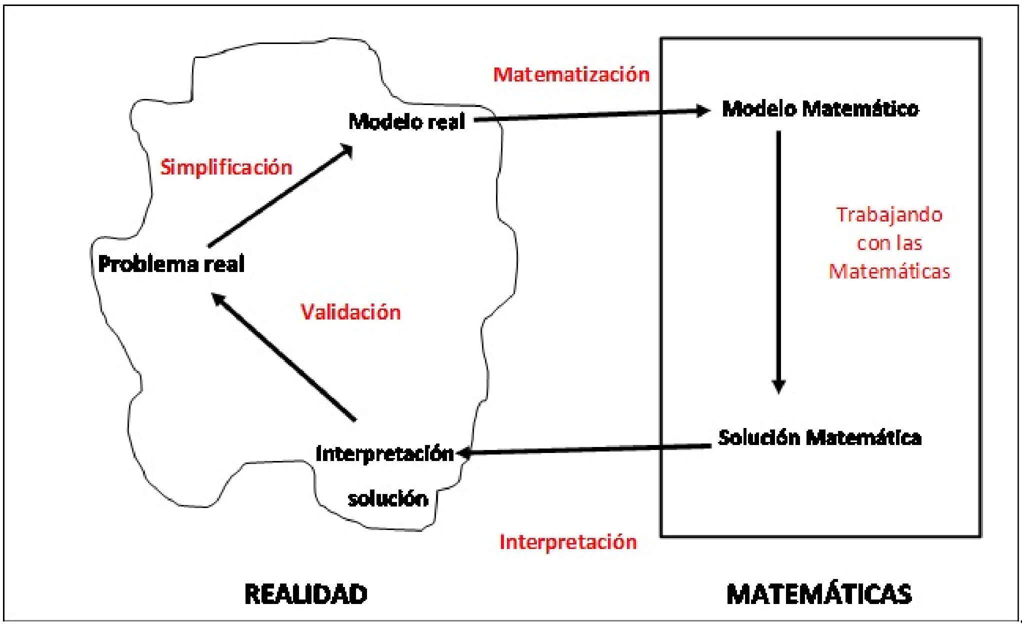


Fig. 4: Ciclo de modelamiento matemático traducido de Maaß (2006, p. 115)

En la realidad tenemos el problema real, el cual requiere ser simplificado, esto es, requiere ser estructurado e idealizado para obtener un modelo real, que prepara el camino hacia la matematización. Por ello, la idealización es de suma relevancia, pues no es posible transferir completamente la realidad a un modelo matemático, sino solo una parte de ella (Niss, 2010).

La entrada a las matemáticas se produce mediante la matematización del modelo real, que conduce a la formulación del modelo matemático, es decir, a uno elaborado a partir de las relaciones matemáticas que interpretan el modelo real. En el trabajo con las matemáticas es donde se requiere la activación, por parte de los alumnos, de diversas habilidades para la aplicación de métodos, propiedades, teoremas, algoritmos, que los conducen a una o más soluciones del problema (Blum & Niss, 1991). La salida de las matemáticas y entrada a la realidad se produce mediante la interpretación. Así, en la interpretación de las soluciones, el análisis se centra en el contexto del problema real. En la etapa de validación del modelo, se justifica su validez, la cual puede realizarse a través de simulaciones computacionales o utilizando aproximaciones numéricas, considerando márgenes de error, reestudio de los resultados numéricos, estimaciones en términos del problema real.

Finalmente, hemos considerado el análisis y proyección del modelo (Gómez, 2007; Aravena, 2016) lo que no ha sido explicitado por Maaß (2006) al describir el ciclo, pero sí evidenciado en la interpretación de la solución, en las posibilidades de generalización del modelo. Esta etapa es importante en el proceso de modelamiento, pues requiere el análisis de las fortalezas y limitaciones del modelo, en vista de la posibilidad de generalización para situaciones similares (Gómez, 2007).

En el estudio de los ciclos de modelamiento se incorporan además como centrales las habilidades de representación, comunicación y argumentación matemática, pues resultan de interés para la formación de los alumnos. Además, se generan espacios de reflexión y comunicación para fomentar la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos y métodos de resolución y, en definitiva, el desarrollo del pensamiento reflexivo (Aravena, 2016).

Etapa II. Elaboración de la secuencia de aula

En el diseño de la secuencia didáctica se tomó como referencia el modelo de plan de clases japonés (Isoda, Arcavi y Mena-Lorca, 2012) mediante una adaptación para el estudio de las habilidades STEM en procesos de modelamiento. Desde el punto de vista metodológico, el modelo considera como esencial el desarrollo del pensamiento, donde los conceptos y procesos se van construyendo sobre la base de discusión de los propios alumnos (Aravena, et al., 2011).

Para el diseño de las unidades, los diferentes grupos de trabajo realizaron un proceso de investigación consistente en: 1) estudio de los programas del sistema escolar para articular los conocimientos descritos en el currículo, en la formulación de problemas relacionados con los ámbitos científicos, sociales y culturales de la región; 2) selección de un modelo para trabajar el ciclo de modelamiento, fruto de lo cual acordaron utilizar el modelo de Maaß (2006), que se detalla en la retroalimentación de procesos de modelamiento (Etapa 1); 3) estudio de softwares para simulaciones y representaciones, donde analizan fortalezas y debilidades; 4) análisis de las habilidades STEM de acuerdo a lineamientos teóricos; y 5) selección de un modelo de enseñanza que estuviese en relación con los tipos de problemas, el enfoque de los mismos y el contexto de los alumnos del sistema escolar.

Para los tipos de problemas diseñados por los grupos, se consideró el contexto de la Región del Maule, debido a que es una zona eminentemente silvo-agropecuaria y forestal (en progresión). Así, los problemas están en estrecha relación con el modelo planteado y con la realidad de los estudiantes (agricultura, agroecología, sistemas de riego, energía sustentable y construcción). De igual forma que en los problemas implementados a los futuros docentes, se tomaron en consideración las recomendaciones de Vorhölter, Krüger & Wendt (2019), articulando conocimientos adquiridos por los alumnos en sus años de estudio, correspondientes a geometría, álgebra, funciones y números.

Ejemplo de un extracto de la secuencia de aula diseñada por los grupos de trabajo

Se presenta una secuencia de trabajo que fue consensuada por los grupos para las diferentes áreas, sin perder de vista las características propias de los problemas y de los niveles del sistema escolar en los cuales implementaron la propuesta (primero y tercero medio). Para ello, generaron ciclos de aprendizaje de tal manera que los alumnos de secundaria no solo resolvieran problemas, sino que además afianzaran conocimientos adquiridos, estructuraran dicho conocimiento y aplicaran a situaciones similares.

A continuación, muestro la producción de los grupos sobre el modelo de enseñanza de aula con cada una de las fases del ciclo de aprendizaje y las correspondientes habilidades a evaluar:

Habilidades matemáticas:

- Explorar la situación, formulándola desde sus propios puntos de vista para una visión global del fenómeno a estudiar (simplificación, modelo real, restricciones y condiciones, fragmentación)
- Confrontar el fenómeno y representarlo en distintos lenguajes (matematización, trabajando con las matemáticas, formulación del modelo)
- Reconocer que el fenómeno funciona bajos ciertas condiciones (soluciones, interpretación y validación)
- Transferir aprendizajes a otras situaciones en contextos similares (generalización, fortalezas y debilidades del modelo, simulaciones y experimentaciones)

En la Figura 5, se observa la descripción de cada fase en el ciclo de aprendizaje que fue consolidado por los grupos de trabajo.

Fig. 5: Ciclo de aprendizaje que incorpora fases de aprendizaje y habilidades STEM a desarrollar en los estudiantes de secundaria (adaptado de Jorba y Sanmartí, 1996)

Habilidades tecnológicas: selección y uso de medio tecnológicos mediante la visualización y análisis de representaciones, uso de modelos gráficos y analíticos; diseño; simulaciones y comunicación a través de objetos tecnológicos.

Habilidades científicas: capacidad investigativa, mediante el levantamiento de preguntas de investigación e hipótesis; estudio de factores medioambientales, ecosistemas, agroecología y comunicación mediante lenguaje científico.

Ejemplo de Diseño de actividades de aula

En la figura 6, se presenta uno de los problemas implementado en Primero medio. El contexto del problema hace referencia a invernaderos, que son muy usados en la región para producir hortalizas fuera de temporada, porque les permite a los pequeños agricultores aumentar el rendimiento y mejorar la calidad de los cultivos, lo que al aire libre no sería posible producir dadas las bajas temperaturas que existen en la Región del Maule durante el invierno. Se describen varias estructuras y alternativas de cubiertas, tales como plástico, vidrio, policarbonato, u otros materiales para su construcción. Las habilidades a evaluar fueron: diseñar un tipo de invernadero, modelar la cantidad de metros cuadrados que se necesitan para cubrirlo, iniciar procesos investigativos relacionados con las ventajas y desventajas de los materiales para su cubrimiento, y utilizar objetos tecnológicos para presentar los resultados de su trabajo con las ideas más importantes del proceso de modelización.

Situación 1. "Construcción de invernaderos"

Los invernaderos son una herramienta muy útil para producir hortalizas fuera de temporada, consiguiendo mayor precocidad, dado que se acortan los ciclos vegetativos de las plantas. También permite aumentar los rendimientos y mejorar la calidad de los cultivos mediante una atmósfera interior artificial y controlada, en circunstancias en que dichas especies al aire libre no serían posibles dadas las bajas temperaturas del medio externo.

Existen variados tipos de estructuras para la construcción de un invernadero (capilla, como se observa en la figura 1., túnel, entre otros), y diversos materiales para su construcción, tales como: metal, madera, PVC, hormigón, etc. Por otra parte, también existen variadas alternativas para la cubierta, pudiendo ser de plástico polietileno, vidrio, policarbonato, y otros.

Figura 1. Invernadero tipo capilla

Fig. 6: Problema implementado en el aula a estudiantes de Primero Medio

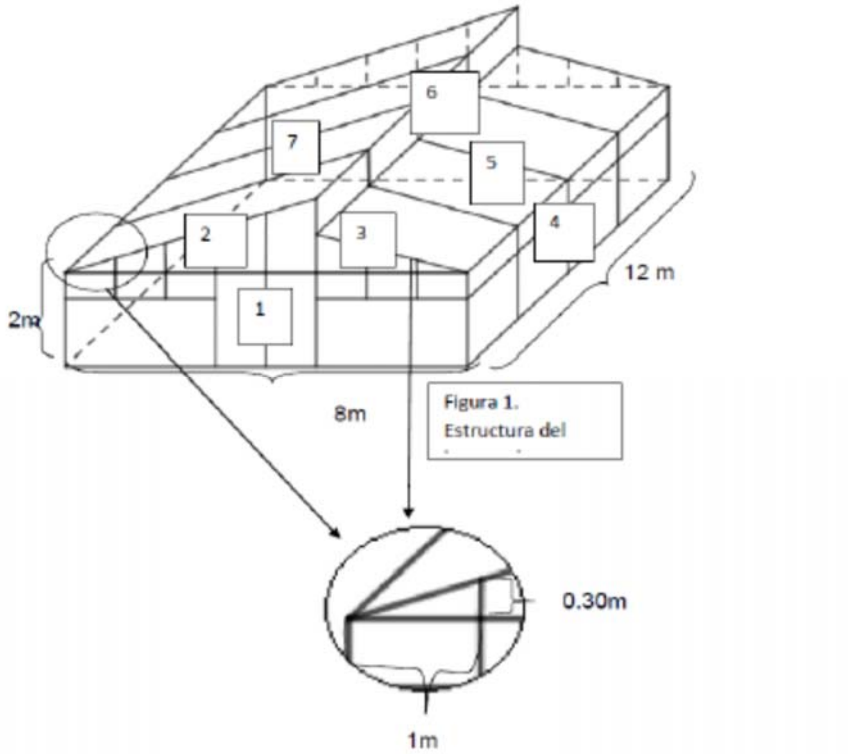


Fig. 7: Estructura del invernadero para modelar la cantidad de material para su cubrimiento

Etapa III. Implementación y gestión

Esta etapa está enfocada a validar la propuesta teórica en el aula, para evaluar las habilidades STEM que desarrollan los futuros profesores en su gestión. También permite analizar la integración STEM para retroalimentar el proceso, reflexionar sobre la práctica y reconocer aciertos o dificultades en dicha intervención. En esta etapa los docentes trabajaron con los alumnos de secundaria la resolución de problemas, diseños utilizando software, simulaciones de plantaciones en terreno, experimentos científicos y tecnológicos. Se presenta, como ejemplo, una secuencia de actividades desarrolladas durante la implementación con los alumnos del sistema escolar.

Actividad 1. Trabajo de clases

La actividad está relacionada con los sistemas de riego tecnificados que se utilizan hoy en la agricultura, donde los estudiantes del sistema escolar debían encontrar un modelo matemático, para determinar la cantidad de pivotes centrales que se necesitan para ser instalados en un terreno de cualquier dimensión. Para ello cuentan con una fotografía digital como material de apoyo en el proceso de modelamiento y generalización de dicho modelo. En las habilidades tecnológicas deben usar el software GeoGebra, para presentar un bosquejo sobre el sistema de riego, en las habilidades científicas debían investigar las condiciones agroecológicas que mejoran dichos sistemas de riego mediante técnicas eficientes y levantar una investigación sobre la importancia del riego en la agricultura. En la figura 8, se observa el problema trabajado con algunas soluciones presentadas en forma de manuscrito.

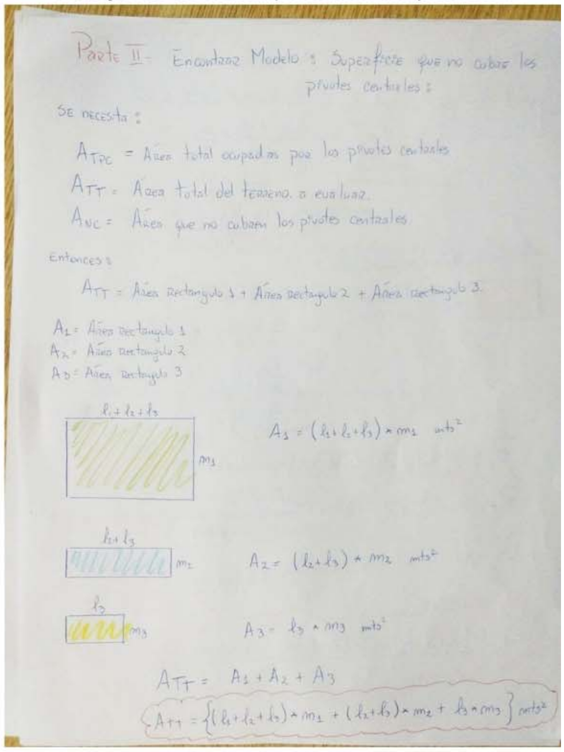
La Revolución Circular del Riego

El concepto básico del pivote central consiste en llevar el agua de riego hasta los cultivos mediante una tubería metálica, generalmente de acero galvanizado o aluminio, la que es montada sobre torres de metal que se mueven sobre conjuntos de ruedas, de modo que el pivote gira en círculos (solo en círculos) manteniendo uno de sus extremos fijos en el centro del campo. A todo lo largo de la tubería cuelgan aspersores, distribuidos de acuerdo con los requerimientos, cuyas cabezas de riego pueden ser ubicadas a distancias variables del suelo.

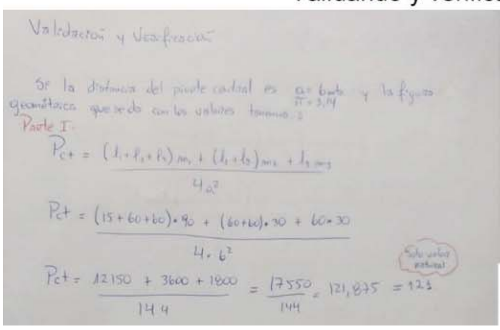
La municipalidad de Pencahue está evaluando un proyecto para el liceo técnico profesional de Pencahue. Este proyecto está basado en colocar pivotes centrales de cualquier distancia (Figura 1: Zona de riego que cubre el pivote central), en dicho establecimiento, para esto se tiene el mapa satelital del terreno:

1. Encuentra un modelo matemático para determinar la cantidad de pivotes centrales que deben ser instalados en el terreno.
2. Utilizando Geogebra presenta un diseño de sistema de riego para la superficie del terreno. Utiliza las medidas entregadas en la imagen. Especifica cuántos pivotes centrales ocuparían ¿Es posible generalizar el modelo a otros tipos de superficies?
3. ¿Qué condiciones agroecológicas mejoran al utilizar esta tecnificación? Formula una posible investigación y una hipótesis para investigar sobre la importancia del riego en los cultivos.

Trabajando con la simplificación del problema



Validando y verificando el modelo



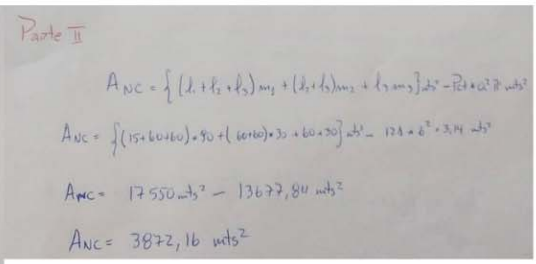


Fig. 8: Modelando pivotes centrales en Tercero Medio

Actividad 2. Trabajo en terreno

1) **Simulaciones en terreno. Contando Pasos con el acelerómetro**

La actividad se implementó con alumnos de primer año de educación media. Fue trabajada por los futuros profesores y diseñada con el apoyo de la Ingeniera Electrónica Dra. Mary Carmen Jarur, quien dirigió la actividad en conjunto con los futuros profesores. El objetivo fue visibilizar el aporte de las mujeres en el ámbito de la ingeniería para motivar a las jóvenes en áreas STEM. La idea base es que los alumnos tomen conciencia que los avances tecnológicos deben estar al servicio de las personas. Las actividades se centraron en los acelerómetros, de los cuales visualizan, en tiempo real, la señal en sus celulares. Para ello, registran y modelan la aceleración en condiciones de inclinación. Se realizan 3 experiencias que son:

Primera experiencia: identificar un punto de referencia del celular y medir la aceleración de gravedad (g = 9.8 m/s), visualizar la aceleración y su dirección. Hacer los registros en la Tabla 1.
Segunda experiencia: contar pasos con los registros del acelerómetro y reconocer el comportamiento gráfico de su señal mientras se realiza una marcha.
Tercera experiencia. Medir inclinación mediante el uso del acelerómetro.
Se cierran las actividades con las conclusiones finales, desafiando a los estudiantes y motivando el aprendizaje del pensamiento algorítmico, la programación de celulares y microcontroladores (Arduino por dar un ejemplo: https://www.arduino.cc/). Se presentan las tres experiencias trabajadas por el alumnado de primero medio.

Experiencia 1. Trabajando con el acelerómetro

Se identifican un punto de referencia del celular (ver figura 1) y luego se registra el valor de la aceleración en los 3 ejes (X, Y, Z), dejando el celular completamente quieto.
Se define un punto de referencia en la parte frontal del celular, por ejemplo, esquina superior derecha, y luego se ubica el celular en las diversas posiciones indicadas (Pos) de la tabla, utilizando la mesa (plano horizontal) y un muro (plano vertical).
Se abre la aplicación Sensor Kinetic, y se visualizan los registros numéricos del acelerómetro en sus 3 ejes (X, Y, Z). Se registra, en la Tabla 1, los valores de cada eje, según la posición indicada (Pos). Se puede agregar algunos casos extras.

Posición	X m/s^2	Y m/s^2	Z m/s^2	Representación gráfica
(1)				sobre la mesa horizontal
(2)				sobre la mesa vertical, apoyado en el muro
(3)				horizontal apoyado en un muro
(4)				invertir posición (1)
(5)				investir posición (2)
(6)				investir posición (3)

Tabla 1: Registro de datos

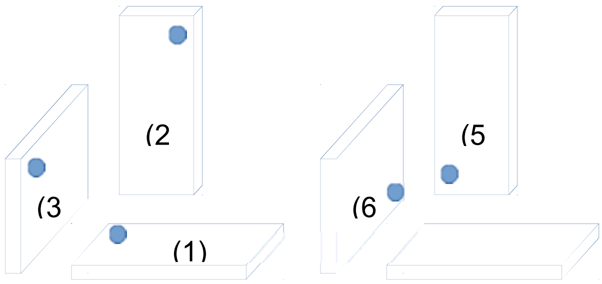


Fig. 9: Diversos esquemas de posiciones del celular

Realice al reverso un esquema de su celular y los 3 ejes del acelerómetro.

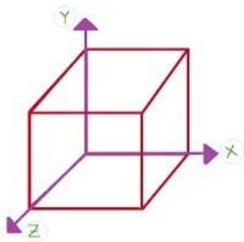


Fig. 10: Alumnos realizando la simulación con sus celulares

Cabe destacar que hay muchas aplicaciones similares al Sensor Kinetic y como referencia se puede visitar:
https://play.google.com/store/apps/developer?id=INNOVENTIONS,+Inc.&hl=es_UY

<u>Experiencia 2. Contando Pasos con el acelerómetro</u>

En esta actividad se utiliza la visualización en tiempo real de la señal del acelerómetro. Ubique el celular en un segmento o articulación del cuerpo de un compañero o compañera; por ejemplo, en su tronco, o cadera. Luego su compañero iniciará una marcha (caminar) con una cantidad conocida de pasos.

Detenga el registro y visualice la señal. ¿Es posible identificar la cantidad de pasos que su compañera realizó? ¿Qué representan el eje vertical y el eje horizontal de la gráfica, respectivamente?

<u>Experiencia 3. Midiendo ángulos con el acelerómetro</u>

Utilizando el material entregado (maqueta con ángulos), ubique el celular en los diversos ángulos que se indican, y utilizando el registro numérico del sensor, se anotan los valores en la tabla (X, Y, Z).

Luego calcule la última columna de la tabla, utilizando la calculadora del celular en modo extendido.

Ángulo	X m/s^2	Y m/s^2	Z m/s^2	$\tan^{-1}(X/Y)$

Tabla 2: Registro de datos

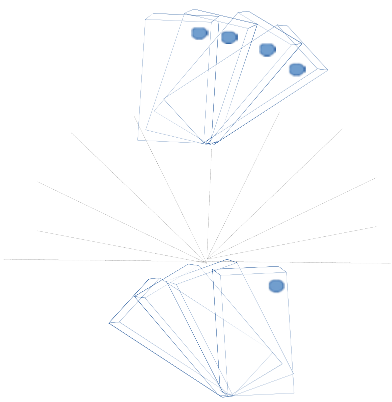


Fig. 11. Esquema de registro de aceleración en condiciones de inclinación

Recuerde mover el celular a muy baja velocidad (suavemente), dejarlo fijo y luego registrar los valores X, Y, Z.
Compare la primera y la última columna. ¿Es posible medir ángulos utilizando el acelerómetro?

Fig. 12: Alumnos mediando ángulos con sus celulares

2) **Experimentación en terreno. Plantaciones**

Para la simulación en terreno los futuros profesores diseñaron y planificaron las actividades del día en tres momentos:

Momento 1. Trabajo teórico sobre plantaciones y regadío. Se invitó al Dr. Sergio Espinoza, investigador en el área, para dar una charla sobre la importancia de los ecosistemas y de los sistemas de regadío para el equilibrio del medio ambiente. Incentiva a los alumnos a conjeturar y argumentar sobre cómo serán las plantas y árboles en el futuro (2040 o 2080), como producto de la escasez de agua. Para ello les presenta una secuencia de imágenes sobre la forma de plantas y árboles para que visualicen y argumenten sus respuestas (Figura 13).

Fig. 13: Trabajo cientifico de visualización sobre la biomasa aérea

Momento 2. Para modelar la situación, el científico envía una base de datos que ha obtenido en sus experimentos, para que los alumnos modelen con datos reales. Los futuros profesores organizan los grupos de trabajo para iniciar el proceso de modelamiento y de manera autónoma; los estudiantes ingresan el conjunto de datos en planillas Excel, realizando aproximaciones para formular el modelo matemático, el cual fue discutido con todo el grupo de la clase.

Fig. 14: Etapa de modelización y discusión en el grupo curso

Momento 3. Trabajo en terreno sobre simulación de una plantación de frutas, para modelar y presentar una propuesta a los agricultores sobre la cantidad de plantas que se necesita en distintas hectáreas. En este problema, de solución abierta, se consideran las hileras, separaciones entre las plantas, tipos de plantas y la cantidad de hectáreas. Para la plantación se utilizan lienzas y estacas; los grupos seleccionan una porción de terreno rectangular y deben incrustar distintas estacas para simular la plantación. En la Figura 15 se puede observar el rectángulo seleccionado por un grupo para iniciar la plantación; luego miden para tomar datos e iniciar el proceso de modelización, que debe ser entregado mediante un informe escrito y defender en una exposición oral

Fig. 15: Alumnos en terreno simulando una plantación a escala

Etapa IV. Resultados de la gestión de aula

En esta etapa los futuros docentes diseñan un informe escrito y la presentación oral para la defensa de su proyecto pedagógico. El énfasis está puesto en las habilidades desarrolladas por los alumnos del sistema escolar, mediante un análisis cuantitativo utilizando la base de datos SPSS o el programa R de código fuente abierto. Finalmente, para verificar el progreso de los futuros profesores, se implementó en instrumento tipo prueba (postest) de características similares a la prueba inicial (pretest) que se detalló en la etapa 1, en el cual se analizan las habilidades desarrolladas al final de la experiencia.

Ejemplo de un problema implementado a los futuros profesores al final de la experiencia

El problema trata sobre la diversificación de las exportaciones de vino que han llevado consigo cambiar las técnicas tradicionales de almacenamiento, desde las hermosas barricas de roble a los tanques cilíndricos de acero inoxidable. Su uso en enología tiene muchas ventajas, tales como: material hermético, inalterable y con unas elevadas condiciones de limpieza e higiene. Teniendo en consideración que existen diferentes tamaños, formas y posiciones, debían encontrar un modelo que describiera el volumen del tanque para diferentes capacidades, y generalizar su construcción utilizando objetos tecnológicos.

SITUACION 2. Valle Del Maule: La mayor productora de vinos de Chile

El Valle del Maule es una de las regiones con más hectáreas plantadas del país, con una superficie de tres millones de hectáreas convirtiendo a la región en la de mayor producción vinícola de Chile. También muchas de las viñas se han organizado para que los visitantes tanto nacionales como extranjeros puedan catar las diferentes variedades de cepas de la zona y experimentar. Hoy el vino del Valle llega a diferentes países del mundo tales como: Reino Unido, China, Japón, EEUU, entre muchos otros países. La diversificación de sus exportaciones ha llevado consigo cambiar las técnicas tradicionales de almacenamiento, desde las hermosas barricas de roble a los tanques de almacenamiento cilíndrico de acero inoxidable. Estos depósitos son utilizados en las bodegas como cubas, depósitos de fermentación y otros usos en vinificación. No hace muchos años que se empezaron a usar en enología debido a que el acero inoxidable tiene muchas ventajas tales como: material hermético, inalterable y con unas elevadas condiciones de limpieza e higiene.

Figura 1. Tipos de tanques usados para almacenar vinos

Teniendo en consideración que existen diferentes tamaños, formas y posiciones tanto vertical como horizontal como se muestra en la figura 1, ya sea para almacenamiento, fermentación u otras opciones propias de los productores de vino.

1) Formula un modelo matemático que describa el volumen del tanque.
2) Los viticultores de la Región del Maule necesitan comprar tanques cilíndricos, pero estos son importados generalmente de Alemania y su costo es bastante alto. Presenta una propuesta que incorpore la construcción de los tanques, las dimensiones que debería tener el envoltorio (tipo caja) y los costos de importación (todas las dimensiones deben estar en mm y los costos en miles de pesos).

(Dibujos e información extraída de: http://urbinavinos.blogspot.com/2011/12/depositos-de-acero-inoxidable-para-la.html y Boletín del vino: producción, precios y comercio exterior. Avance a febrero de 2018 https://www.odepa.gob.cl/wp-content/uploads/2018/04/Boletin-vino-marzo-2018.pdf)

Fig. 16: Problema desarrollado en el postest, donde modelan la capacidad de los toneles

La mayoría de los alumnos utilizaron recursos tecnológicos (Figura 17) para representar el tanque y, en el desarrollo del problema, usaron el ciclo de modelamiento que habían trabajado con los alumnos del sistema escolar. En la Figura 18, se muestra una secuencia de trabajo realizada por un alumno, donde explicita las condiciones iniciales y supuestos para obtener un modelo real. Emprende el camino hacia la matematización, trabaja con las matemáticas hasta encontrar una solución al problema, la cual interpreta, pero válida solo para algunos valores.

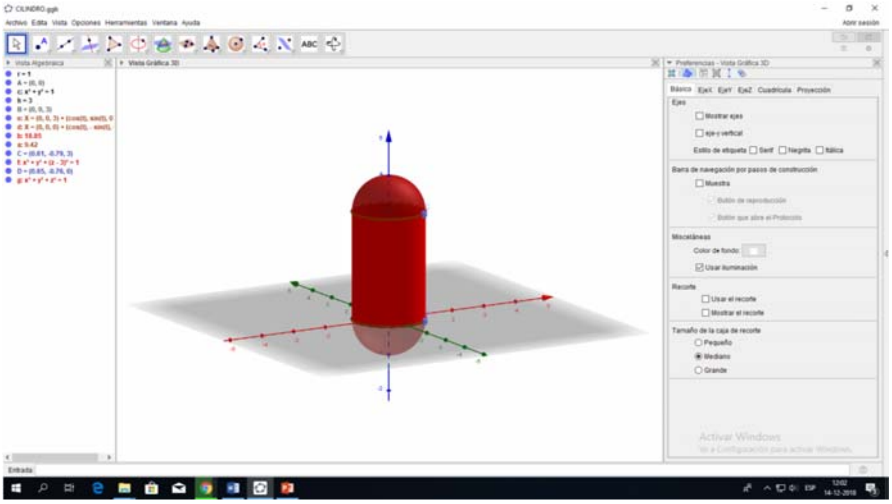


Fig. 17: Representación del tanque usando GeoGebra

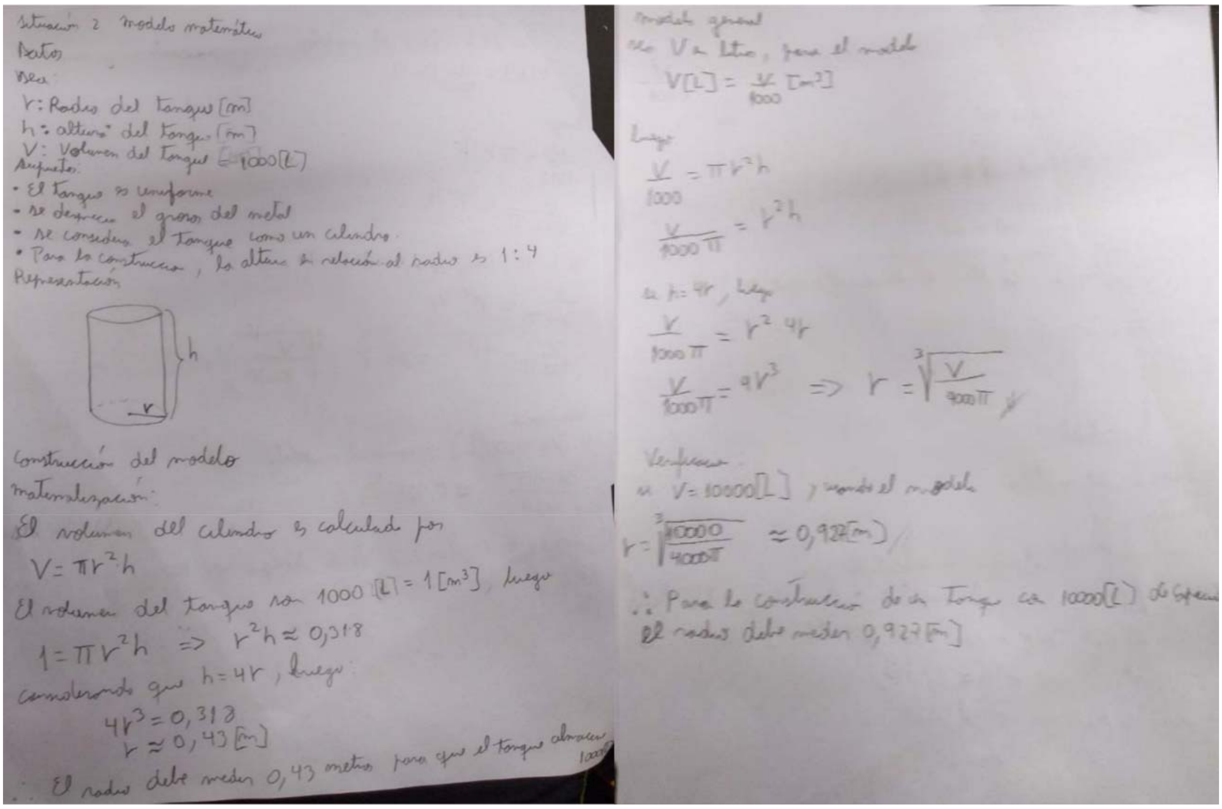


Fig. 18: Producción de un alumno usando el ciclo de modelamiento

Análisis de la dinámica en la implementación

Impactar en la formación de los futuros profesores y de los estudiantes del sistema escolar requiere que éstos realicen un análisis reflexivo e investigativo de su propia práctica, considerando los resultados alcanzados por los alumnos objeto de intervención. Por ello, los grupos de trabajo realizan la defensa del informe, que tiene características de Seminario final del curso, y son evaluados por una comisión a partir de una rúbrica que incorpora las habilidades STEM. Además, asisten diferentes académicos, los cuales intervienen con comentarios o aportes para la mejora de futuras intervenciones. Este tipo de análisis y reflexión, como espacio de comunicación en el gran grupo, es muy importante, puesto que permite ampliar sus recursos, socializar sobre la gestión, analizar actividades críticas en las distintas etapas del proceso, estrategias seguidas, recursos utilizados, habilidades desarrolladas y, sobre todo, conocimientos alcanzados sobre su propio quehacer.

Ejemplos de resultados y análisis de un grupo de trabajo

Para analizar las producciones de los alumnos del sistema escolar, los futuros profesores, diseñaron dos instrumentos tipo prueba (pretest y postest) para reconocer el perfil inicial y de progreso. Los resultados alcanzados por esos alumnos son analizados cuantitativamente e incorporados en el informe escrito y presentación oral de los futuros profesores, que deben defender al final de la experiencia formativa. También es recomendable que los futuros profesores realicen análisis cualitativos de la secuencia de trabajo en el aula, tales como experimentaciones, simulaciones o trabajo en terreno, lo que da una mayor solidez a sus resultados.

Se muestra un extracto de resultados de la implementación en secundaria, donde los futuros profesores se apoyan en gráficos de barra (Figura, 18), para mostrar el progreso que lograron con los alumnos del sistema escolar en habilidades STEM. En el análisis de los datos, el grupo utilizó estadísticos descriptivos y la prueba no paramétrica Wilcoxon, debido al tamaño de la muestra.

Resumen del extracto de la defensa

En las habilidades matemáticas [modelar, representar y argumentar], se observa que hay diferencias significativas al favor del postest para ambos géneros. En las habilidades científicas [iniciar procesos investigativos, formular problema de investigación, formular hipótesis, reconocer factores de riesgo, comunicar y argumentar], aunque progresaron, no hay diferencias significativas entre pretest y postest. Por último, en las habilidades tecnológicas [uso de bases de datos, planillas Excel, uso softwares para simular, diseñar y comunicar usando recursos tecnológicos], se observa que hay diferencias significativas a favor del postest.

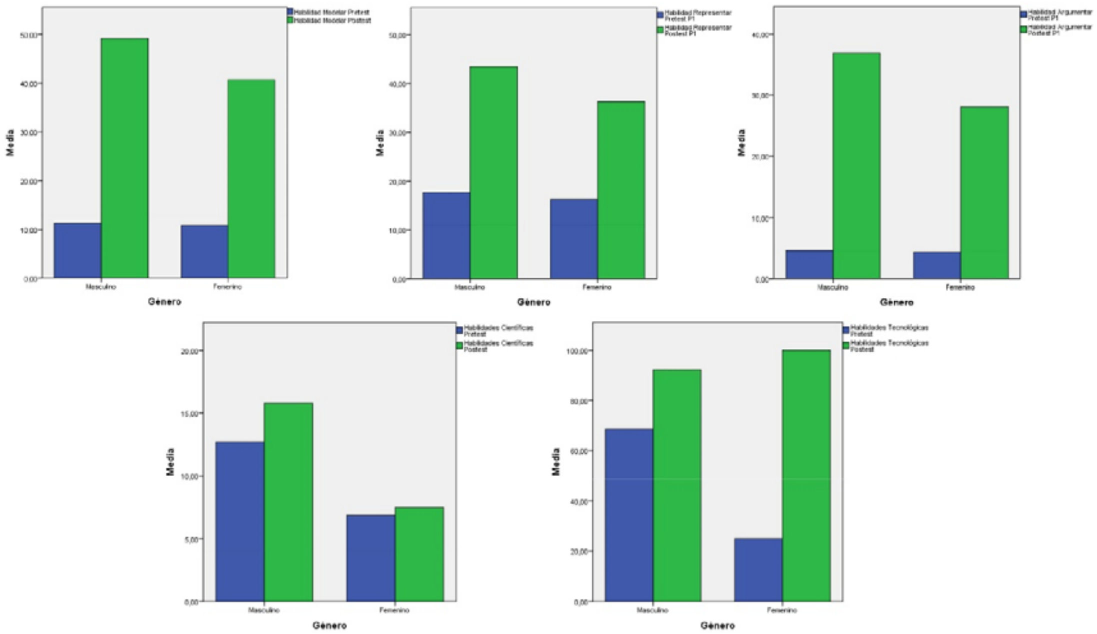


Fig. 19: Extracto de resultados entre pretest y postest por un grupo de alumnos del sistema escolar

En la Figura 20, se presenta un esquema de resumen de las distintas etapas del proceso formativo con los futuros profesores.

Fig. 20: Resumen de las etapas del proceso formativo con los futuros profesores

3. Propuesta evaluativa del proceso formativo

En todo proceso formativo, la evaluación se constituye en la pieza clave para la regulación y autorregulación de los aprendizajes (Jorba y Sanmartí, 1996; Aravena, 2016). Así, en tareas de modelamiento, las investigaciones dan cuenta de que, a pesar de haber aumentado en diversos lugares el uso de modelos, este no sirve si no se buscan estrategias para evaluar las habilidades que desarrollan los futuros profesores o alumnos en el desarrollo de dicho proceso (Burton, 1984; Aravena et al, 2011; Aravena, 2016). Por tanto, compartir significados en la interpretación de criterios de evaluación y estrategias de aprendizaje es fundamental para reportar resultados en el desarrollo de habilidades STEM. En particular, es muy relevante cuando se implementan secuencias que apuntan a fortalecer los procesos formativos de profesores en formación. Para este proceso formativo, se diseñaron pautas y rúbricas de evaluación en las diferentes etapas, que permitieron evaluar los avances, dificultades y obstáculos en dicho proceso.

Evaluación de problemas STEM

En la Figura 21, se muestra una rúbrica que incorpora las habilidades STEM, los criterios a observar y las categorías de respuesta de 1 a 5, que miden el grado de competencia en el desarrollo de cada una de ellas.

I. RUBRICA DE EVALUACIÓN.

TEMA: Modelado Matemático y STEM

Integrantes del Grupo 1: (1)____________ - ____(2)__________________(3)________________(4)____________

HABILIDADES		criterios	1	2	3	4	5
Científicas	**Estudio del fenómeno**	**Información recopilada** y la calidad de ella. Se valora la Revisión de bibliografía, documentos, entrevistas y otros (español e inglés)			X		
		Fundamenta basándose en artículos científicos			X		
	Procesos investigativos	Levanta problemas de investigación consistente y coherente con el fenómeno en estudio				X	
		Levanta hipótesis de investigación				X	
		Justifica las preguntas de investigación e hipótesis utilizando lenguaje científico				X	
		Estudia factores de riesgo que influyen en el fenómeno			X		
	Comunicación y argumentación	Comunica utilizando lenguaje científico				X	
Matemáticas	**Modelar**	Simplificación. Simplifica el problema identificando condiciones y restricciones Identifica modelo real				X	
		Matematización: notaciones, lenguaje, ecuaciones, formula el modelo en términos matemáticos			X		
		Trabajo con matemáticas: Obtiene una solución matemática del problema, Resuelve el problema utilizando herramientas, métodos y propiedades matemáticas				X	
		Interpreta la o las soluciones solución				X	
		Validación y verificación del modelo					
		Proyecta el modelo, limitaciones, fortalezas, generalización					
	Representar	Usa sistemas de representación. Gráfico, tabla, expresión verbal, expresión matemática					X
		Utiliza software matemáticos en 2D y 3D				X	
		Coordinación de registros. Tránsito por los diferentes representaciones					X
		Diseño y simulaciones					
	Comunicar y argumentar	Utiliza lenguaje formal en sus explicaciones				x	
		Explicita que la generalización permite contar con un modelo para diversas situaciones muy similares; Dar respuesta al problema real; Explicar el comportamiento del fenómeno			x		
		Somete a prueba procesos y estrategias					
Tecnológicas	**Selecciona medios tecnológicos**	Selecciona medios tecnológicos de acuerdo al problema (planillas de cálculo, software, editor de gráfico				X	
	Utiliza soporte digital (tecnológico).	Usa software para representar. Edita el gráfico. Utiliza base de datos para analizar la información Utiliza planilla de cálculo			X		
		Diseña utilizando software 2D, 3D					X
		Almacena información en forma digital				X	
	Comunicar usando objetos tecnológicos	Comunica la información utilizando un ppt. (Identificando ideas centrales del problema Realizando esquemas, Incluyendo fotos, tablas, gráficos, simulaciones)					X
VISIÓN GLOBAL Y PROSPECCIÓN		Referencias bibliográficas de acuerdo a formato APA 6ta edición				X	
		Ortografía de acuerdo al nivel				X	
		Utilización de objetos tecnológicos en su presentación (pawer point, software, Simulaciones, etc)			X		
		Valora la importancia del problema en el contexto				X	

Fig. 21. Rúbrica de evaluación de las habilidades STEM para los futuros profesores

Evaluación diseño y gestión

Evaluar la calidad del diseño e implementación en el aula es de relevancia para la retroalimentación de los procesos formativos de los futuros profesores, puesto que un buen diseño es condición necesaria pero no suficiente para una gestión de calidad en el aula. Para esta instancia, en la tabla 12 se presenta una pauta que fue adaptada a partir de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por Breda et al. (2018), cuyos trabajos se basan en la teoría de Godino y colaboradores. Con esta pauta se puede valorar la propuesta global, el diseño del plan de clases y la gestión en el aula, mediante el análisis de videos u observación directa, para la reflexión y retroalimentación de los futuros profesores y como insumo a los formadores de formadores.

Categoría	subcategoría	Indicadores (Plan de clases)	Indicadores (Gestión de aula)
Ecológica *Hace referencia a la concordancia entre el contexto de los alumnos, los problemas y la relevancia en la conexión con disciplinas STEM*	Utilidad sociolaboral STEM	-Problemas abordables -Conexión con habilidades STEM -Problemas en contextos STEM	-Discute la importancia de los problemas en contextos STEM laborales o profesionales - Discute la relevancia de los problemas para el desarrollo de las habilidades STEM
	Conexiones intra-disciplinares	-Conexión con el currículo nacional -Conexión con conocimientos de otras áreas	- Discute con los alumnos la conexión de los problemas con las otras disciplinas STEM
Mediacional *Referida a la disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de las habilidades STEM*	Recursos materiales y condiciones de aula y terreno	-Uso de material computacional -Simulaciones -Experimentaciones -Tiempos para el desarrollo de los problemas, experimentos y trabajo en terreno	- Usa objetos tecnológicos para explicar - Utiliza materiales en experimentos, trabajo en terreno, laboratorios. -Organiza tiempos de trabajo en aula - Uso del tiempo para retroalimentación
Afectiva *Referida a compromiso con los alumnos*	Intereses y necesidades	-Propuesta de problemas en el contexto de los alumnos	-Discusión de la relevancia de problemas en contextos de los alumnos

involucrándolos en la discusión, fomentando autonomía, , considerando diversidad, intereses, respetando sus actitudes y necesidades		- Valoración de intereses y necesidades	-Promueve discusión de los alumnos en el contexto de los problemas -Valora los aportes de los alumnos sobre contextos similares que pone en discusión (científico, social o cultural)
	Actitudes, emociones y género	-Directrices de la enseñanza -Atención a la diversidad - Habilidades	-Promueve el trabajo mixto y colaborativo -Respeta argumentos de alumnos -Favorece participación de los alumnos sin sesgos de género, raza o etnia
Epistémica *Hace referencia al diseño y gestión de tareas de modelamiento y STEM que se adaptan al contexto. Se pone el énfasis en enunciados, explicaciones, definiciones, teoremas, propiedades, procesos y argumentos*	Calidad del proceso STEM	-Objetivos -Habilidades STEM -Diseño de problemas (enunciados y preguntas coherentes, datos en contextos) -Simulaciones -Representaciones -Conocimientos STEM -Experimentaciones -Resúmenes de integración	-Explicaciones en contextos STEM -Uso de estrategias -Uso de software -Conexiones STEM -Uso de representaciones, Simulaciones, experimentos -Lenguaje acorde al contexto de los problemas -Institucionalización del conocimiento STEM
Cognitiva *Hace referencia a los significados pretendidos e implementados, en la zona de desarrollo próximo*	Conocimientos	-Planificación clase a clase -Posibles soluciones -Posibles Dificultades -Estrategias	-Regula conocimientos -Resúmenes de integración
	Aprendizaje	-Describe habilidades STEM a desarrollar -Modelo de enseñanza -Regulación mediante pautas o rúbricas	-Realiza discusiones para la Institucionalización del conocimiento -Regulación y Autorregulación de los alumnos

			-Retroalimentación
	Demanda cognitiva	-Problemas abiertos -Tipos de preguntas (estrategias, argumentaciones, conexiones, entre los conocimientos STEM	-Se activa la generalización del modelo -Se discuten las conexiones con los conocimientos STEM -Se activa la comunicación y argumentación
Interaccional *Hace referencia a la identificación de conflicto dada por la interacción entre docentes y alumnos y entre alumnos*	Interacción docente-discente	-Directrices de la enseñanza -Modelo de enseñanza -Preguntas para generar discusión evitando estereotipos	-Genera discusión sobre ciclo de modelamiento y soluciones -Aborda conflictos en el ciclo de modelamiento y conocimientos STEM -Propone consensos en base a argumentos
	Interacción entre discentes	-Metodología de aula -Trabajo colaborativo -Estrategias de enseñanza para abordar los problemas	-Genera espacios de diálogo compartido entre los alumnos -Facilita la inclusión y evita estereotipos - Promueve el desarrollo de problemas de forma autónoma
	Evaluación formativa	-Promueve criterios de evaluación y autoevaluación Incorporando habilidades STEM	-Regula las actividades de la clase -Genera instancias de autoevaluación -Realiza retroalimentación

Tabla 3. Pauta de evaluación de diseño y gestión de aula

Fuente: Proceso de diseño y gestión (Adaptada de Breda et al., 2018)

4. Conclusiones e implicaciones didácticas

En la propuesta se han considerado los elementos teóricos que dan cuenta de la importancia de formar a los futuros profesores en procesos de modelamiento matemático para la educación STEM, donde es de relevancia la incorporación de los contextos sociales y culturales de los alumnos (Sander, 2009, Orey & Rosa, 2018; Villa-Ochoa et al., 2017). El modelo de enseñanza, basado en el constructivismo, permitió dar respuesta a lo mencionado, generando una secuencia de intervención didáctica específica que aborda dichos planteamientos. En efecto, se ha puesto el énfasis en el desarrollo de habilidades STEM para formar a los futuros profesores de matemática en nuevos escenarios que demanda el acelerado progreso de la ciencia, la tecnología y la ingeniería (Gómez, 2007), incorporando prácticas de docencia para fomentar la alfabetización científica y tecnológica de tal forma que les permita adaptarse a la velocidad de dichos cambios. Por ello, es necesario preparar a estos futuros profesores en el uso de las tecnologías, a través de simulaciones computacionales, para estudiar el comportamiento de fenómenos, objetos y procesos del mundo real (Gilbert, 2004; Galbraith & Stillman, 2006). Estos elementos han sido considerados, en la propuesta de trabajo, como objetivo central para la gestión de aula, por la necesidad de formar a las futuras generaciones en el desarrollo de estas habilidades.

A partir de lo anterior, se describen algunas aportaciones del proceso formativo.

Resolución de problemas de modelamiento

La experiencia permite destacar algunos elementos críticos, al inicio del proceso, que es importante tener presente cuando se incorpora tareas de modelamiento en cualquier nivel educativo. Entre esos elementos se destacan: dificultades en la simplificación, para establecer condiciones y restricciones en el contexto del problema real; enfoque centrado en el trabajo matemático, en vista a formular un modelo en términos matemáticos; falta de argumentos en la comunicación de procesos en las etapas de matematización o en el trabajo con las matemáticas. Esto coincide con Blum & Niss (1991), quienes destacan que en esta etapa del ciclo deben poner a prueba una serie de habilidades tales como: articular teoremas, propiedades, definiciones, con lo cual se generan dificultades adicionales a los procesos mismos.

Lo más complejo se da en la etapa de validación, para garantizar la validez del modelo y de sus resultados, ya sea través de simulaciones computacionales o utilizando aproximaciones numéricas. En general, se realizan validaciones parciales, que no permiten garantizar la calidad de los resultados; ello coincide con Blum & Borromeo Ferri (2009), que esta etapa es de dificultad en los distintos niveles educativos. Sobre el análisis y proyección del modelo, en general, las dificultades se presentan en reconocer fortalezas y limitaciones en vista a la generalización. Es recomendable, para superar estas debilidades, que los futuros profesores analicen diversas investigaciones para apropiarse del ciclo de modelamiento y luego aplicar a nuevas situaciones, mediante la discusión, la reflexión y la retroalimentación docente.

Diseño de la secuencia, formulación y reformulación de tareas de modelamiento

Siguiendo la teoría de la actividad (Leont´ev, 1987), es importante que, en procesos de formación de profesores, la organización de la enseñanza esté regulada por diferentes etapas mediante estados de avance. A través de estos momentos permite regular el trabajo de los grupos, reconocer debilidades, fortalezas y el progreso conseguido. Se reconoce el logro de los grupos, ya que han puesto a prueba sus habilidades, generando una propuesta de intervención acorde a los lineamientos STEM.

Una de las dificultades, a tener en consideración durante el diseño, es la formulación y reformulación de problemas en contextos STEM y nos lleva a recomendar un mayor trabajo práctico durante sus años de formación, especialmente en el uso de tecnología, para visualizar el comportamiento de fenómenos reales en 2D y 3D. Esta dificultad que presentan los futuros profesores está relacionada con los métodos de enseñanza, centrado en un trabajo teórico-formal, estructuralista, con escasas aplicaciones en otras áreas del conocimiento e incluso entre la propia matemática (Aravena, 2016; OCDE, 2019).

Implementación y gestión

Se reconoce la potencialidad del diseño STEM en procesos de modelamiento, debido a los logros evidenciados en los alumnos del sistema escolar. Sin embargo, se ha podido detectar que, en general, los futuros docentes se desempeñan en forma más eficiente en el diseño y planificación que en la gestión de aula. Se constata muy buen dominio matemático en la resolución de los problemas, pero falta dominio de estrategias para la articulación de las habilidades STEM. Desde el punto de vista metodológico, falta mayor reflexión y diálogo compartido con todos los alumnos en el momento de la institucionalización del conocimiento. En este aspecto, comparto significados con Blum & Borromeo (2009), sobre la complejidad del proceso de modelamiento, especialmente en la gestión de aula, debido a las exigencias cognitivas que demandan estas tareas. Especial atención requieren los procesos investigativos del ámbito científico, donde se presentaron debilidades para el estudio de los fenómenos, ello coincide con investigaciones que evidencian la falta de trabajo práctico y la fragmentación con que se enseña ciencia, lo que a su vez desmotiva a los estudiantes (Osborne, 2003; Mohd Shahali et al., 2017). El Informe de OCDE (2019), recomienda abordar STEM para superar las debilidades que he mencionado, atendiendo de forma urgente a estudiantes con riesgo socioeconómico y socioeducativo. También, valoro el apoyo de los investigadores en las aulas, puesto que la formación en STEM requiere de equipos multidisciplinarios, no solo para solucionar los problemas, sino también para apoyar en la gestión de aula a los alumnos del sistema escolar.

Análisis y reflexión del proceso formativo

Se reconoce como importante el proceso de reflexión que se genera en la instancia final de la intervención que he descrito donde los futuros profesores defienden sus propuestas y los resultados obtenidos en la intervención de aula. Este proceso, al estilo del estudio de clases del modelo japonés (Aravena, et al., 2011; Estrella, Mena-Lorca & Olfos, 2018), permite a los grupos y a los docentes formadores ampliar sus recursos a través del análisis detallado de algunas clases y de la gestión en el aula. Como proceso de reflexión y retroalimentación beneficia a todos los agentes, porque fortalece no solo la formación disciplinar STEM, sino que también proporciona métodos de trabajo acompañados de procesos investigativos y a partir de su propia práctica (Servinc & Lesh, 2017; Brown & Bogiages, 2019).

Por último, esta propuesta no pretende establecer generalizaciones sobre los procesos de formación de profesores de matemática, sino más bien mostrar una metodología de trabajo que ha sido implementada y podría ayudar a orientar las prácticas de aula STEM. Ello, pues aún se requiere mayor investigación empírica para mostrar la potencialidad del modelamiento matemático como puente entre las disciplinas STEM (Li & Schoenfeld, 2019).

Limitaciones

Una de las limitaciones hace referencia a las fechas de gestión de aula, ya que la intervención se implementó a finales del año escolar. También las horas de clases de matemática fueron insuficientes (3 horas en Tercero Medio) para abordar problemas que no son de tiempo fijo, como es el modelamiento en contextos STEM.

Algunos retos para la educación matemática, consisten en abrir líneas de investigación en formación de profesores, que aborde en profundidad las prácticas profesionales, generando propuestas que incorporen modelamiento y STEM. Sería de suma conveniencia generar propuestas de trabajo para abordar la inclusión y la multiculturalidad, en contextos de modelamiento matemático para educación STEM, de tal forma de atender a las propias etnias y a estudiantes migrantes para fortalecer sus procesos formativos.

Reconocimientos

La propuesta que presentamos aquí, que forma parte de una investigación más amplia, fue financiada por el Fondo Nacional de Investigación y Desarrollo en Educación, FONIDE 1700070. Ministerio de Educación de Chile. Centro de Estudios. Santiago de Chile.

Agradezco a los investigadores que apoyaron con su experticia, a los científicos en las aulas, lo que fue muy valorado por el alumnado del sistema escolar: Dra. Mary Carmen Jarur, Dra. Xaviera López y Dr. Sergio Espinoza. Agradezco también a los futuros profesores, docentes y directores de establecimientos del sistema escolar, alumnos y padres o apoderados que permitieron que este experimento llegara a puerto.

Bibliografía

Allen, M., Webb, A. W. & Matthews, C. E. (2016). Adaptive teaching in STEM: Characteristics for effectiveness. *Theory Into Practice*, *55*(3), 217-224. https://doi.org/10.1080/00405841.2016.1173994

Aravena, M., Rodríguez, M; Sanhueza, S.; Seckel, M. & Urrutia, A. (2019). *Informe final* FONIDE 1700070. Caracterización de las habilidades matemáticas/científicas/tecnológicas en establecimientos municipalizados mediante a intervención de futuros/as profesores/as en el contexto de sus prácticas tempranas y profesionales. Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación. Ministerio de Educación de Chile. Santiago de Chile.

Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización Matemática Educativa*. Barcelona, Gedisa.

Aravena, M., Caamaño, C., González, J., Cabezas, C. & Córdova, F. (2011). *Resolución de problemas en contextos de aplicación. Propuesta Metodológica en la Formación Inicial de Profesores de Matemática.* Talca, Chile: Tabor.

Aravena, M., Caamaño, C. & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11*(1*),* 49-92.

Beers, S.Z. (2013). 21st Century skills: Preparing students for their future STEM: Science, technology, engineering, math. https://www.mheonline.com/mhmymath/pdf/21st_century_skills.pdf

Biembengut, M. S. (2016). Modelamiento Matemático en la Educación Brasileña: Historia de las Ideas e Ideas de las Historias. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización Matemática Educativa*, (pp. 89-108). Barcelona, Gedisa.

Boyer, C.B. (2007). *Historia de la matemática*. Madrid, Alianza Editorial.

Burton, L. (1984). *Thinking Things Through*. Oxford: Blackwell.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37–68. https://doi.org/10.1007/bf00302716.

Breda, A., Font, V., Do Rosário, Lima, Valderez M. & Villela, M. (2018). Components and indicators of didactic suitability criteria from the perspective of the ontosemiotic approach. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Brown, R. & Bogiages, C. (2019). Professional Development through STEM Integration: How Early career Math and Sciencie Teachers Respond to Experiencing Integrated STEM Tasks. *Int J of Sci and Math Educ 17*, 111-128. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9863-x

Brynjolfsson, E. & McAfee, A. (2014). *The second machine age: Work, progress, and prosperity in a time of brilliant technologies*. N.Y, WW Norton & Company.

Castro-Félix, E., & Daniel, H. (2018). The social construction of a Teacher Support Team: an experience of university lecturers' professional development in STEM. *Journal of Education for Teaching*, *44*(1), 14-26. https://doi.org/10.1080/02607476.2018.1422610.

Cook, K. & Bush, S. (2018). Design thinking in integrated STEAM learning: Surveying the landscape and exploring exemplars in elementary grades. *School Science and Mathematics*, *118*, 93–103. https://doi.org/10.1111/ssm.12268

Corporación de Fomento (CORFO) y Fundación Chile (2017). Preparando a Chile para una sociedad del conocimiento. Hacia una coalición que impulse la educación STEAM. http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/Image/portal/documentos/STEM_FCh_digital.pdf

Chiu, MH. & Lin, JW. (2019). Modeling competence in science education. *Discip Interdscip Sci Educ Res* **1,** 12 (2019). https://doi.org/10.1186/s43031-019-0012-y

Clough, M.P., Berg, C. A. & Olson, J. K. (2009). Promoting effective science teacher education and science teaching: A framework for teacher decision-making. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 821-847.

English, L.D (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *IJ STEM Ed 3*(1), 1-8. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1

Estrella S., Mena-Lorca A. & Olfos R. (2018). Lesson Study in Chile: A Very Promising but Still Uncertain Path. In: Quaresma M., Winsløw C., Clivaz S., da Ponte J., Ní Shúilleabháin A., Takahashi A. (eds*) Mathematics Lesson Study Around the World. ICME-13* Monographs., Champ, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_6

Fadzil, H.M. & Saat, R. M. (2014). Enhancing STEM Education during School Transition: Bridging the Gap in Science Manipulative Skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 10*(3), 209-218. https://doi.org/10.12973/eurasia.2014.1071a

Feiman-Nemser, S. (2001). From preparation to practice: Designing a continuum to strengthen and sustain teaching. http://bir.brandeis.edu/handle/10192/33196

García, Y., González, D.S.R. & Oviedo, F.B. (2017). Actividades STEM en la formación inicial de profesores: nuevos enfoques didácticos para los desafíos del siglo XXI. *Diálogos Educativos*, *33*, 35-46.

Gilbert, J.K. (2004). Models and Modelling: Routes to More Authentic Science Education. *Int J Sci Math Educ 2*, 115–130. https://doi.org/10.1007/s10763-004-3186-4

Gilbert , J.K., Boulter, C. J. & Elmer, R. (2000). *Positioning Models in Science Education and in Design and Technology education*. In Gilbert J. K and Boulter C.J. (Eds.) Developing Models in Science Education. Dordrecht: Kluwer

Goldhaber, D., Gratz, T. & Theobald, R. (2017). What's in a teacher test? Assessing the relationship between teacher licensure test scores and student STEM achievement and course-taking. *Economics of Education Review*, *61*, 112-129. https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2017.09.002.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas*. Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM).

Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling-Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14* (pp. 301–304). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

Hallström, J. & Schönborn, K.J. (2019) Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. *IJ STEM Ed* 6 (22), 1-10. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0178-z

Isoda, M., Arcavi, A. & Mena-Lorca, A. (2012). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. 3ª Edición. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Jorba, J. & Sanmartí, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar. Propuesta didáctica para las ciencias de la naturaleza y matemática*. Ministerio de Educación y Cultura de Barcelona.

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education - Examples and Experiences. *J Math Didakt, 31(*1*)*, 51–76.

Kitchen, J.A., Sonnert, G. & Sadler, P. M. (2018). The impact of college-and university-run high school summer programs on students' end of high school STEM career aspirations. *Science Education*, *102*(3), 529-547. https://doi.org/.10.1002/sce.21332

Kurup, P. M., Li, X., Powell, G. & Brown, M. (2019). Building future primary teachers' capacity in STEM: Based on a platform of beliefs, understandings and intentions. International Journal of STEM Education, *6*(1), 1-14. http://doi.org/10.1186/s40594-019-0164-5

Leont´ev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall

Lesh, R.A. & Doerr, H.M. (2003). *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning and problem solving in mathematics education.* Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Li, Y. & Schoenfeld, A.H (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *IJ STEM Ed 6* (44), 1-13. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Lingefjärd, T. (2011). Modelling from Primary to Upper Secondary School: Findings of Empirical Research – Overview. In Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R., Stillman G. (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. ICTMA 14 (pp. 9-14). https://doi.org/10.1007/987-94-007-0910-2_2

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*, 113-142. https://pdfs. semanticscholar.org/0303/d30d25016a810887169b23259d7aa83683d1.pdf

Muñoz Mesa, L.M., Londoño Orrego, S. M., Jaramillo López, C. M., y Villa-Ochoa, J. A. (2014). Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *42*, 48-67.

Mohd Shahali, E.H., Halim, L., Rasul, M.S., Osman, K. & Zulkifeli, M.A. (2017). STEM Learning through Engineering Design: Impact on Middle Secondary Students' Interest towards STEM. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(5), 1189-1211. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00667a

Nieves, A. & Mejía, H.R. (2004). Johannes Kepler y el secreto de la fabricación de las barricas de vino austríacas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, *59*, 261-274.

Niss M. (2010) Modeling a Crucial Aspect of Students' Mathematical Modeling. In: Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (Eds.) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Boston, MA, Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_4

Niss, M.A. (1987). *Aims and scope of appications and modelling in mathematics curricula*. Roskilde Universitet.

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) (2019). *PISA 2018 Results (Volume II): Where All Students Can Succeed, PISA*. Publishing. https://doi.org/10. 1787/ b5fd1b8f-en

Orey, D.C. & Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM*, *50*(1-2), 173-185. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0930-8

Osborne, J., Simon, S. & Collins, S. (2003). Attitudes towards science: A review of the literature and its implications. *International Journal of Science Education, 25*(9), 1049-1079. https://doi.org/10.1080/0950069032000032199

Ritz, J.M. & Fan, S. C. (2015). STEM and technology education: International state-of-the-art. *International Journal of Technology and Design Education*, 25(4), 429-451. https://doi.org/10.1007/s10798-014-9290-z

Rosa, M. & Orey, D.C. (2011). Ethnomodeling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 58-67

Sanders, M. (2009). STEM, STEM education, STEMmania. *The Technology Teacher, 68*(4), 20-26. https://sibib2.ucm.cl:2216/docview/235307933?accountid=170518

Sevinc, S. & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM, 50*(1-2), 301–314. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9

Scott, C. (2015). El futuro del aprendizaje 2 ¿Qué tipo de aprendizaje se necesita en el siglo XXI? Investigación y prospectiva en educación [documentos de trabajo, UNESCO]. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002429/242996s.pdf

Villa-Ochoa, J.A., Castrillon-Yepes, A., y Sachez-Cardona, J. (2017). Tipos de tarea de modelización para la clase de matemática. *Espaço Plural*. *8*(36),219-251.

Villa-Ochoa, J.A., Bustamante, C. & Berrio, M. (2010). *Sentido de realidad en la modelización matemática.* En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 23. (pp. 1087-1096). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vorhölter, K., Krüger, A. & Wendt, L. (2019). Chapter 2: Metacognition in Mathematical Modeling – An Overview. In: Chamberlin S., Sriraman B. (Eds.) *Affect in Mathematical Modeling. Advances in Mathematics Education*, (pp. 29-51), Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_3

Wang, Hui-Hui, Moore, Tamara J., Roehrig, Gillian H. & Park, Mi Sun (2011). STEM Integration: Teacher Perceptions and Practice, *Journal of Pre-College Engineering Education Research (J-PEER), 1*(2), 1-13. https://doi.org/10.5703/1288284314636

Capítulo 3
Modelamiento matemático en STEM mediante Juegos: ejemplo de modelamiento de la Selección Natural de la cooperación

Roberto Araya
Instituto de Educación y Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile, Chile

Introducir el modelamiento matemático en el aula es un gran desafío, pues requiere una profunda integración de varias disciplinas y no existe una extensa lista de ejemplos en los que basarse. En este capítulo proponemos una estrategia dual, compuesta de transición y juegos. La transición emula cómo modelan los expertos, que parten usando modelos hechos por terceros, luego aprenden a seleccionar y ajustar modelos, y sólo dominado lo anterior comienzan a construir nuevos modelos. Por otra parte, proponemos modelos que son juegos, hechos con materiales concretos, que juegan activamente en el aula todos los estudiantes sin excepción. Ilustramos esta estrategia dual con el modelamiento de la Selección Natural de la cooperación. Este ejemplo es particularmente desafiante por cuatro razones: requiere integrar varias disciplinas; hay fuertes preconcepciones erradas esencialistas que desmontar; es un rasgo no físico sino comportamental; y la cooperación parece oponerse a la lógica competitiva darwiniana, lo que viola nuestra intuición.
Palaras-clave: Modelamiento, Selección Natural, Cooperación, Juegos, Estrategia dual

1. Introducción

Producto del mecanismo de Selección Natural, nuestro cerebro ha evolucionado para construir modelos que son suficientemente fidedignos y que nos permiten sobrevivir y reproducirnos. Son modelos innatos e implícitos que nos ayudan a resolver los problemas recurrentes que nuestros ancestros han tenido que enfrentar por millones de años. Es parte de nuestro arsenal cognitivo biológicamente primario.

Sin embargo, producto de la evolución cultural que ha experimentado un crecimiento y sofisticación enorme en los últimos siglos, existe ahora un poderoso pero complejo arsenal de conocimientos biológicamente secundarios. En pocos años necesitamos que nuestros estudiantes asimilen las ideas fundamentales de este conocimiento y puedan aportar a aplicarlo, mejorarlo y extenderlo. Esto significa poder asimilar los principales modelos de la naturaleza aun cuando muchos de ellos no sean intuitivos. Existe lo que en biología se denomina una trampa o desajuste evolutivo, pues nuestros mecanismos de aprendizaje no están bien adaptados para los desafíos de aprendizaje del entorno actual.

Una estrategia es buscar una transición guiada desde los modelos implícitos (como que la tierra es plana) a los actuales (es casi esférica). Proponemos aquí una estrategia dual. Primero una estrategia de transición, que llamamos USAB (Araya, 2012), cuya primera etapa es comenzar con Usar modelos hechos por terceros. Luego la segunda etapa es aprender a Seleccionar modelos según el problema a resolver. La tercera etapa es aprender a Adaptar un modelo para optimizarlo. Y, finalmente, en la cuarta etapa llegar a construir (*Build*, en inglés) modelos.

Como segunda estrategia, proponemos además usar modelos que son juegos (Araya, 2000) que todos los estudiantes pueden jugar activamente en la sala de clase (Araya, 2004; Araya, 2007; Araya 2021). Estos juegos corresponden a modelos que la literatura de modelos matemáticos y computacionales llama modelos basados en agentes (Schelling, 1971; Epstein et al, 1996; Epstein, 2006; Page, 2018; Araya et al, 2020). Con esta estrategia dual abordamos el modelamiento matemático de una de las ideas centrales y más complejas de la biología y de las ciencias sociales: la Selección Natural de la cooperación (Maynard-Smith et al, 1999; Noe et al, 1994; Tomasello, 2009; Turchin, 2016; Henrich, 2015).

Comenzamos por abordar el modelamiento de la Selección Natural de rasgos físicos, de manera que los estudiantes se familiaricen con diversos modelos de Selección Natural (Araya 2013). Luego pasamos al modelamiento de la cooperación. El desafío es enorme por dos causas. Por una parte, la cooperación es un rasgo comportamental, y por lo tanto más abstracto que uno físico. Es mucho más fácil visualizar el color o la altura como rasgos heredables y sujetos a presión selectiva, que los rasgos de comportamiento que parecen depender solo de la voluntad de cada individuo. Por otra parte, la cooperación parece oponerse a la lógica competitiva darwiniana. Es un tema contra intuitivo que parece violar nuestra concepción de la cooperación.

En este capítulo mostramos cómo la estrategia dual, con transición guiada USAB y con juegos, permite a estudiantes de enseñanza básica y media ayudar a comprender la ventaja adaptiva de la cooperación, y cómo, dentro de la mecánica ciega y competitiva de la Selección Natural, podría explicarse su aparición y evolución.

2. Metodología

¿Por qué modelamiento?

La construcción de modelos es una actividad básica del pensamiento (Epstein, 2008). Estamos continuamente imaginando paisajes, situaciones, relaciones y usándolos para ejecutar simulaciones en nuestra cabeza para tomar decisiones y actuar. La mayoría de estos modelos son implícitos, es decir, los usamos, pero no estamos conscientes de su uso. En las actividades de modelamiento matemático, intentamos hacerlos lo más explícitos posible, especificando sus componentes principales y las relaciones entre ellos. Por ejemplo, si planeamos construir un puente, comenzamos imaginando diferentes puentes posibles y el tráfico que los atraviesa. Normalmente, este es un proceso implícito y lo hacemos automáticamente. Si tenemos más tiempo y estamos a cargo de diseñarlo, entonces intentamos imaginar sus componentes y cómo responderá a la carga de tráfico, flujo de agua y viento. Comenzamos así un proceso más deliberado y explícito. Podemos construir un pequeño puente de juguete, probarlo y medir su respuesta a diferentes perturbaciones. Luego tenemos que pensar en cómo llevarlo a la escala real. Aquí es fundamental que intentemos determinar las relaciones entre los diferentes componentes, probándolos en nuestro modelo de juguete y, finalmente, en un modelo de juguete más realista. Todo este proceso, desde un primer modelo implícito a uno explícito con especificaciones matemáticas, es el proceso de construcción del modelo matemático que nos permite tomar mejores decisiones. Es una habilidad clave que necesitamos que nuestros estudiantes aprendan y comiencen a usar sistemáticamente en su vida diaria. Es una habilidad que sólo en las dos últimas décadas se comenzó a incluir en los currículos de matemáticas y ciencia, por lo cual hay todavía mucho trabajo que realizar para asegurar su efectividad y adopción (Borromeo, 2018; Saari y Viiri, 2003; Krajcik, 2012).

Sin embargo, construir modelos requiere experiencia en campos específicos y en diferentes formas de pensar sobre cómo capturar las relaciones entre los componentes. Normalmente, los expertos en modelos matemáticos y computacionales invierten varios años trabajando en modelos en un campo en particular. Solo una vez que tienen la experiencia suficiente son capaces de realizar mejoras en los modelos en su campo. Muy raramente un experto propondrá un modelo matemático radicalmente nuevo. Por lo tanto, no podemos esperar que nuestros estudiantes propongan modelos matemáticos de la nada.

Una aproximación ecológicamente válida

Dado el enorme desafío educacional que significa incluir el modelamiento en el aula, es importante buscar y entender su rol en la cognición humana. ¿Hay antecedentes de que es parte

natural de la cognición? Una mirada evolutiva puede arrojar luces y pistas para el desarrollo de estrategias didácticas.
El cerebro humano es producto del proceso evolutivo de Selección Natural que lleva operando por miles de millones de años. En este largo proceso, hace ya cientos de millones de años emergió el sistema nervioso. Esto significó un cambio radical en la conducta de los organismos que lo poseen. Basta comparar las diferencias de movilidad entre animales y plantas. Pero el costo energético del sistema nervioso es enorme. En el caso humano el cerebro es el órgano que consume más recursos en reposo, llegando a cerca de 60% en recién nacidos y un 25% en adultos (Allman, 1999). Por lo tanto, es importante determinar qué ventajas proveen las neuronas a las especies que lo poseen. Según el neurocientista colombiano Rodolfo Llinás (Llinás, 2001) la ventaja está en el movimiento y la navegación. El cerebro sería básicamente una máquina de control de navegación. Esto tiene importantes implicaciones didácticas, pues nos da orientaciones específicas para ayudar a la comprensión de conceptos matemáticos. Por ejemplo, el uso de posiciones y la navegación para representar números. Imaginar los números como posiciones en la recta numérica y la suma y resta como traslaciones nos facilita la compresión de operaciones tales como 2 -3.
Por otra parte, el cerebro está directamente conectado a la percepción, y, en particular, a la visión. Las áreas visuales ocupan gran parte del área posterior de la corteza humana. Esto quiere decir que estamos especializados en reconocer ciertos patrones visuales. Así, la importancia de la percepción visual nos orienta a buscar estrategias didácticas visuales. Por ejemplo, estrategias que enfaticen graficar. Los gráficos facilitan enormemente la detección de patrones.
Otra capacidad central del cerebro es la de planificar. Esto significa simular lo que puede ocurrir en diferentes escenarios. Estos escenarios son visualizaciones que se adelantan por varios minutos u horas a lo que pasará. Muchos de esos escenarios no son estáticos. Son altamente dinámicos, y dependen de nuestras decisiones y las decisiones de otros agentes. Hay evidencia de planificación en chimpancés en tareas que requieren prever lo que ocurrirá en varias horas hacia adelante (Green et al. 2019). Un componente estratégico que facilita simular es el uso de modelos concretos. En chimpancés y niños pequeños, la planificación se facilita con modelos físicos a escala. Por ejemplo, utilizar un modelo a escala como fuente de información para la ubicación de un elemento oculto (Kuhlmeier et al, 2002). Lo mismo ocurre con el uso de simuladores y modelos computacionales (Voinov et al., 2020). En esta capacidad de simular mentalmente y de usar modelos concretos está la base del modelamiento.

Estrategia de transición USAB y uso de juegos

Con el fin de diseñar estrategias para difundir las habilidades de modelamiento matemático en el sistema escolar, necesitamos comprender cómo los científicos, ingenieros y otros profesionales hacen modelos matemáticos. Algunas personas han construido modelos desde cero, sin basarse en otros modelos, pero esto es muy poco común. Normalmente, los expertos llevan varios años trabajando en los tipos de modelos existentes. Por tanto, tal como ellos, necesitamos conocer los principales tipos de modelos matemáticos que utilizan. Además, existen ciertos patrones específicos y tipos de técnicas que utilizan los expertos. Necesitamos identificarlos y luego enseñar eso a nuestros profesores y estudiantes. Siguiendo lo que decíamos que hacen los expertos, hemos propuesto una estrategia dual para enseñar modelamiento matemático.

La primera estrategia es la de transición. Tiene cuatro etapas (Araya, 2012). La primera es hacer que los estudiantes USEN ciertos tipos de modelos, tanto físicos con material concreto (muy usados en ingeniería y ciencias), como modelos computacionales y matemáticos; los alumnos aprenden así ciertas formas de pensar con modelos que se pueden utilizar en una gran diversidad de situaciones. Una vez que el estudiante conoce varios modelos y los ha usado varias veces, entonces comienza una segunda etapa donde en una situación dada tiene que SELECCIONAR el modelo más apropiado de un conjunto de dos a cinco opciones. En la tercera etapa, tiene que aprender a AJUSTAR los parámetros en un modelo para adaptarse mejor a una situación. En la cuarta, tiene que CONSTRUIR un modelo nuevo o alguna componente de un modelo, generalizando un modelo conocido para una nueva situación o recombinando modelos anteriores. A esta estrategia de transición la hemos denominado estrategia USE-SELECT-ADAPT-BUILD (USABle) (Araya, 2012; véase también Lingefjard, 2007).

La otra componente de la estrategia dual propuesta en este capítulo es el juego. Es una forma típica y poderosa de pensar y simular escenarios (Araya 2004, Araya enviado). Muchos modelos pueden verse como juegos de tablero. Así podemos imaginar el mundo como un tablero donde, por ejemplo, cada celda tiene un número que representa la altura del paisaje sobre la celda, o la cantidad de comida en ella, o la intensidad del olor en la celda… lo que sirve para modelar movimientos de organismos. Con tableros se pueden también hacer modelos de propagación tales como quimiotaxis (Araya, enviado), gastrulación, incendios forestales (Araya, 2016; Araya, 2017), tsunamis, segregación social, etc. Otros tipos de modelos usan juegos de azar. Por ejemplo, con cajas y sorpresas se pueden modelar problemas de aprendizaje automático para diagnóstico (Araya et al 2014). La ventaja de los juegos es que puede lograrse que todos los estudiantes participen activamente, y lo hagan en una actividad muy atractiva (Araya, 1997). Si bien los animales tienen también otros mecanismos de enseñanza (Morell, 2015), el juego es realmente la base de la pedagogía, pues es mucho más comúnmente usado por animales para enseñar a lo más jóvenes de su especie. Por ejemplo, los perros adultos juegan a pelear o cazar con cachorros, y las mordidas son de mentira (Pellegrini, 2009). En los juegos es importante distinguir juegos unipersonales (como el solitario) versus juegos sociales (Araya, 1997). Desde el punto de vista motivacional, es mejor utilizar juegos sociales entre equipos, como en el fútbol. Esto se puede lograr con modelos de agentes que se juegan entre cursos (Araya et al, 2014, Araya et al., 2017; Araya et al. 2019) o entre dos grupos de un curso (Edwards et al, 1972). En ambos casos la evidencia empírica muestra aprendizajes mayores que con la clase tradicional. El juego entre equipos es una estrategia didáctica ancestral. En una reciente revisión de registros etnográficos de 100 culturas cazadoras-recolectoras (Scalise Sugiyama et al., 2018) encontraron que en 46 de ellas el juego entre grupos es una estrategia didáctica común. Esto no quiere decir que en el resto de las culturas examinadas no haya uso de estos juegos entre equipos, sólo que los etnógrafos no la reportaron, y por lo tanto en la revisión bibliográfica no se pudieron contar. Adicionalmente, es fundamental que los modelos introducidos sean realmente fértiles y generativos, y que en secuencias sucesivas puedan aumentarse progresivamente para incluir más detalles y fenómenos más complejos. De esta forma, los estudiantes revisarán y revisitarán cada año el mismo tipo de modelos, pero con fenómenos y matemáticas más sofisticadas, y con más parámetros para dar cuenta de situaciones más realistas. Esta estrategia garantizará que incorporen paulatinamente estrategias y formas de pensar particulares y profundas, de manera que los estudiantes las vayan asimilando paulatinamente hasta que pasen a ser modelos naturales, intuitivos y evidentes.

Estudio de clases de modelamiento

Para estudiar la implementación en aula de las estrategias de modelamiento usaremos la metodología de Estudio de Clases (Isoda et al., 2012). Es una estrategia colaborativa que contempla un ciclo constante de diseño de clases, prueba y rediseño. Siguiendo esta estrategia de implementación diseñamos y fuimos ajustando las lecciones propuestas en este capítulo. Un aspecto central es la comunidad que participa en el proceso: docentes, expertos y estudiantes participan como actores, u observando y retroalimentando las lecciones. Esto asegura que las clases sean más efectivas y de mayor calidad.

El Estudio de Clases (*Lesson Study*) es un ciclo de mejoramiento continuo donde se va ajustando una clase para paulatinamente lograr ser más efectiva. Esto significa crear un plan de clase, realizar la clase con observadores que registran eventos críticos, y luego viene un proceso de revisión de la clase efectuada para realizar ajustes y producir un nuevo plan de clase. Una clase que se juzga convenientemente ajustada se suele impartir a la comunidad, y se le denomina una "clase pública". Esta estrategia apunta a desarrollar el cambio de prácticas educacionales en la sala de clases, que es el lugar de las acciones de enseñanza-aprendizaje. La solución propuesta en este capítulo se desarrolló e implementó con aprendizajes situados, en clases reales, en horario escolar, y con temáticas relacionadas con problemas reales y significativos para los profesores y alumnos involucrados. Aún más, el ideal es que estas clases desemboquen en clases públicas con varias decenas de observadores. La solución busca reducir el aislamiento del docente y fomentar el aprendizaje entre pares.

A diferencia de otras profesiones como abogados, ingenieros y arquitectos, los docentes realizan sus actividades en forma casi completamente independientes de otros docentes, debido en parte a la estructura espacial de sus lugares de trabajo. Esto hace que la difusión de prácticas y el aprendizaje social horizontal sea muy difícil, y por lo tanto hace que el mejoramiento continuo sea muy lento. El Estudio de Clases es una práctica ya centenaria que comenzó en Japón hace 150 años. Representa una importante tradición didáctica en la cual primero el docente planifica su clase y la entrega a sus pares en forma escrita. El escrito es una verdadera partitura de unas dos páginas, que luego interpretará en clases. Decenas o centenas de docentes observarán la clase con la partitura en sus manos. Durante el desarrollo de la sesión realizan acuciosas anotaciones para luego analizarlas en grupos. Existe abundante investigación sobre estudio de clases japonés (Stiegler et al., 1999: Hiebert et al, 2003; Isoda et, al, 2007; Isoda et al., 2012; Wang-Iverson et al, 2005; Inprasitha et al, 2015; Galvez, 2015), que documenta la experiencia de su implementación. Lo central es que es un mecanismo poderoso que promueve la colaboración productiva entre docentes. Todo estudio de clase y clase pública parte con un plan de clase. Debe contener los Objetivos, y en el caso de ser posible debe contener los Objetivos de Aprendizaje y Habilidades del currículo, además de los materiales. Además, sugerimos escribirlo en tres columnas. A la izquierda con los tiempos cada 5 o 10 minutos; al medio con los que el docente realizará, y a la derecha estarán las respuestas y conductas que se espera realizarán los estudiantes. En total son una o dos páginas.

Observación de clases

Para el estudio de las clases realizamos un monitoreo constante de lo que está ocurriendo en el aula de clases con el profesor y con los estudiantes. Hay también un análisis de los materiales, de las representaciones y modelos usados, de los procesos de modelamiento promovidos, las estrategias de integración disciplinarias. En Clases STEM hay criterios adicionales más particulares. En este proyecto, la observación de clase se realizará siguiendo el protocolo *Classroom Observation Protocol for Undergraduate* STEM (COPUS) diseñado para clases STEM (Smith et al., 2013). Este es un protocolo diseñado por el profesor y premio Nobel de Física, Carl Wieman, de la Universidad de Stanford, y su equipo. Tiene dos focos, uno es en los estudiantes y el otro en el docente. Para la observación de COPUS y análisis del discurso docente, utilizamos una versión desarrollada por el equipo STEM del CIAE junto al equipo de Educación en Ciencias de la Universidad de Jyvaskyla de Finlandia (Caballero et al. 2017, Caballero et al. 2019, Espinoza et al. 2019).

Un aspecto esencial para el desarrollo del pensamiento crítico en STEM y Computación es el uso de modelos y el modelamiento (Holmes et al., 2015). En general hay muchas clases experimentales con un foco exclusivo en mediciones y experimentos, y sin un foco en modelamiento. En Chile, aún la experimentación empírica es muy baja. En 2015 sólo el 51% de los estudiantes de cuarto básico y sólo el 39% de los de octavo indican haber visto su profesor hacer demostración de un experimento. Estos bajos porcentajes han ido bajando, pues en 2011 era mayor el porcentaje. Los porcentajes de estudiantes que realizan experimentos en sus clases son también muy bajos respecto al resto de países OECD (Vincent-Lancrin, 2019).

Para Wieman y su equipo una meta central en educación en ciencias es enseñar a los estudiantes a pensar críticamente sobre los datos científicos y los modelos (Holmes et al, 2015). Y es justamente la componente modelos la que está más ausente, y es por tanto el desafío mayor. La propuesta de clases de este capítulo considera el uso activo de modelos. En las clases propuestas los modelos son un elemento central. Por una parte, en cada clase propuesta, los estudiantes usan, predicen y reflexionan con los modelos. Esto toma una gran proporción del tiempo de la clase. No son para nada algo accesorio. Por otra parte, el uso de modelos es la componente central en la argumentación y explicación de los fenómenos. También los modelos son elementos claves para la construcción de soluciones ingenieriles y tecnológicas. En general, las clases propuestas promueven la estrategia de transición USAB: Usar modelos, Seleccionar modelos, Adaptar modelos Construir (Build) modelos (Araya, 2012; Araya, 2004).

Además, proponemos usar una plataforma online para facilitar el registro y seguimiento en línea de las predicciones y la argumentación escrita de cada estudiante (Araya et al. 2018). Adicionalmente, esto permite registrar y monitorear componentes sociales como la asistencia entre estudiantes pares, revisión de respuestas escritas entre pares con comentarios escritos individualizados, e implementar estrategias de motivación grupal con torneos sincrónicos entre cursos o grupos.

3. Modelamiento de la Selección Natural

El desafío de comprender la Selección Natural

El entendimiento de la evolución de los organismos mediante el mecanismo de la Selección Natural proviene de la selección artificial. Es la experiencia con la selección artificial lo que inspiró a Darwin a descubrir y proponer la Selección Natural (Sterrett, 2002). La selección artificial es quizás la estrategia más básica y difundida que ha permitido por milenios domesticar muchos animales y plantas. Por ejemplo, al dejar reproducirse sólo a los toros cuyas hijas producen más leche. Es un caso paradigmático de puente entre la tecnología e ingeniería de producción de alimentos con la ciencia (biología) y también con la matemática (estadística y probabilidades) y la computación. En el caso de matemáticas, computación e ingeniería, esta conexión ha inspirado desarrollos como por ejemplo los algoritmos genéticos.

Por otra parte, el mecanismo de la Selección Natural es uno de los conceptos de mayor complejidad en el aprendizaje de biología, y es uno de los más importantes y fundamentales de los que hay que aprender en la escuela (Spindler & Doherty, 2009; Catley et al., 2005). Pero las preconcepciones erradas de la biología innata, que incluye un fuerte sesgo esencialista (Gelman, 2003), hacen que sea muy difícil la comprensión de los mecanismos de la Selección Natural. Esto significa que los estudiantes muestran gran resistencia a cambiar esas preconcepciones (Bloom & Weisbeg, 2007).

Las Academias Nacionales de EE UU, compuesta por la Academia de Ciencias, la de Ingeniería y el Instituto de Medicina de EEUU, en su reporte (The National Academies, 2006) construido sobre la base de una revisión de las últimas décadas de enseñanza de la ciencia en EEUU, destaca que la comprensión infantil del origen de los seres vivos sufre un considerable cambio entre los 8 y 10 años de edad. A esa edad los niños desarrollan una explicación creacionista más explícita de los orígenes de las especies, independientemente de las creencias en sus hogares (Evans, 1999; Evans, 2001). Estas creencias se reflejarán en sesgos esencialistas iniciales, es decir, su tendencia inicial a creer que las cosas tienen una verdadera naturaleza subyacente. Esa creencia de que las especies han fijado esencias obra contra el concepto contemporáneo de una especie como una distribución probabilística de los rasgos sobre los que la Selección Natural opera. El sesgo esencialista no es meramente un problema enfrentado por los niños. De hecho, se ha argumentado que la aparición relativamente tardía de teoría de la evolución en la historia de la ciencia fue causada por los prejuicios esencialistas en la mayoría de las teorías que tienen los adultos sobre las especies (Hull, 1965; Mayr, 1982), lo que ha llevado a observar que el esencialismo ha resultado en un estancamiento de dos mil años en el pensamiento evolucionario (Hull, 1965).

Esta permanente dificultad con el pensamiento evolucionario en la edad adulta, se ve también en el trabajo que muestran los estudiantes universitarios que frecuentemente responden a preguntas sobre evolución y Selección Natural en formas que no están de acuerdo con la teoría evolutiva (Shtulman, 2006). De esta forma, los sesgos esencialistas pueden distorsionar juicios sobre una amplia gama de fenómenos evolutivos, como los conceptos de variación, herencia, adaptación, domesticación, especiación y extinción (Shtulman, 2006). Una concepción esencialista de la naturaleza no concibe que ésta pueda cambiar. Adicionalmente los estudiantes ya antes de entrar a la escuela vienen con fuertes preconcepciones teleológicas y vitalistas, que los inducen a concebir una evolución lamarckeana, y les dificulta comprender los mecanismos ciegos de la Selección Natural (Inagaki & Hatano, 2006).

Según un reporte reciente de las Academias Nacionales de EEUU (*The National Academies*, 2012) la evolución es el tema central unificador en Biología, que, si bien ha ido ganando preponderancia en la enseñanza –por ejemplo, en los últimos años las preguntas relacionadas con evolución han subido desde un 12% a más del 35% en el test AP *Biology*–, todavía prevalecen muchas concepciones erradas y la enseñanza no logra solucionar esta deficiencia. Uno de los mayores desafíos para superar las concepciones erradas en Selección Natural es que no solo son muy intuitivas, sino que es muy difícil diseñar estrategias didácticas experimentales para ayudar a erradicarlas. Parte de la dificultad de la enseñanza de Selección Natural se debe a los tiempos y complejidades de hacer experimentos que involucren varias generaciones de organismos. Pero el requerimiento de seguir y monitorear varias generaciones es esencial, pues sólo después de varias generaciones puede observarse cómo opera la Selección Natural y su efecto en la evolución de cambios en los rasgos de la población. Sin embargo, hacer un seguimiento a varias generaciones toma mucho tiempo, aún en organismos como insectos que se reproducen en corto tiempo. Por otra parte, el observar varias generaciones en organismos que se reproducen más rápido, tales como bacterias, y poder a la vez monitorear algunos de sus diferentes rasgos, está lejos de las posibilidades de manejo por estudiantes de enseñanza básica y media.

The National Academies (2012) también sugiere poner atención en buscar superar las concepciones erradas muy comunes de que la evolución es progresiva, donde los humanos se ubican en el pináculo de una larga cadena de avances, o la concepción de que todo en la naturaleza está optimizado porque ha evolucionado para ajustarse perfectamente con el ambiente. Para evitar estas concepciones erradas, sugiere promover explicaciones funcionales con Selección Natural y propone específicamente enfatiza compensaciones entre costos y beneficios de los rasgos.

Según Berkman et al., (2011) una extensa encuesta a docentes de biología de escuelas secundarias en Estados Unidos (*National Survey of High School Biology Teachers*), muestra que solo el 27% se pronuncia por la biología evolucionaria, un 13 % respalda el creacionismo, y el 60% no se pronuncia por ninguna de las dos. Sin embargo, entre los docentes que habían tenido un curso sobre evolución, el pronunciamiento a favor de la biología evolucionaria es mucho mayor, y alcanza a un 56%. El artículo hacer ver la dificultad de cambiar la enseñanza de la evolución y la Selección Natural, y que gran parte de la dificultad radica en la mala formación de los profesores de biología que increíblemente no tuvieron ningún curso sobre evolución.

Dadas estas dificultades, *The National Academies* (2012) sugiere usar simulaciones con organismos artificiales y hacerles un seguimiento a través de varias generaciones, de manera que se pueda observar el cambio de distribución de rasgos fruto del mecanismo de Selección

Natural. En este capítulo seguimos la estrategia de transición USAB, y comenzamos con modelos concretos y que además son juegos. Así, aprender a usar un modelo se traduce en simplemente jugar el juego. Es decir, la primera etapa de usar un modelo se convierte en jugar siguiendo las reglas del juego. Es un juego en equipo y que muestra el mecanismo de Selección Natural de forma directa, simple, concreta, y, por sobre todo, haciendo participar activamente a todos los estudiantes. Ellos mismos deben tomar el rol de los organismos y tomar decisiones en su ambiente que les permitan alimentarse, sobrevivir y reproducirse. La estrategia de modelamiento con juegos tiene la ventaja de participación activa de toda la clase (Powell et al, 1998, OECD, 2019). Se espera entonces que, al usar un modelo concreto tipo juego, los estudiantes cambien sus preconcepciones de la biología evolucionaria y comiencen a dar explicaciones más científicas usando Selección Natural en lugar de explicaciones teleológicas y creacionistas.

Propuesta de modelamiento de la Selección Natural

La propuesta tiene una secuencia de modelamientos, cada uno realizado en una o un par de sesiones. Para el primer modelamiento, la primera clase tiene el objetivo que los estudiantes:

- Comprendan el mecanismo de Selección Natural
- Conozcan modelos con agentes y lo usen para realizar predicciones y explicaciones
- Comprendan que es un mecanismo ciego y que el azar es central
- Comprendan y expliquen el rol de la herencia de rasgos
- Comprendan el rol de las generaciones
- Grafiquen los patrones de rasgos por generaciones
- Desarrollen el razonamiento poblacional con poblaciones de agentes

Los materiales requeridos son:

- Un pliego de papel color tierra de 3 x 1,5 m
- Fichas de color blanco y de color tierra de 5 x 5 cm 100 de cada tipo
- Bolsas para guardar las fichas que indiquen generación I, II y III, y si fueron capturadas o no.
- Hojas para confeccionar cuadros estadísticos y gráficos
- Una plataforma *online* para realizar apuestas, responder a preguntas abiertas, y comentar las explicaciones escritas de otros estudiantes. En este estudio se utilizó la plataforma ConectaIdeas.

La clase se divide en dos grupos. En cada turno cada estudiante del primer grupo (presas) esconde sus fichas en el tablero (como en la figura 1) mientras el segundo grupo (depredadores) está fuera del aula. Al anuncio del profesor cada estudiante del segundo grupo debe sacar una ficha del tablero en un tiempo muy acotado. Las fichas que sobreviven se duplican, manteniendo su color. Las instrucciones del juego pueden verse en el cómic Selección Natural en el enlace https://www.conectastem.cl/conecta/Comics/seleccion-natural/


Fig. 1: Modelo de ecosistema con un tablero de color tierra con modelo de organismos con fichas de dos colores: blancas y color tierra (que cuesta detectarlos en la foto). A la izquierda con estudiantes de séptimo y a la derecha con estudiantes de tercero básico

A continuación está la planificación sugerida para octavo básico o enseñanza media.

Tiempo (mins.)	**Actividad del profesor**	**Respuestas previstas de los estudiantes**
0 - 10	Explica a los estudiantes la Selección Natural y explica un modelo con un tablero que representa el ecosistema y fichas que representan organismos. Pregunta por la diferencia entre la selección artificial y la compara con la natural.	Dan ejemplos de selección hecha por productores de animales o plantas
10 – 20	Explica que dividirá al curso en dos mitades: un grupo dueño de presas y otro grupo de depredadores. Entregará al grupo de dueños de presas 2 fichas blancas y 2 de color tierra, y explicará las siguientes reglas del juego:	Realizan muchas preguntas para obtener claridad respecto a la actividad

	Los depredadores saldrán de la sala y los dueños de presas esconderán sus fichas sobre el tablero. Creará un juego tipo torneo dentro del curso. Luego, en 5 segundos los depredadores deben capturar 2 fichas. Cada ficha capturada se guarda en bolsa de capturadas. Cada ficha no capturada se guarda en la bolsa de sobrevivientes y se reproduce con 2 fichas hijas iguales que recibe el dueño de la ficha. En un nuevo ciclo, los depredadores abandonan la sala y los estudiantes del grupo presa esconden sus fichas hijas en el tablero. El profesor pregunta en ConectaIdeas: *¿Qué tipo de presas (blancas o color tierra) logrará a través de las generaciones aumentar significativamente su cantidad? Explica tu respuesta*.	Fichas blancas serán más fácilmente capturadas
20– 50 (10 mins por gene-ración)	Pide a grupo de depredadores salir de la sala por un minuto Pide a los estudiantes dueños de presas distribuir las fichas en el tablero y que se retiren a sus asientos. Llama a depredadores ingresar a la sala procurando que estos no observen el tablero hasta que da la orden para que los depredadores capturen presas de una en una usando solo una mano y por un tiempo de 5 segundos Pide a estudiantes depredadores poner las fichas recolectadas en bolsa de muertos primera generación Pide a 4 estudiantes ayudar a recoger las fichas del tablero e irlas poniendo una a una en la bolsa sobrevivientes de la primera generación. Antes de ingresar la ficha a la bolsa lee el nombre anotado detrás y al estudiante nombrado le entrega 2 fichas hijas del mismo color. Las fichas capturadas se guardan en bolsa de capturadas. Cuenta según color cuántas fichas sobrevivieron y cuenta según color cuantas fichas fueron capturadas. Solicita anotar estos datos en hoja de control. Solicita informar en voz alta la cantidad de capturados y no capturados en la primera generación Repite el ciclo para la segunda generación y luego la tercera generación.	Se organizan de acuerdo a las instrucciones
50– 70	Solicita a) Completar la tabla de capturados y sobrevivientes por cada generación b) Elaborar gráfico de sobrevivientes en cada generación c) Elaborar gráfico de muertos en cada generación	
70 - 80	Preguntas en plataforma ConectaIdeas: *¿Coinciden los resultados con lo que tú pronosticaste al inicio de la actividad?* *¿Cómo explicarías los resultados obtenidos?* *Describe el mecanismo de Selección Natural* Solicita revisión de pares	Algunos responden que sobreviven por el camuflaje sin dar mayor explicación al fenómeno. El color es un rasgo adaptivo.

80 – 90	¿Cómo opera el mecanismo de Selección Natural? ¿Por qué las liebres, ratones, lobos y muchos animales salvajes son de color tierra? Presenta diseño para mejorar producción de huevos. Productor de huevos escoge de cada jaula de 10 gallinas la que pone más huevos y la reproduce. ¿Qué espera sea la producción de huevos luego de 5 generaciones? ¿Sube, baja o se mantiene igual? Se hizo lo anterior y bajó la producción de huevos. Las gallinas eran muy violentas y peleadoras. ¿A qué puede deberse?	La Selección Natural es ciega pero ciertos rasgos se propagan. Más difíciles ser detectados. Se producirán gallinas que ponen más huevos. Hay un problema de competencia y violencia.

Tabla 1: Plan de clase de modelamiento de la Selección Natural del color

Análisis del discurso docente

En una de las implementaciones de este plan en séptimo básico se obtuvo el siguiente grafo dirigido de conexión entre conceptos claves.

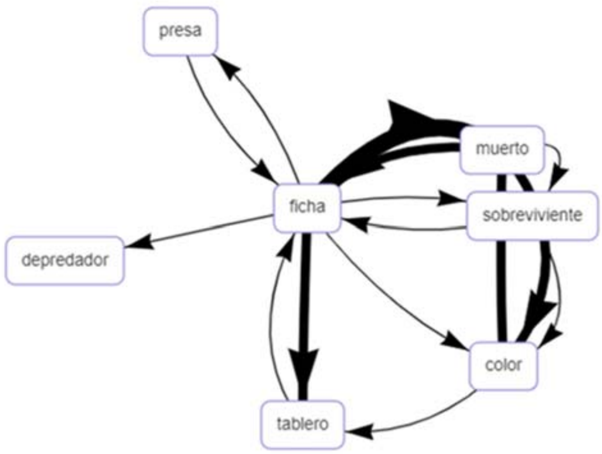


Fig. 2: Grafo de conceptos según coocurrencias en el discurso del profesor. La flecha de ficha a muerto es la más gruesa, por lo tanto, el par más frecuente de coocurrencia en una frasees fiche y luego muerto.

En el grafo de la figura 2 se observa claramente el rol central del modelo, con fichas y el tablero. Además, se observa la secuencia entre organismos muertos y sobrevivientes, y la conexión con el rasgo color.

Observación protocolo COPUS

Reportamos aquí una síntesis de la observación en séptimos. La observación al estudiante se resume en dos gráficos. La figura 3 contiene la proporción de cada grupo de acciones COPUS:

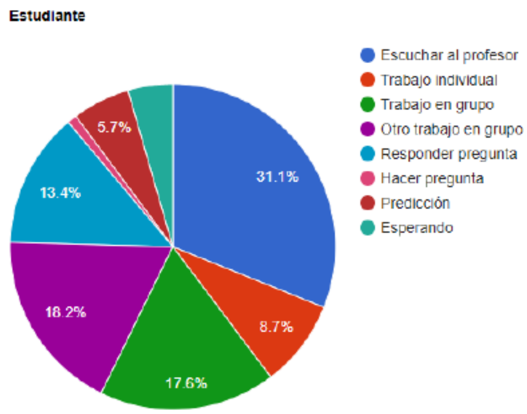


Fig. 3: COPUS estudiante

Es decir, la mayor parte del tiempo los estudiantes escuchaban al docente con 31% del tiempo, pero en trabajo en grupo y otro trabajo en grupo abarcan 36% del tiempo. Muchas de estas actividades son simultáneas. Esto se observa en la distribución temporal del diagrama de la figura 4 (el eje horizontal es tiempo).

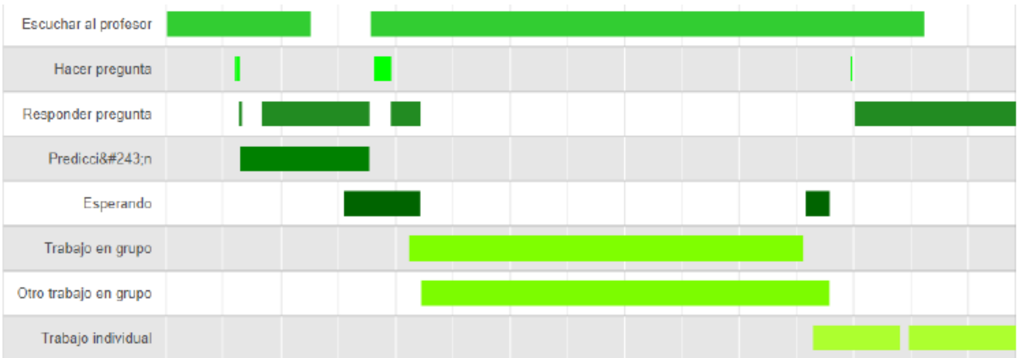


Fig. 4: Distribución de tiempo de cada evento COPUS de estudiantes

En el diagrama se puede observar al inicio que estudiantes casi exclusivamente escucharon al profesor. Luego respondieron preguntas y realizaron predicciones. A continuación trabajaron en grupo, y al final respondieron preguntas y realizaron trabajo individual.

Las acciones del profesor se resumen en la figura 5.

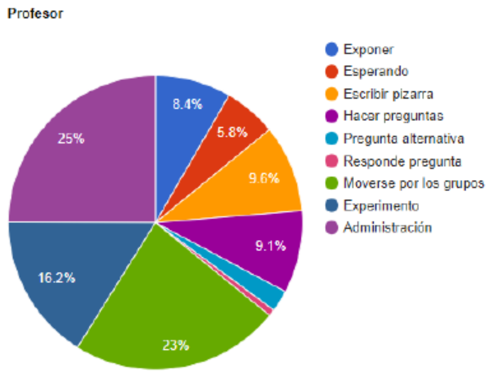


Fig. 5: COPUS profesor

Se observa una gran cantidad de tiempo en administración (25%) y que el profesor se movió por los grupos (23%). Pero como se observa en la figura 6, ambas acciones fueron simultáneas.

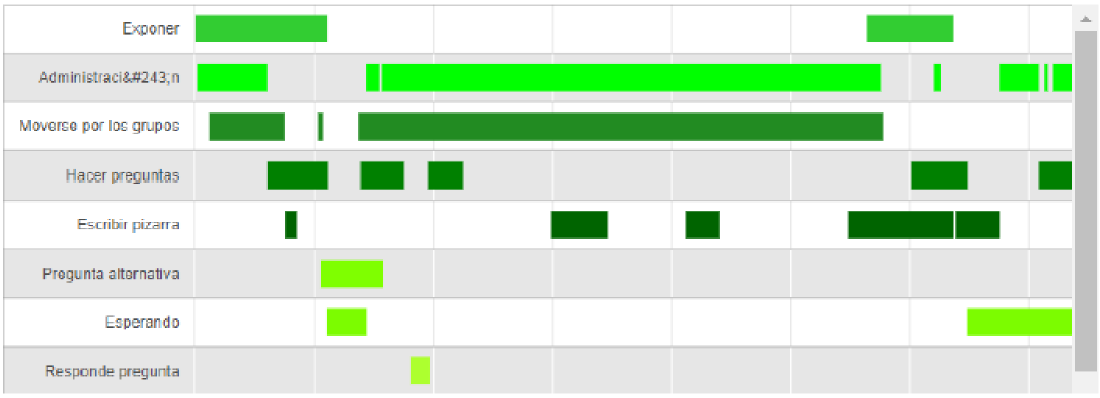


Fig. 6: Distribución de tiempo de cada evento COPUS profesor

Respuestas de estudiantes y comentarios de pares

Frente a la pregunta: *¿Por qué las liebres, ratones, lobos y muchos animales salvajes son de color tierra?,* algunas respuestas escritas en la plataforma ConectaIdeas fueron:

- Porque están mejor adaptados biológicamente para poder camuflarse y poder cazar a sus presas sin que estas se percaten
- Porque los animales de este color acostumbran a camuflarse mejor con el Medio ambiente causando que su caza sea más dificultosa
- Para tener más habilidad al camuflarse ya sea para cazar o esconderse de sus depredadores.
- Porque les sirve de camuflaje, permitiéndoles sobrevivir para reproducirse, traspasando así sus genes a la aproxima generación cosa que no ocurre con otros colores más llamativos, desapareciendo así esa variedad.

En resumen, está la preconcepción de que se camuflan, como un acto voluntario, una decisión de los organismos. Sólo algunos estudiantes ven la consecuencia de la selección. El grafo de la figura 7 resume en parte las respuestas de los estudiantes:

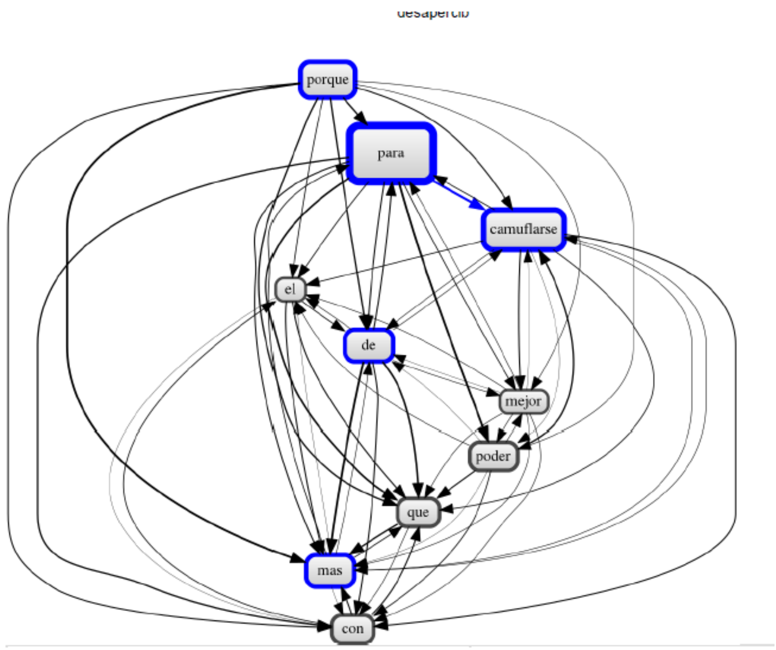


Fig. 7: Grafo que resume las respuestas de los estudiantes. "Más" está sin tilde pues así lo escribieron los estudiantes

En la revisión de pares se observa que los revisores tampoco se percatan de esta concepción errada y tienden a estar de acuerdo. Por ejemplo, dicen

- Sí, correcto, si se camuflan pueden sobrevivir por mucho tiempo.
- Sí, está bien el estar camuflado ayuda a sobrevivir

Este acuerdo se ve en el grafo de la figura 8 que resume los comentarios de los pares.

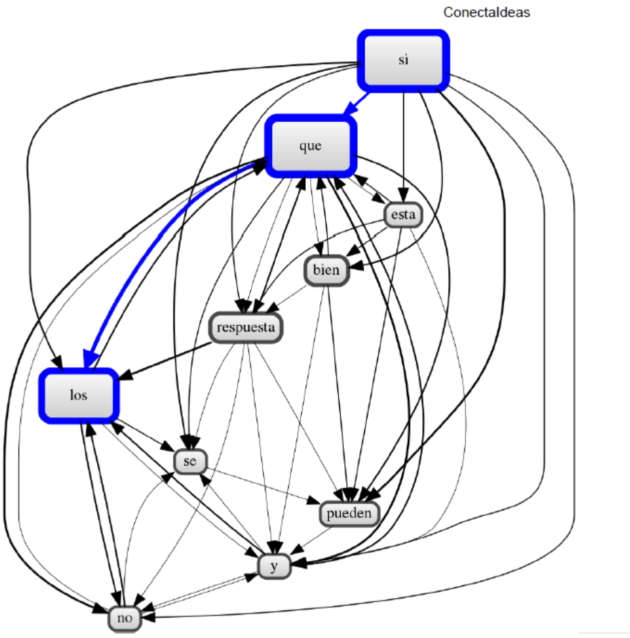


Fig. 8: Grafo que resume los comentarios de los pares. "Está" está sin tilde pues así lo escribieron los estudiantes.

Sin embargo, hay excepciones de estudiantes evaluadores que detectan el error. Por ejemplo, en los comentarios siguientes

- Opino que es más o menos la respuesta, ya que los animales no elijen su color, nacieron así, y los que son color tierra tienen ventaja sobre los otros colores
- Sí está bien la respuesta, pero suena a que pueden cambiar el color

Otros modelos de Selección Natural de rasgos físicos

Con el objeto de ampliar y robustecer el aprendizaje del mecanismo de la Selección Natural, y luego poder pasar a la etapa de Selección de modelo más adecuado, es necesario que los estudiantes conozcan y usen otros modelos para diferentes rasgos. Un modelo que proponemos es el de la Selección Natural del tamaño de los picos en los pájaros, tal como advirtió Darwin en las Islas Galápagos. En este caso el modelo es que cada organismo es una pinza para agarrar papel, pero en lugar de papel cada organismo debe agarrar una bolita en un tiempo dado para poder sobrevivir y reproducirse, como se muestra en la figura 9. Las instrucciones pueden encontrarse en el cómic Pinzones en el enlace: https://www.conectastem.cl/conecta/Comics/pinzones/. La implementación en un cuarto básico puede verse en el video: https://www.conectastem.cl/wp-content/uploads/2018/05/minivideo_pinzones.mp4

Fig. 9: Estudiantes en actividad Pinzones, luego de jugar registraron generaciones, graficaron y buscaron explicación de adaptación de pinzones

En una implementación en cuarto básico, la profesora preguntó: *¿Qué puede observar en el gráfico que te haya parecido especial o curioso o que quiera rescatar?* A continuación se muestran las transcripciones de algunas respuestas:

- Estudiante 1: los chicos (se refiere a las pinzas chicas) no sobrevivieron porque los grandes (pinzas grandes) tomaron chico (bolitas pequeñas)
- Estudiante 2: en la primera generación, como habían tantos grandes, faltó gráfico
- Estudiante 3: en la generación 2 había muchos pinzones grandes

Otro modelo es el de dos especies: una de globos de diferentes tamaños y colores que modelan insectos, y otra de cerbatanas (tubos de plástico) que lanzan plumillas de papel con aguja en la punta. Las cerbatanas modelan ranas con diferentes tamaños de lenguas (cortas y largas). Los globos tienen dos rasgos: tamaño y color (blanco o verde). Se colocan en una pared verde. En cada turno (generación) los estudiantes disparan una plumilla con sus cerbatanas, tal como se muestra en la figura 10. Si aciertan a un globo, entonces se reproducen sus tubos y el estudiante tiene dos cerbatanas del mismo tamaño para la próxima generación. Los globos que sobreviven se reproducen con descendientes del mismo tamaño y color. Los estudiantes apuestan y escriben en la plataforma ConectaIdeas, como se observa en la figura 10.

Fig. 10: A la izquierda, estudiantes apuntando con sus cerbatanas a las poblaciones de globos mostradas a la derecha

Fig. 11: Estudiantes realizando predicciones en la plataforma en smartphones sobre proporción de rasgos en futuras generaciones

Con estos modelos, los estudiantes pueden pasar a seleccionar el más adecuado para modelar una nueva situación. Por ejemplo, para modelar el cambio de color a negro de la polilla moteada, que rápidamente apareció en las zonas industriales del Reino Unido durante el siglo XIX, cuando el hollín ennegreció los troncos de los árboles y las paredes de su hábitat. Otra actividad de modelamiento es la de escoger y adaptar uno de los modelos para explicar el alargamiento del cuello de la jirafa.

4. Modelamiento de la Selección Natural de la cooperación

El desafío de la Selección Natural de la cooperación

Uno de los problemas centrales en el entendimiento de la Selección Natural y la evolución es que es el mecanismo que explica la evolución no sólo de rasgos físicos sino también rasgos conductuales, como hambre, miedo, agresividad, etc. Aún más, dentro de los rasgos conductuales, el quizás más contra intuitivo para explicar con el mecanismo darwiniano de Selección Natural es la cooperación. Hay una preconcepción muy arraigada de que la competencia darwiniana promueve sólo el egoísmo, y que la cooperación y el altruismo no emergen, no se favorecen, no son adaptivos, y los organismos con esos rasgos están en desventaja y desaparecen (Nowak, 2012). O como lo expresa el filósofo Daniel Dennett (en Brockman, 2019) "¿Cómo puede un conjunto de billones de células egoístas y miopes descubrir el trabajo en equipo involuntario que convierte a ese grupo dinámico en una persona que puede amar, estar consciente, preguntarse y cumplir una promesa?". Según el antropólogo Joseph Henrich (2017) el secreto del éxito de nuestra especie no reside en nuestra inteligencia innata, sino en nuestro cerebro colectivo, en la capacidad de los grupos humanos para interconectarse socialmente y aprender unos de otros durante generaciones. La actividad que sigue apunta a entender el fenómeno de cooperación que es una pieza central para la formación ciudadana.

Propuesta de modelamiento de la Selección Natural de la cooperación

Con el propósito de reflexionar sobre este desafío conceptual se propone una clase sobre el mecanismo de Selección Natural para explicar cómo emerge la cooperación.

El Objetivo de la clase es que los estudiantes logren:

- Comprender la cooperación como un rasgo adaptivo que provee ventajas a los organismos y que por lo tanto emerge en ciertos nichos.
- Utilizar un modelo físico (un juego) para modelar el mecanismo de Selección Natural y comprendan cómo un rasgo conductual se puede modelar con una característica física del modelo

Los materiales requeridos son:

- 2 contenedores plásticos de 0.5 x 1.0 m adaptado con una red y una ventana en la tapa, tal como se muestra en las figuras 12 y 13.
- Adornos de navidad tipo guirnaldas esféricas de distintos tamaños
- Ganchos elaborados con alambre de dos tipos: gancho simple y gancho doble de unos 4 cm, tal como se ilustra en la figura 12.
- Bolsas para guardar ganchos y adornos que indiquen generación I, II y III para organismos muertos y sobrevivientes que logran reproducirse.
- Una plataforma online para realizar apuestas, responder a preguntas abiertas, y comentar las explicaciones escritas de otros estudiantes. En este estudio se utilizó la plataforma ConectaIdeas.

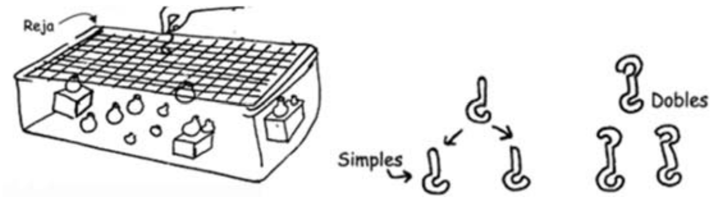


Fig. 12: Ganchos simples y ganchos dobles, que representan organismos

Fig. 13: Modelo de ecosistema con una caja con reja en la parte superior, con modelo de alimento con guirnaldas esféricas a diferentes alturas y dificultad de agarrarlas, y modelo de organismos con ganchos de dos tipos: simples y dobles

La descripción del juego puede encontrarse en el cómic en el enlace: https://www.conectastem.cl/conecta/Comics/coopera/

Tiempo (mins)	**Actividad del profesor**	**Respuestas previstas de los estudiantes**
0 – 15	Explica la actividad. Divide al curso en dos grupos: Uno con ganchos simples y otro con ganchos dobles, que serán dos rasgos de la misma especie Se entregan 2 ganchos del mismo tipo a cada integrante del grupo Pregunta ¿Qué tipo de individuos logrará a través de las generaciones aumentar significativamente su cantidad? Explica	Se organizan de acuerdo a las instrucciones
15– 50	Dispone las cajas con los adornos en su interior en dos lugares distintos Solicita pasar a los estudiantes de cada caja una mitad de ganchos simples y otra mitad con ganchos dobles. Pide coger con los ganchos solo un adorno de la caja a través de la red, en solo un minuto	Realizan muchas preguntas para obtener claridad respecto a la actividad Cómo usar los ganchos dobles

	Otorga un minuto para alimentarse. Se crea así un juego tipo torneo dentro del curso. Explica las reglas: • Ganchos que no lograron capturar un adorno van a bolsa muertos primera generación • Ganchos que lograron capturar un adorno van a la bolsa de sobrevivientes primera generación y entrega al estudiante dos ganchos similares al sobreviviente. • Los adornos capturados se retiran de la caja. • Pide anotar estos datos en hoja de control. Informa en voz alta la cantidad de muertos y sobrevivientes de la primera generación. Pide repetir el ciclo para la segunda generación y luego la tercera generación	Preguntan por el caso en que se una un gancho simple con uno doble
50– 65	Solicita: d) Completar la tabla de muertos y sobrevivientes por cada generación e) Elaborar gráfico de sobrevivientes en cada generación f) Elaborar gráfico de muertos en cada generación	
65 - 80	Hace las siguientes preguntas en ConectaIdeas: ¿Coinciden los resultados con lo que tú pronosticaste al inicio de la actividad? ¿Cómo explicarías los resultados obtenidos? Señala luego de esta experiencia tu opinión respecto al mecanismo de cooperación entre los seres vivos de una misma especie	Están divididas las respuestas, porque al principio había diferencias de opiniones. Creen que la cooperación es importante para sobrevivir, pero no la ven como un mecanismo claro en los animales no pensantes.
80 – 90	Reflexiona la idea que la cooperación es un factor que no solo existe entre individuos pensantes, sino que es un rasgo adaptivo en muchas especies. Expone experimento de selección de gallinas para mejorar producción de huevos. Caso A: se reproduce gallina más ponedora de cada jaula. Caso B: se reproducen totas las gallinas de la jaula con mayor producción de huevos.	La cooperación es un factor importante pero que se visualizaba solo como un factor presente entre los humanos Estudiantes apuestan por A. Al conocer que es B argumentan sobre posibilidad de cooperación.

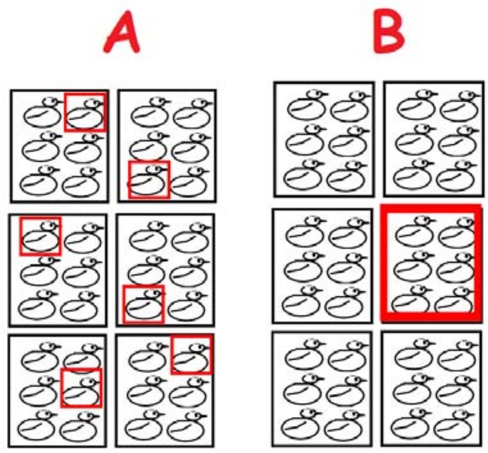
	 Después de varias generaciones, ¿mecanismo A o B produce más huevos?	

Tabla 2: Plan de clase de modelamiento de la Selección Natural de la cooperación

Respuestas de estudiantes y comentarios de pares

Los estudiantes predijeron lo que iba a suceder. Más específicamente, ante la pregunta: *Al final de la tercera generación ¿cuál será el resultado más probable?,* la distribución de respuestas fue la mostrada en la figura 14.

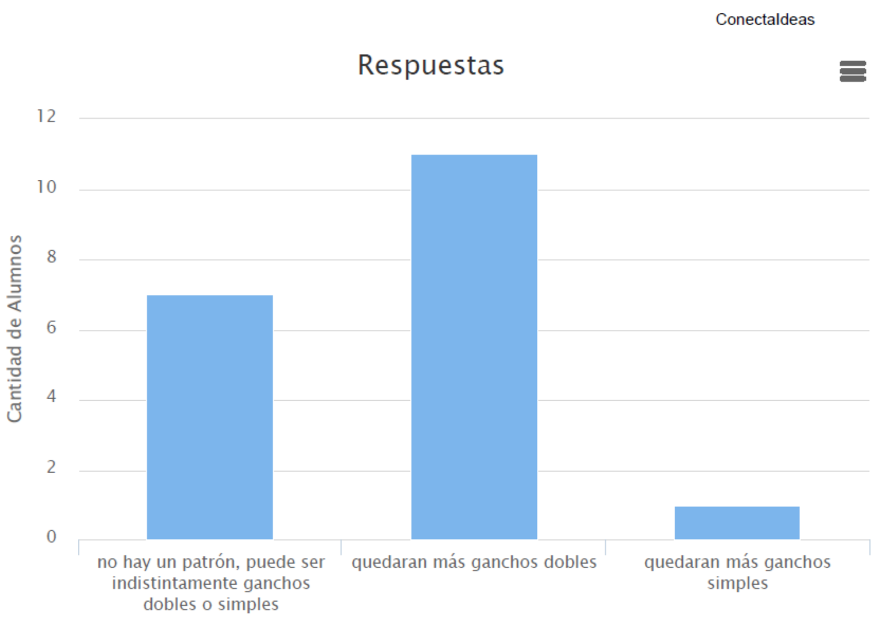


Fig. 14: Predicciones de los estudiantes

Luego, ante la pregunta: *Explica el porqué de tu elección*, algunas explicaciones de los estudiantes muestran una buena comprensión del fenómeno y de entendimiento del modelo. Por ejemplo:

- Porque ya en la tercera generación solo quedaran "frutas" pequeñas y al quedar solo esas se necesitarán más ganchos dobles
- Porque se pueden unir entre sí, se pueden ayudar entre sí = cooperación
- Porque los dobles son capases de comer presas más complicadas, por lo cual, al acabar las presas fáciles, serán los únicos que sobrevivan.

Una de las preguntas realizadas en la plataforma ConectaIdeas tenía por objetivo inducir a la reflexión sobre el modelo y el proceso de modelamiento.

Indica qué opinas del modelo de cooperación de la actividad realizada, ¿qué le falta?; ¿qué está bien en el modelo? Algunas respuestas fueron:

- Está bien porque algunas pelotas estaban más bajos que otras y tenías que cooperar para conseguirla
- Me encantó porque se puede ver las habilidades que tiene cada uno y superarse más cada día y se puede ver que uno se brinda apoyo mutuamente y el modelo está bien y es muy ingenioso y volvería a realizar esta actividad
- Yo considero que el modelo estaba bien, encuentro que no le falta nada, que nos ayuda a cooperar con los demás o en otros casos pedir ayuda

En la revisión de parecen la plataforma ConectaIdeas, los revisores hicieron comentarios como:

- A mi parecer no le falta nada, que todos trabajamos muy bien y en equipo todos juntos.... si estoy de acuerdo ya que todos en conjunto nos sirve cooperar entre todos
- Que tiene razón, ya que siempre nos enseñan escribiendo y no con cosas didácticas.
- Depende de cada persona por ejemplo yo no le ayudé a nadie a sacar las pelotas y a mí nadie me ayudó
- Que está bien y eso te hace pensar de otra forma y desarrollas habilidades nuevas porque generaba un poco más la dificultad

Dado que no existe un set de 20 preguntas para Selección Natural y cooperación para enseñanza media, se diseñó un espectro amplio de preguntas generales sobre Selección Natural. En 5 de ellas se obtuvieron progresos medibles, pero en sólo 4 estadísticamente significativos.

Las clases realizadas de Selección Natural fueron muy atractivas para los estudiantes. Se recibieron 43 respuestas, cuyos resultados se muestran en la figura 15. El 88,4% de los estudiantes recomienda la clase en la que participó, y sólo el 11,6% no lo hace. Sólo el 4,7% de los estudiantes consideró que la clase no era entretenida. Hay que considerar que muchos participaron en primeras versiones de las clases, versiones que aún estaban en diseño y testeo. Es muy interesante además observar que el 41,9% de los estudiantes declaró que el contenido era completamente nuevo, nunca visto anteriormente.

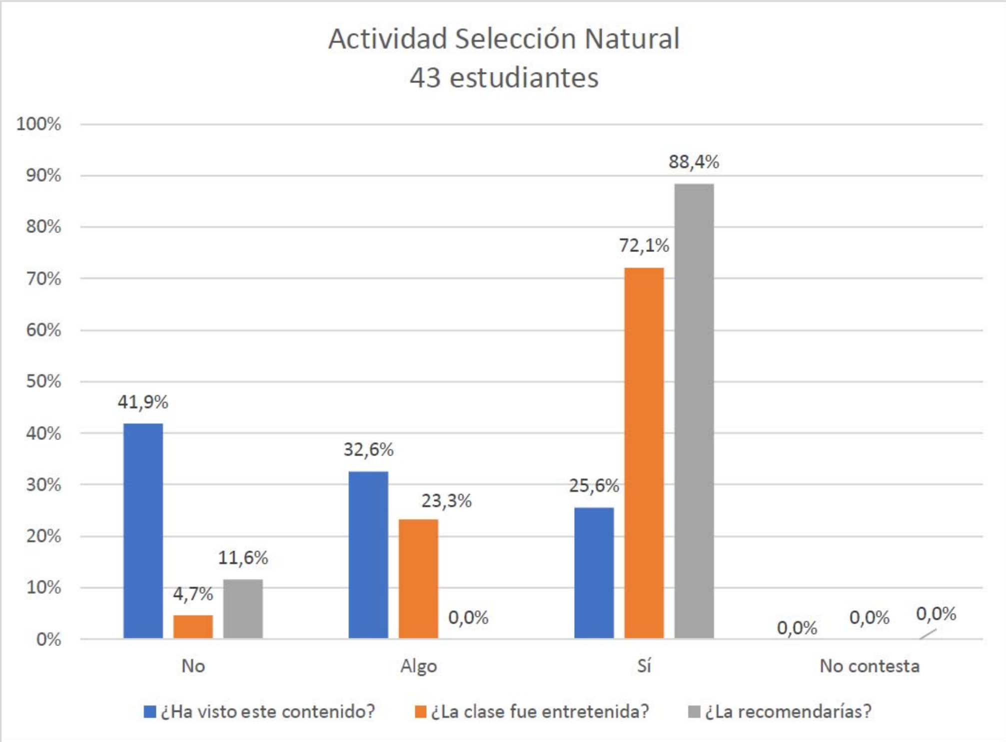


Fig. 15: Resultados de la encuesta a estudiantes

5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la aplicación de la estrategia dual de transición y con juego para el modelamiento de un problema STEM de gran importancia: la Selección Natural de la cooperación. Por una parte, la Selección Natural es uno de los conceptos centrales y unificadores de la biología. Es un concepto de gran complejidad y su aprendizaje es un enorme desafío educacional. Las fuertemente arraigadas preconcepciones erradas innatas, que incluye un fuerte sesgo esencialista, dificultan la comprensión. Esta dificultad se acentúa en rasgos no físicos como el hambre, el miedo, el sentir dolor, la osadía, la agresividad, etc., y, dentro éstos, uno de los más contra intuitivos es la Selección Natural de la cooperación.

La cooperación es no sólo un fenómeno muy complejo y esencial para la biología, sino también es central para las ciencias sociales, la economía y la psicología. Este problema emerge por ejemplo en la aparición y evolución del sexo, que es una forma de cooperación. También emerge en el altruismo, y particularmente en el altruismo entre no parientes. Emerge también en los animales sociales, que no sólo poseen rasgos de cooperación para defenderse, cazar y alimentarse sino también cooperan e intercambian servicios (Fruteau et al., 2009) en mercados biológicos con ciertas similitudes a los mercados humanos (Noe, 2016).

Para facilitar el aprendizaje, hemos propuesto una estrategia dual de enseñanza de modelamiento. Por una parte, es una estrategia de transición que comienza con el uso de varios modelos, y paulatinamente pasa a seleccionar, adaptar y a construir modelos. Por otra parte, hemos propuesto modelos que son juegos con material concreto y en los que juega todo el curso. En los juegos se usan fichas y otros materiales concretos, que modelan agentes. Los agentes son completamente autónomos, pues son realmente los mismos estudiantes pero que sólo deben seguir las reglas del juego y hacerlo con las capacidades de sus fichas, ganchos u otros materiales con los que emulan a los agentes. Este tipo de modelos es también un inicio al pensamiento computacional, de creciente importancia en los currículos, y a modelos computacionales, y particularmente a algoritmos genéticos (Araya et al., 2020).

En las implementaciones realizadas de estas clases de modelamiento, los estudiantes de primer y segundo ciclo de enseñanza básica y los de enseñanza media, han podido exitosamente lograr manejar los conceptos de población, de rasgos, heredabilidad y generaciones. Han asimilado que los organismos se modelan como agentes y que en forma concreta pueden asimilarse a fichas, globos, pinzas, ganchos, tubos, etc. Han experimentado jugando con los modelos, y han podido asimilar que usar un modelo es jugar siguiendo las reglas del juego. Han tenido directamente la experiencia de percibir y analizar que el comportamiento colectivo sigue patrones, aun cuando cada agente actúe autónomamente. Han visto que no hay nada esencialista, sino rasgos que se heredan pero que según las condiciones ecológicas hacen que la proporción de esos rasgos aumenten o disminuyan al pasar las generaciones.

Si bien hay una preconcepción fuertemente arraigada de que la competencia darwiniana promueve el egoísmo, y que la cooperación no emerge y no sería adaptiva, los estudiantes han podido comprender que en ciertas condiciones sí emerge la cooperación. Han dado muestra de ello en sus predicciones y en las explicaciones verbales y las escritas en la plataforma online ConectaIdeas, y en las revisiones escritas a las explicaciones de sus pares. Esta actividad no modela toda forma de cooperación, pero sí logra que los estudiantes comprendan que la cooperación no se opone a la Selección Natural. Por el contrario, es compatible y emerge naturalmente en ciertos ambientes.

Esta actividad propuesta de modelamiento es una actividad verdaderamente multidisciplinaria. Además de biología, e incluir componentes de psicología y sociología, requiere la habilidad de usar y ajustar modelos para hacer predicciones y explicaciones, usar razonamiento poblacional a través de múltiples generaciones, y pensamiento estadístico, desde proporciones e histogramas hasta mecanismos que puedan ayudar a sostener y explicar las predicciones.

Los estudiantes participaron activamente con los modelos propuestos. Sus explicaciones escritas en la plataforma muestran que muchos logran argumentar que la cooperación es adaptiva en ciertas condiciones y que por lo tanto aumentará la proporción de la población que coopera.

Adicionalmente, la gran mayoría encontró que es una actividad muy entretenida y la recomiendan como estrategia didáctica.

En conclusión, la estrategia dual de transición y de usar juegos con la participación de todos los estudiantes sin excepción, no sólo resulta muy atractiva sino también es una alternativa muy promisoria para aprender a modelar y así entender el mecanismo de Selección Natural de la cooperación.

Agradecimientos

Se agradece el financiamiento otorgado por ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003.

Bibliografía

Allman, J. (1999). *Evolving Brains*. New York, NY: *Scientific American Library*.

Araya, R. (1997). *Construcción Visual de Conocimientos con Juegos Cooperativos: una Propuesta Educacional*. AutoMind Educación. Chile.

Araya, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.

Araya, R. (2004). Improving Math Education in Chile: Standards, e-Tutoring and Multiplayer Games. *Proceedings of the APEC Seminar on Best Practices and Innovations in the teaching and learning of Science and Math*. Penang, Malasia.

Araya R. (2007). What is inside this box: look at these other opened boxes for clues. *Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Group 1: The role of Metaphors.* http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/ WG1.pdf

Araya, R. (2012). Introducing Mathematical Modeling Skills in the Curriculum. In *Mathematical Modeling Course in Mathematics Curriculum: Some Best Practices in APEC Economies*. http://publications.apec.org/publication-detail.php?pub_id=1362

Araya, R. (2016). STEM y Modelamiento Matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15) 291-317.

Araya, R. (2017). *Clases Públicas STEM: Incendios Forestales*. Santiago de Chile: CIAE.

Araya, R. (enviado) Math Teacher Education to Prepare Students for the 21st Century Jobs: Mathematical Modeling and Computational Thinking.

Araya, R., Bahamondez, M., Contador, G., Dartnell, P. & Aylwin, M. (2013). Enseñanza de la Selección Natural con Juego Masivo por Internet. *Congreso de Pedagogía 2013*, La Habana, Cuba.

Araya, R., Jiménez, A., Bahamondez, M., Dartnell, P., Soto-Andrade, J. & Calfucura, P. (2014). Teaching Modeling Skills Using a Massively Multiplayer On Line Mathematics Game.

World Wide Web Journal. Springer. March, 2014, Vol 17, Issue 2, pp. 213-227. 10.1007/s11280-012-0173-5

Araya, R., Aguirre, C., Calfucura, P. & Jaure, P. (2017). Using Online Synchronous Interschool Tournaments to Boost Student Engagement and Learning in Hands-On Physics Lessons. En *Advanced Computational Methods for Knowledge Engineering Advances in Intelligent Systems and Computing,* pp. 84-94. Springer 10.1007/978-3-319-61911-8_8

Araya, R., Arias Ortiz, E., Bottan, N. & Cristia, J. (2019). Does Gamification in Education Work? Experimental Evidence from Chile. *IDB WORKING PAPER SERIES Nº IDB-WP-982 Inter-American Development Bank.* http://dx.doi.org/10.18235/0001777

Araya, R., Isoda, M. & González, O. (2020). A Framework for Computational Thinking in Preparation for Transitioning to a Super Smart Society. *Journal of Southeast Asian Education*, *1*, 1-15

Araya, R. & Collanqui, P. (2021) "Are Cross-Border Classes Feasible for Students to Collaborate in the Analysis of Energy Efficiency Strategies for Socioeconomic Development While Keeping CO2 Concentration Controlled?" Sustainability 13, no. 3: 1584. https://doi.org/10.3390/su13031584

Berkman, M. & Plutze, E. (2011). Defeating Creationism in the Courtroom, but not in the classroom. *Science*, January, 2011, Vol 331.

Bloom, P. & Weisberg, D. (2007). Childhood Origins of Adult Resistance to Science. *Science*, 316(5827), 996-997

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning How To Teach Mathematical Modeling – in School and Teacher Education.* New York: Springer.

Brockman, J. (2019). The Last Unknowns: Deep, Elegant, Profound Unanswered Questions About the Universe, the Mind, the Future of Civilization, and the Meaning of Life. New York: William Morrow Paperbacks. https://www.edge.org/the-last-question-3

Caballero, D., Araya, R., Kronholm, H., Viiri, J., Mansikkaniemi, A., Lehesvuori, S., Virtanen, T. & Kurimo, M. (2017) ASR in Classroom Today: Automatic Visualization of Conceptual Network in Science Classrooms. *Lecture Notes in Computer Science, 10474,*541-544. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66610-5_58

Caballero, D., Pikkarainen, T., Araya, R., Viiri, J. & Espinoza, C. (2019). Conceptual Network of Teachers' Talk: Automatic Analysis and Quantitative Measures. *Finnish Mathematics and Science Education Research Association FMSERA Journal, 3*(1), 18-31. https://journal.fi/fmsera/article/view/79630

ConectaIdeas https://www.conectaideas.com

Edwards, K., De Vries, D. & Snyder, J. (1972) *Games and Teams: A Winning Combination*. Report 135. Center for Social Organization of Schools. Johns Hopkins University

Epstein, J. & Axtell, R. (1996). *Growing artificial societies: social science from the bottom up.* Massachusetts: Brookings Institution Press.. ISBN 978-0-262-55025-3.

Epstein, J. (2008). Why model? *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, *11*(4), 12 http://jasss.soc.surrey.ac.uk/11/4/12.html

Epstein, J. (2006). *Generative Social Science. Studies in Agent-Based Computational Modeling*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Espinoza, C., Pikkarainen, T., Viiri, J., Araya, R., Caballero, D., Jiménez, A. & Gormaz, R. (2019). Analyzing Teacher Talk Using Topics Inferred From Unsupervised Modeling From Textbooks. *Finnish Mathematics and Science Education Research Association FMSERA Journal*, *3*(1), 4-17. https://journal.fi/fmsera/article/view/79631

Evans, M. (1999). The Emergence of Beliefs about the Origins of Species in School-Age Children. *Merril-Palmer Quaterly*, *46*(2), 221-254.

Evans, E. M. (2001). Cognitive and contextual factors in the emergence of diverse belief systems: Creation versus evolution. *Cognitive Psychology*, *42*, 217-266.

Fruteau, C., Voelkl, B., van Damme, E. & Noë, R. (2009). Supply and demand determine the market value of food providers in wild vervet monkeys. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106(29) 12007-12012; DOI: 10.1073/pnas.0812280106

Galvez, G. (2015). Lesson Study in Chile, in M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson, and B-HYeap, (Eds.). *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific Press, pp. 243-254.

Gelman, S. (2003). *The Essential Child: Origins of Essentialism in Everyday Thought*. Oxford University Press.

Green, S., Boruff, B. & Grueter, C. (2019). Chimpanzees use advanced spatial cognition to plan least-cost routes. *bioRxiv* 793562; doi: https://doi.org/10.1101/793562

Henrich, J. (2015). The Secret of Our Success: *How Culture Is Driving Human Evolution, Domesticating Our Species, and Making Us Smarter*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H. & Jacobs, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMMS 1999 video study*. U.S. Department of Education, National Centre for Educational Statistics.

Holland, J. (1998). *Emergence. From Chaos to Order.* Addison Wesley, Reading, MA.

Holmes, N., Wieman, C. & Bonn, D. (2015). Teaching critical thinking. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 112*(36), 11199-11204.

Hull, D. (1965). The effects of essentialism on taxonomy: Two thousand years of stasis. *The British Journal for the Philosophy of Science*, *15*, 314-326.

Inprasitha, M., Isoda, M., Wang-Iverson, P. & Yeap, B-H. (2015): *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific Press.

Inagaki, K. & Hatano, G. (2006). Young Children´s Conception of the Biological World. *Current directions in Psychological Science, 15*(4), 177-181.

Isoda M., Arcavi A. & Mena-Lorca A. (2012).: *El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*, 3ª. ed., (2012). Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Krajcik, J. & Merritt, J. (2012). Engaging Students in Scientific Practices: What does constructing and revising models look like in the science classroom? Understanding A Framework for K−12 Science Education. *Science Scope*, *35*(7), 6-8.

Kuhlmeier VA, Boysen ST. Chimpanzees (Pan Troglodytes) Recognize Spatial and Object Correspondences Between a Scale Model and Its Referent. Psychological Science. (2002).13(1):60-63. doi:10.1111/1467-9280.00410

Lingefjard, T. (2007). Mathematical Modelling in Teacher Education – Necessity or Unnecessarily. In W. Blum., P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer.Llinás, R. (2001). i of the vortex. From Neurons to Self. Cambridge, MA: MIT Press.

Maynard-Smith, J. & Szathmary, E. (1999). *The origins of Life. From the Birth of Life to the Origins of Language*. Oxford: Oxford University Press.

Mayr, E. (1982). *The growth of biological thought: Diversity, evolution and inheritance*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Morell, V. (2015) Do Animals Teach? National Wildlife https://www.nwf.org/Magazines/National-Wildlife/2015/OctNov/Animals/Animal-Teaching

Muir, W.M. (1995). Group Selection for Adaptation to Multiple-Hen Cages: Selection Program and Direct Responses. *Poultry Sciences 75*(4), 447-458

Noë, R. & Hammerstein, P. (1994). Biological markets: supply and demand determine the effect of partner choice in cooperation, mutualism and mating. *Behav. Ecol. Sociobiol. 35*, 1–11. https://doi.org/10.1007/BF00167053

Noë, R. (2016). How do biological markets compare to the markets of economics? *MPRA Paper No. 72509*, posted 12 Jul 2016 22:17 UTC

Nowak, M. (2012) SuperCooperators: Why We Need Each Other to Succeed. New York: Free Press.

OECD. (2019). "Play!", *Trends Shaping Education Spotlights, No. 18*. Paris: OECD Publishing https://dx.doi.org/10.1787/a4115284-en

Page, S. (2018). *The Model Thinker. What you need to know to make data work for you*. New York: Basic Books.

Pellegrini, A. (2009). The Role of Play in Human Development. New York: Oxford University Press.

Powell, J., Cangelos, J. & Harris, A. (1998). Games To Teach Mathematical Modelling. *SIAM REV.*, *Society for Industrial and Applied Mathematics, 40*(1), 87-95.

Saari, H. & Viiri, J. (2003). A Research-based teaching sequence to teach the idea of modelling to seventh grade students. *International Journal of Science Education 25*(11),1333-1352

Scalise Sugiyama, M., Mendoza, M., White, F. et al. (2018). Coalitional Play Fighting and the Evolution of Coalitional Intergroup Aggression. *Hum Nat 29*, 219–244. https://doi.org/10.1007/s12110-018-9319-1

Schelling, T. (1971). Dynamic Models of Segregation. *Journal of Mathematical Sociology, 1*(2), 143-186.

Shtulman, A. (2006). Qualitative differences between naïve and scientific theories of evolution. *Cognitive Psychology*, *52*, 170-194.

Smith M., Jones F., Gilbert, S. & Wieman C. (2013). The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS): A New Instrument to Characterize University STEM Classroom Practices, *CBE—Life Sciences Education*, *12*, 618-627.

Stiegler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: Free Press

Tomasello, M. (2009). *Why we cooperate*. Cambridge, MA: MIT Press.

The National Academies. (2006). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8*. Washington, DC: The National Academy Press.

The National Academies. (2012). Thinking Evolutionarily: Evolution Education Across the Life Sciences: Summary of a Convocation. Washington, DC: The National Academy Press, 2012.

Turchin, P. (2016) *Ultrasociety, How10,000 years of war made humans the greater cooperators on earth.* Chaplin, CT: Beresta Books.

Vincent-Lancrin, S., Urgel, J., Kar, S. & Jacotin, G. (2019). Measuring Innovation in Education. A Journey to the Future. Paris: OECD Publishing.

Voinov, P.V., Call, J., Knoblich, G., Oshkina, M. & Allritz, M. (2020). Chimpanzee Coordination and Potential Communication in a Two-touchscreen Turn-taking Game. *Sci. Rep. 10*, 3400. https://doi.org/10.1038/s41598-020-60307-9

Wang-Iverson, P. & Yoshida, M. (2005). *Building our Understanding of Lesson Study*. Philadelphia: Research for Better Schools.

Capítulo 4

STEM usando la web: una forma de trabajar con otras disciplinas y desarrollar la matemática funcional

Jaime Huincahue[1], Paulina Mena[2] y Jaime Mena-Lorca[3]
[1]Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Maule, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile
[2]Biology Department, Central College, Pella Iowa, United States
[3]Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Los informes internacionales sobre la enseñanza que se necesita para un ciudadano del siglo XXI, muestran una gran preocupación por cambiar la enseñanza centrada en contenidos por una que permita al individuo adaptarse a las nuevas y cambiantes necesidades laborales, sea por la globalización de los trabajos y/o por el creciente uso de tecnología en las empresas, mediante el trabajo en equipo, el manejo de la información y el uso de las nuevas tecnologías. En este artículo mostramos una vía factible de uso de internet por profesores de matemáticas de todo nivel, apoyado fuertemente en el interés de los alumnos en los temas, el trabajo en equipo con profesores de otras disciplinas, el uso de recursos de la web y el manejo de celulares; lo cual, a su vez, potencia y/o abre el aula de matemática al aporte de profesores de otras áreas. Presentamos el cómo usar la web en clases, promoviendo un trabajo interdisciplinario y/o STEM en control de plagas, manejo de recursos energéticos limpios, y en general, ejemplos de cómo el conocimiento propio del estudiante es asociado a la matemática.
Palabras clave: Recursos de internet, modelización matemática, educación STEM, educación matemática interdisciplinaria.

1. Introducción

En un informe de la OCDE (OECD/Asia Society, 2018), se analizan experiencias piloto realizadas alrededor del mundo en cursos de matemática y otras disciplinas, para el desarrollo de competencias del ciudadano global, es decir, pensando que el escenario de los trabajos del futuro de los actuales estudiantes no serán los típicos trabajos del hoy (y ya hemos visto cómo este proceso se ha acelerado con la pandemia). Una de las razones para aquellos análisis es que la tecnología ya está cambiando los tipos de trabajos existentes[3]; más aún, debido a la gran interacción económica y dependencia entre los países, los nuevos profesionales tendrán que integrar equipos de empresas internacionales y lidiar con los constantes cambios que requerirán otras habilidades y conocimientos, que deberán desarrollar o adquirir en corto plazo, para adaptarse a los nuevos escenarios de carácter global.

En relación a las matemáticas, la OECD (OECD/Asia Society, 2018) concluye que la matemática es un lenguaje global, en el sentido de que los matemáticos de todo el mundo comparten entendimientos comunes, pero a su vez, afirma que los profesores de matemáticas se centran en enseñar matemáticas, y que en general, no usan datos reales sobre cuestiones globales, tales como crecimiento de poblaciones, el desarrollo económico global y del país, etc. Esta situación se agudiza más con los efectos adversos que poseen las pruebas estandarizadas en Chile (Vergara, 2017).

Lo que presentamos a continuación pretende ayudar a los profesores de matemáticas (y colegas de otras disciplinas) en la tarea de preparar a sus estudiantes a cómo usar recursos existentes en la web, permitiéndoles —como efecto lateral— valorar la matemática como un conocimiento útil en la vida cotidiana, que es capaz de conectar distintos tipos de información, y hace posible extraer conclusiones a partir de datos reales, de tal manera que se propicien espacios de interés para los estudiantes sobre problemáticas que caractericen, y nuevos conocimientos matemáticos, especialmente, aquellos que les dan sentido a la matemática, priorizando "lo matemático" de la situación[4]. Una ilustración de lo anterior es la tarea de modelización propuesta en la Figura 1 (Huincahue, 2017), e inspirada en Blum y Borromeo-Ferri (2009).

Imagina que un aro de "hula-hula", además de servir para jugar con él, puede ser el anillo de un gigante… ¿Cuánto mediría el pie del gigante?

Fig. 1: Tarea de modelización (Huincahue, 2017)

[3] Ya podemos notar una gran cantidad de procesos en los bancos e instituciones públicas que han sido automatizados, reemplazando a los trabajadores por máquinas, por ejemplo, operaciones bancarias varias, emisión de certificados, etc.

[4] Al modelar "lo parabólico" de la función cuadrática (Mena-Lorca, 2016; Mena-Lorca, Klenner, y Alarcón-Relmucao, 2020).

Idealmente, en un contexto presencial, la experimentación considera que los estudiantes logren medir un aro de hula-hula. Analizando la tarea desde la perspectiva del profesor, nos damos cuenta que la tarea ofrece información únicamente cualitativa, en la cual no se provee de una fórmula que guíe el trabajo matemático, o una forma de resolver la tarea, y tampoco propone una estrategia sobre cómo abordar la pregunta. En un contexto virtual, inicialmente podríamos suponer que tendremos una dificultad debido a la poca accesibilidad a un "hula-hula (*hula-hoop*); además, el problema es atípico en relación con la manera en que se suelen enunciar las tareas, en que se comienza por dar los datos y fórmulas. Sin embargo, nos hemos dado cuenta en las experimentaciones realizadas que sin el hula-hula el entendimiento de la tarea se logra con el uso de otro material concreto, el cual a su vez permite el desarrollo matemático basado en la proporcionalidad directa. Esto mismo nos ha permitido usar otro tipo de material concreto, recurriendo a una miniatura factible de encontrar entre los juguetes, por ejemplo. En definitiva, el problema a plantear dependerá del acceso a materiales concretos que estén disponibles para realizar la actividad. Respecto a los datos, los estudiantes comúnmente miden el perímetro o diámetro asociado al modelo de circunferencia del hula-hula, para establecer relaciones matemáticas entre tal perímetro o diámetro, y longitudes propias de su cuerpo, por ejemplo, el largo de los pies o las manos, con el fin de establecer las dimensiones del gigante. En ocasiones, hemos presenciado discrepancias frente al modelo del gigante; para ello hemos dejando consensuar este tipo de decisiones en los grupos de estudiantes. Hemos reconocido esta dificultad como una oportunidad de desarrollo de otros tópicos matemáticos o interdisciplinarios; por ello, la tarea fue planteada para ser desarrollada durante 120 minutos, y en un entorno con acceso a internet, centrando el interés en la exploración de modelos matemáticos que vinculen el uso del número áureo y los estudios generados por Da Vinci, que trata sobre las proporciones del ser humano, logrando gran interés en los estudiantes, que lo ven como un modelo de proporcionalidad aceptable para el gigante. La síntesis de esta última experiencia planteó el reconocimiento de patrones corporales no solo en imágenes de internet, de una polera, o de la cultura pop sobre el Hombre de Vitruvio, sino también morfometría geométrica que inmediatamente asociaron al arte y a su cuerpo. Esta tarea ha servido para desencadenar conocimiento matemático, planteando un significado del saber a partir del uso de la matemática en situaciones diversas, en donde nosotros como profesores somos las personas encargadas de orientar horizontes de conocimiento.

La tarea de la Figura 1 también ha sido experimentada en un ambiente sincrónico, aunque existe una natural complejidad sobre cómo medir el hula-hula, la que ha sido abordada otorgando los datos suficientes para que puedan resolver la tarea, específicamente, que el perímetro del hula-hula mide 190 cm. o que el diámetro mide 63 cm. Claramente, este tipo de datos no significa que exista una única solución de la tarea, y por lo tanto, la invitación al profesor es que los

procesos evaluativos se centren en el razonamiento matemático y cómo éste es desarrollado, más que el valor numérico.
Dado el ejemplo anterior, podemos notar la potencia que adquiere el modelar matemáticamente, ya sea en entornos presenciales o sincrónicos. Por parte, hemos notado que el estudiante desarrolla una matemática funcional, que es aquella que le permite resolver problemas, creando sus propios recursos para ampliar o acotar la resolución de los problemas.
Si pensamos en nuevos problemas que se pueden crear, debemos tener en cuenta que toda la matemática escolar está en la web, pudiendo ser considerada como la mejor biblioteca del mundo, ya que es de fácil acceso y cada día aparecen más espacios virtuales y/o softwares con los cuales se pueden externalizar procesos tales como realizar cálculos simbólicos, simulaciones de múltiple naturaleza, gráficas 2D o 3D, etc., que se transforman en herramientas cada vez más accesibles para los estudiantes mediante ordenadores, celulares personales u otros artefactos; las más simple y común de estos son las planillas de cálculo tipo Excel, Geogebra que nos permite cálculo simbólico, hacer gráficas, ambientes de geometría euclidiana, etc. También hay simuladores específicos en línea de cambio climático, incendios, marejadas, entre otros.

Fortaleciendo el diálogo entre la web y la enseñanza de la matemática

En esta oportunidad nos centramos en un sitio confiable, que se apoya en base de datos y modelos predictivos, que son alimentados y actualizados permanentemente con datos reales, proporcionado por organismos públicos de países u organizaciones internacionales, por ejemplo, datos que usan los gobiernos para fijar las políticas públicas e inversiones a mediano y largo plazo[5]. El sitio, Worldometer, https://www.worldometers.info/es/, usa esas y otras fuentes para presentar una gran variedad de datos –más de 61 ítems– que están cambiando continuamente con el tiempo, otorgando, a partir de modelos matemáticos, información cuantitativa de la realidad de la sociedad en todas las categorías que aborda: salud, crecimiento de poblaciones, inversiones, etc. Como ejemplo, la Figura 2 consiste de datos extraídos en enero de 2021, que nos permiten dimensionar la información que maneja y hacernos las primeras preguntas. Una pregunta elemental a contestar es ¿Cuál es el modelo matemático que genera esos datos? Dado que los datos están asociados al tiempo, naturalmente podríamos obtener una relación entre ellos.
Lo más desafiante e interesante a la vez, es acoger y canalizar las preguntas que se hacen los estudiantes, de tal forma que ellos se involucren y se sientan parte de la formulación de la problemática que se abordará; mejor aún si requieren conocimientos de otras disciplinas y que

[5] Notar que lo mínimo que necesita un gobierno para realizar inversiones en salud, infraestructura, educación es saber la cantidad de habitantes, la tasa de nacimiento y muertes, además de otras preguntas que abordan los censos.

pueden buscar en la web y/o solicitar orientación de un profesor de otra materia, o, evidentemente, de un profesor de matemáticas que pretenda desarrollar campos interdisciplinares en Educación Matemática. Naturalmente, un profesor de matemática que se caracteriza por involucrar a los alumnos en el desarrollo de habilidades de este tipo, es reconocido por sus alumnos y también por los colegas que participan en el proceso de enseñanza aprendizaje que plantea. Sin embargo, puede también percibir cierta mirada negativa de profesores de matemáticas y apoderados que piensan que no están enseñando matemáticas, por no mantener una práctica educativa tradicional de la matemática habitual en su pizarra y en los cuadernos de los alumnos, que no estarán llenos de fórmulas y cálculos, pues estos últimos efectivamente estarán en los softwares y páginas web que se ocupen en el trabajo de aula.

Como ejemplo, presentamos en la Figura 2 solamente dos de las 8 categorías que agrupan los datos de diferentes ítems de Worldometer: Medio Ambiente y Salud. Es fácil advertir que podemos cambiar de variación anual a variación diaria, como es el caso que tomamos de Salud, el número con más dígitos: Cigarrillos fumados hoy.

Medio ambiente	
361.250	Deforestación este año (hectáreas)
486.340	Tierra perdida por erosión de suelos este año (ha)
2.516.917.411	Emisiones de CO2 este año (tons)
833.569	Desertificaciones este año (hectáreas)
680.219	Químicos tóxicos liberados en el medio ambiente este año (tons)
Salud	
901.710	Muerte por enfermedades infecciosas este año
527.969	Muerte de niños < 5 años este año
2.958.147	Abortos este año
21.469	Madres muertas durante el parto este año
42.436.485	Personas infectadas con HIV/SIDA
116.767	Muertes causadas por HIV/SIDA este año
570.470	Muertes causadas por cáncer este año
27.391	Muertes por malaria este año
5.395.951.341	Cigarrillos fumados hoy
347.233	Muertes causadas por fumar este año
173.726	Muertes causadas por alcohol este año
74.485	Suicidios este año
$27.787.393.205	Gasto en drogas este año
93.764	Muertos por accidentes de tránsito este año

Fig. 2: Datos extraídos de Worldometers, 26 de enero de 2021

La categoría Población Mundial nos da información de nacimientos y muertes por día, tasas de crecimiento, y en general, información respecto a natalidad, mortalidad y enfermedades que afectan directamente a estos datos. Bajo el rótulo de Gobierno y Economía, hay información sobre gastos de los estados en salud y los gastos en fuerzas armadas, o datos de producción de computadores, autos, entre otros. Los otros 4 rótulos son Sociedad y Medios, Alimentos, Agua, Energía.

Los estudiantes y colegas inicialmente se hacen preguntas elementales y concretas de los datos que ven; por ejemplo, que algunos son impresionantes, que se vinculan entre ellos y/o con otras disciplinas. En el caso del coronavirus, ¿cuántas muertes tenemos por este virus en Chile cada día?; este número puede ser comparado con los de otros países, o ¿será más adecuado compararlo en relación a la cantidad de habitantes? También se puede ver ¿cuál cambia más rápido? Dependiendo del nivel de los estudiantes, habrá distintas preguntas y podrán ser analizadas con distinta profundidad y con una variedad de contenidos matemáticos asociados a otras áreas; lo importante es que les permitirá involucrarse rápidamente y podrán discutir sobre sus respuestas y avanzar; por ejemplo, ¿de qué muere más gente en el mundo? Toda esta interacción, sin fórmulas, permite hablar también de otras disciplinas, e incluso, emergen argumentos sustentados en temáticas valóricas, logrando interesar a los alumnos en búsqueda de respuestas más nítidas que requieren de una matemática no basada en la algoritmia, sino en el pensamiento matemático, y en los resultados predictivos que pueden proveer las simulaciones, las cuales, han sido generadas por datos provenientes de organizaciones nacionales o internacionales, como por ejemplo la Organización Mundial de la Salud o informes OCDE. En un inicio, se puede explorar la idea de variabilidad de los datos desde un tiempo t_k hasta otro t_{k+1}, lo que nos puede llevar a un modelo lineal si la diferencia de datos es constante (o varía marginalmente) u otro tipo de modelos.

Este sitio, si bien no explicita alguna intención educativa, claramente ayuda a entender de mejor manera el mundo complejo que nos rodea, en conjunto con las múltiples relaciones que son posibles de hacer entre los datos o entre modelos. La manera óptima para comprender y manejar esta información es la modelización que, además, nos permite establecer y trazar el concepto de "relaciones entre los datos" según los intereses educativos, y dimensionar lo que es nuestro país latinoamericano en relación a otras naciones y el mundo en una sociedad globalizada –al menos en las categorías que ofrece el sitio–. Los estudiantes en general se enfrentan a un tipo de búsqueda específica que les interesa, que *a priori* no es totalmente planificada por el profesor; sin embargo, este debe ofrecer las herramientas para matematizar preguntas que los estudiantes definan, lo que es una habilidad a cultivar durante todo el desarrollo profesional. La información de este sitio ha motivado a los alumnos de distintos colegios que hemos visitado o que nos han visitado, así como también a los participantes en actividades realizadas en congresos.

2. Desarrollo de la modelización en el aula

En la literatura, es posible reconocer ejemplos exitosos, fuera y dentro de nuestro país, que abordan la enseñanza de la modelización, enfocados en que el estudiante sea capaz de resolver tareas de modelización y/o, en el caso de la educación del profesor de matemáticas, aprender estrategias de enseñanza de la modelización, con marcos de referencia, objetivos, formas y tiempos de inserción en los programas de estudio. Al respecto, Sevinc y Lesh (2018) plantean la inclusión de la modelización en la formación inicial del profesor de forma explícita, planificando cursos semestrales enfocados en elementos de la didáctica de la modelización, postulando que el realismo de una tarea propicia el desarrollo de estructuras que posean mayor coherencia para el estudiante; por otra parte, destacan el análisis y el cuestionamiento de sus estudiantes sobre la validez de los problemas que existen en los textos escolares, además de la construcción y entendimiento de tareas de modelización desde perspectivas realistas (en el sentido de Kaiser y Sriraman, 2006). Actualmente, muchas estructuras curriculares en las universidades de nuestro país proponen cursos donde se trata la modelización, como tema diferente a los conceptos matemáticos en juego –por ejemplo, modelos discretos, continuos probabilísticos, etc., modelos de evolución–, lo que presenta un cambio de perspectiva frente al profesor en la década pasada.

De manera similar, Villa-Ochoa (2015) evidencia de que un componente de importancia para que los estudiantes modelen en sus clases, es el realismo de los enunciados verbales de las tareas de modelización que utilizan en sus clases.

Desde un enfoque de las competencias de modelización (Maaß, 2006, Borromeo-Ferri y Blum, 2010) y con una perspectiva cognitiva, reportan los logros sobre los seminarios de modelización matemática durante un semestre en una universidad germana con estudiantes que finalizan la formación inicial de profesores de matemática con el objeto de educar a los participantes para la enseñanza de la modelización, siendo este experiencia interesante e iluminadora para la formación de profesores En Chile, el modelar es identificado como una de las 4 habilidades que demanda el currículo, y se espera que los estudiantes “construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos” (Mineduc, 2016; p. 9). En la demanda educativa nacional, el trabajo de Huincahue, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca (2018) propone un aporte a la formación inicial del profesor de Matemática, incluyendo explícitamente la modelización en la estructura curricular en la formación de profesores en las universidades chilenas. La enseñanza de la modelización debería considerar los distintos enfoques conceptuales, analizando sus similitudes y diferencias, y las distintas perspectivas que se han desarrollado y estudiado, para el desarrollo de competencias y su evaluación como una forma de fortalecer el aprendizaje de los estudiantes a partir de la confección y aplicación de tareas de modelización en ambientes reales (en aulas del sistema educacional) mediante una metodología basada en secuencias de proyectos grupales. Además, Huincahue et al. (2018) plantean posibles estrategias para la enseñanza de la modelización y sugerencias respecto en que momento de la formación inicial del profesor un curso de modelización logra mejores resultados.

Blomhøj y Kjeldsen (2006, 2018) proponen proyectos de modelización organizados en procesos estructurados con duraciones de una o dos semanas, considerando también espacios para evidenciar los avances de los estudiantes, y facilitar los procesos de retroalimentación entre pares y el profesor o profesores. También ellos realzan como resultado la importancia del diálogo entre el profesor y el estudiante durante el desarrollo de la tarea, y la importancia del escenario en donde se sitúan los estudiantes; además, destacan que el ambiente interdisciplinar es propicio para el aprendizaje de la modelización, resaltando la necesaria autonomía que deben asumir los estudiantes que son desafiados por estos proyectos. Paralelamente, en este tipo de proyectos, es posible estudiar y analizar las creencias y concepciones del conocimiento matemático de los estudiantes, con el fin de potenciar un desarrollo afectivo positivo respecto a las matemáticas y la modelización.

Experiencias de aula con Worldometers

En las experiencias que hemos realizado en los últimos años con estudiantes en colegios del programa de magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV, así como en actividades realizadas en el marco de congresos del área de educación matemática en Chile, los docentes de matemáticas y estudiantes han demostrado gran interés por el uso del sitio Worldometers, tanto para promover la modelización matemática como para lograr un trabajo interdisciplinario. Naturalmente, los profesores ven una gran variedad de posibles usos de la página, con distintos intereses y propósitos. Las primeras ideas de modelización que surgen en ellos son asociar los datos a modelos lineales, exponenciales u otros, según sea el caso. Por ejemplo, los crecimientos de poblaciones, que son modelos exponenciales, referidos a las tasas de crecimiento y muerte. Al ingresar en la opción *Population* del sitio Worldometers, se despliega una serie de posibilidades que tienen que ver con las tasas de crecimiento; por ejemplo, crecimiento de poblaciones por países desde 5000 a.C. hasta el presente, listado de países ordenados por cantidad de habitantes, etc.; toda esta información presenta un abanico de oportunidades didácticas e interdisciplinares. Teniendo en cuenta que —y también lo refleja el sitio web— cada país tiene su dinámica de crecimiento, se tienen tasas de natalidad y mortalidad de acuerdo a las condiciones de cada país; por ejemplo, por el acceso al agua, la erradicación de enfermedades las condiciones climáticas, el acceso a la salud y la adecuada alimentación de la población. Ya que el crecimiento de cada país se modela con una función exponencial específica (dependiente de su tasa de natalidad, etc.), ¿cómo se determina la tasa de crecimiento mundial?, ¿se promedian las funciones exponenciales?, ¿se promedian los exponentes respectivos? Respecto al uso que hemos tenido el sitio web, e hemos evidenciado que el desarrollo del aprendizaje matemático logrado es íntimamente cercano a aproximaciones cualitativas, ya que, dependiendo de la tarea propuesta, la tendencia de los datos permite establecer relaciones entre las categorías que se pongan en juego. Si bien se puede desarrollar preguntas tales como ¿cuál es la función que genera esos datos?, ¿cuáles son las propiedades de ésta?, consideramos que el sitio invita más bien a profundizar sobre las relaciones existentes entre las categorías. Un ejemplo de ello puede ser la tarea de la Figura 3. Para el caso de que se pretenda realizar en un espacio de una sesión, se recomienda proveer de una base de datos; por ejemplo, la de la Tabla 1, naturalmente los datos extraídos para la clase que se planifica variarían.

Al ingresar a www.worldometers.info/es/, es posible ver cómo varían según el tiempo, múltiples fuentes de información mundial. Para el caso de Energía:

1. De las fuentes renovables y no renovables, ¿cuál es la tasa de crecimiento de cada una?
2. ¿Cómo podrías predecir el uso de cada fuente en 10 o 20 años más?
3. Si en 10 años más se pretende realizar un cambio en el uso de energía, para que en los siguientes 10 años exista un gasto equivalente para ambas fuentes energéticas, ¿cómo propondrías realizar el cambio utilizando fundamentos matemáticos?

Fig. 3: Tarea de modelización con Worldometers

	0	10s	20s	30s	40s	50s
Energía usada hoy (MWh):	230.524.010	230.577.226	230.631.065	230.684.763	230.739.521	230.793.409
a) de fuentes no renovables (MWh):	196.235.054	196.280.355	196.326.185	196.371.896	196.418.510	196.464.382
b) de fuentes renovables (MWh):	34.714.905	34.722.919	34.731.027	34.739.113	34.747.360	34.755.475
Energía solar chocando hoy a la tierra (MWh):	1.444.474.905.410	1.444.808.360.740	1.445.145.715.933	1.445.482.189.418	1.445.825.309.627	1.446.162.970.027
Petróleo bombeado hoy (barriles)	47.280.423	47.291.338	47.302.380	47.313.394	47.324.625	47.335.677
Petróleo restante (barriles)	1.515.878.938.141	1.515.878.927.227	1.515.878.916.185	1.515.878.905.171	1.515.878.893.940	1.515.878.882.888
Gas restante (boe)	1.097.330.460.821	1.097.330.458.658	1.097.330.456.469	1.097.330.454.286	1.097.330.452.060	1.097.330.449.870
Carbón restante	4.318.759.249.254	4.318.759.245.950	4.318.759.242.607	4.318.759.239.273	4.318.759.235.874	4.318.759.232.528

Tabla 1: Datos extraídos cada 10 segundos desde worldometer.info/es/

Experiencias

Proponemos este sitio web no tan sólo por su credibilidad, sino también por su buena acogida por parte de profesores y alumnos de enseñanza Básica y Media, quienes mostraron mucho interés por temas como Medio Ambiente y Salud. También hemos visto que los profesores enfrentan problemas de modelización a partir de preguntas que ellos mismos crean, dependiendo de su interés personal o como docentes de un curso en particular que tienen en mente. Nuestra intervención ha sido menor. Siendo consecuentes con la potencialidad de este sitio web, no reduciremos su uso al desarrollo de un solo caso específico de modelización, pues estaríamos limitando iniciativa e intención que pretenda el docente en sinergia con los intereses de los alumnos.

Dificultades

La dificultad mayor surge en el gran interés en seguir navegando en la página, sin varar en una línea de acción. Aquí, el profesor debe tener claridad del uso de los datos, según las formas de generar tareas vinculadas al sitio, ya sean actividades programadas para sesión de proyectos de modelización, días de modelización, entre otros, implicando una primera preocupación: cómo será la generación de una tabla de valores (si ve que es necesario), especialmente si estos cambian muy rápido (siendo un ejemplo de tratamiento la Tabla 1). Una forma es capturar pantallas en tiempos fijos para leerlos posteriormente, acción que ha sido sugerida por los mismos alumnos de Enseñanza Media; otra opción, es que la o el profesor haya extraído los datos con anterioridad, sabiendo de qué modelo se trata, construyendo la tabla de valores para ofrecerla a los alumnos, con el fin de que los alumnos inicien un trabajo con ella en tiempos más reducidos. En el marco de desarrollo de proyectos, lo interesante sería que primero los alumnos en grupos establecieran ideas previas en relación a la conexión entre los datos para levantar preguntas y decidir sobre qué se debe hacer; luego dejarles libres para que en grupos canalicen sus inquietudes y establezcan conclusiones *a priori*, generando preguntas que pudieran contestar con un trabajo más detallado, complejo e interdisciplinario (con la información epidemiológica de la pandemia que provee el sitio, sería una novedad en la actualidad, que incluye factores epidemiológicos, culturales, económicos entre otros). Además, cuando ya se inicie el trabajo de modelización concreto, ellos mismos pueden sugerir cómo obtener los datos requeridos. Sin duda surgirán soluciones posibles con uso de celulares o recursos que nos ofrece la web; lo mismo para obtener gráficas. Así se desarrolla el método científico, y la matemática sale de la órbita de fórmulas y operatoria.

El conocimiento del profesor adquiere en este tipo de casos una singular importancia, ya que es la persona que guiará y orientará el trabajo de sus estudiantes. Al respecto, el trabajo de Huincahue y Vilches (2019) plantea la importancia de que el profesor se interiorice en el trabajo interdisciplinar de tal manera de llegar a casos exitosos, tanto en el desarrollo de lo matemático de la situación, como en el conocimiento de la *disciplina de contexto* que forma una tarea interdisciplinar, siendo capaz de comprender la interpretación y el significado de la matemática en otros contextos, identificando un proceso de intelección en el ejercicio interdisciplinar, que inicialmente debe llevar a cabo él, y luego los estudiantes.

Fortaleza, la funcionalidad

Qué los alumnos se hagan preguntas de matemáticas y de otras disciplinas es tan interesante como responderlas correctamente con fundamentos (adquiriendo mayor importancia los procesos intelectivos); es ahí que la tarea de los docentes es mostrar el camino –por ejemplo, dónde buscar, qué software utilizar, la matemática que debería usar o a qué herramienta tecnológica recurrir–. Como este tipo de trabajos no es habitual en una clase de matemática, no es sorpresa si algunos alumnos no tan bien ponderados en las clases de matemática sean mucho más eficientes y sean reconocidos como líderes naturales en este tipo de tareas y trabajo en equipo. Abordar las preguntas debe ser un trabajo compartido; así la matemática y las herramientas usadas quedan dotadas de una funcionalidad —análogo uso funcionalidad de las palabras— que les permitirá a los estudiantes recurrir a ella en otras situación que se requiera, independientemente de la presencia del profesor o de que este se lo indique; serán habilidades y conocimientos (Colvin y Edwards 2018) que movilizara naturalmente, transformándose así en un conocimiento funcional (Cordero, 2016, Mena-Lorca, 2016; Gaete-Peralta, 2020). Este es un camino para diferenciarse de una enseñanza basada en contenidos —como un diccionario lleno de palabras y sus significados— y aproximarse hacia la funcionalidad del conocimiento matemático.

Las gráficas: *Gapminder*

Las gráficas están presentes en muchos ambientes que nos rodean diariamente. Con el avance de la tecnología estas han aumentado su presencia y variabilidad. Los estudiantes comprenden cada vez mejor la información que reciben de los medios, más aún si ellos pueden manipularla y crearla (Mena-Lorca, 2016, Mena-Lorca *et al*., 2020); en este caso, sería importante promover el uso de gráficas en los procesos de enseñanza para la comprensión cabal de ellas y como medio de comprender el mundo. Por ejemplo se podría utilizar la planilla Excel o algo similar para graficar los datos, y/o que Excel nos dé los posibles modelos que se ajustan a los datos. Esto nos permite, vía las gráficas, distinguir diversos tipos de crecimiento y entender el uso de las funciones y de software que pueden presentar gráficas de simulaciones de maremotos, de interacción entre distintas especies en un sistema ecológico, etc., sacando a los alumnos de la idea que la matemática sólo existe en el aula de matemática, dándole así sentido y valor al aprendizaje de la matemática. Aproximarnos también por el uso de gráficas hacia la construcción del conocimiento matemático, amplía las preferencias, o estilos de pensamiento matemático (Borromeo-Ferri, 2015, 2018), que poseen los estudiantes, lo que les facilita el aprendizaje.

Las gráficas para el ciudadano global

Una forma de abordar y ayudar a entender más las preocupaciones que han manifestado últimamente los chilenos como ciudadanos del mundo –el *Estallido Social*, la *Pandemia–,* es vía la compresión cabal de las gráficas, particularmente las relacionadas con la situación económica que afecta mayoritariamente a los habitantes del mundo; para ello, se puede recurrir a una página con información relevante y confiable en el tema: https://www. gapminder.org. En este sitio, se pueden visualizar y manipular gráficas con información global que están interconectadas o se pueden conectar; por ejemplo, con la cantidad de habitantes de cada país visualizada como la medida relativa de los países y su desarrollo económico en relación con el del mundo. Con botones específicos de los gráficos que ofrece esta página web, estos pueden ser manipulados para obtener distinta información relativa y dinámica en el tiempo; por ejemplo, se puede ver y analizar la evolución económica de Chile (el ingreso per cápita de Chile comparado en el tiempo con el de los otros países, pobres y/o ricos). El análisis de estos gráficos ayuda a contestar diversas preguntas a nivel global y local, pero, para ello, los estudiantes deben comprender muy bien los gráficos, que aparentemente son sólo de dos dimensiones —porque se ven solo dos ejes—, pero en la práctica son gráficos multidimensionales; además cuando se manipulan, se generan secuencias de gráficos. Sin duda, estos gráficos pueden y deben ser tratados en una clase de matemática, más aún si la compresión de las gráficas se desarrolla a través de todo el currículo; es decir, es un contenido reconocido como importante en la formación de los ciudadanos.

Respecto del coronavirus, el uso sistemático de los gráficos en otras ciencias o áreas se ha manifestado claramente en la información mundial y local de la propagación del virus. Se habla de "aplanar la curva", crecimiento exponencial, trazados logarítmicos, etc., explicaciones gráficas en términos cualitativos que nos obligan a una compresión más allá de la representación de una función matemática elemental; debemos ampliar el uso de las gráficas a otros dominios y conectar el lenguaje matemático con el lenguaje del área científica, económica, de salud, etc. Dado que el currículo, en teoría, atiende las demandas sociales de la ciudadanía, es cada vez más evidente que las prácticas docentes deben ir más allá de buscar la tradicional expresión $f(x)$.

En los dos sitios web mencionados se puede profundizar más en los temas globales que abordan, y ellos mismos acuden a otros sitios con información o recursos interesantes que también pueden ser ocupados en actividades atractivas y progresivamente complejas para los estudiantes, colegas, y apoderados. Por ejemplo, en el sitio https://www.gapminder.org/tools/?from=world#$chart-type=bubbles, se puede contestar preguntas del tipo: Salvar a los niños pobres ¿conducirá a la sobrepoblación mundial? (en uno de los videos explicativos, muy buenos, aparece una posible respuesta). El sitio también cuenta con videos que ayudan a clarificar muchos asuntos de la economía que nos afectan y afectan al mundo; esos videos son fácilmente replicables en clases de matemáticas. Más aún, este sitio se puede utilizar como un recurso que ayude a los estudiantes a entender las gráficas para formar un ciudadano bien informado y con espíritu crítico, impactando de esta forma a su entorno cercano. Entre los videos, hay uno que explica cómo la natalidad ha bajado drásticamente en los últimos años; sería fácil conectar estos datos con el impacto que tienen sobre los sistemas de pensiones en nuestro país y en el mundo.

En las mismas páginas presentadas aquí como fuente de trabajos de aula, se puede lograr información oficial sobre ellas y sus sitios asociados. En el caso de Worldometers, podemos leer que su objetivo es hacer que las estadísticas mundiales, alimentadas por las estadísticas oficiales de cada país, estén disponibles en un formato fácil de entender para una amplia audiencia en todo el mundo. Worldometers es una compañía independiente, sin fines de lucro, que no tiene afiliación política, gubernamental ni corporativa. Los datos son generados en tiempo real, y calculados por algoritmos propios patentados por la propia empresa, que procesa los datos y proyecciones más recientes proporcionados por las organizaciones y oficinas de estadística más respetadas del mundo. Worldometers se cita como fuente en más de 3500 libros publicados, en más de 2000 artículos de revistas profesionales y en más de 1000 páginas de Wikipedia.

La estadística y los modelos predictivos

Los sitios mencionados han sido creados con base en modelos predictivos que se han levantado con procedimientos científicos apoyados en la estadística. Esta misma idea puede explicitarse como conclusión de una clase, y planear proyectos interdisciplinarios que sean abordados con la creación de estadísticas de encuestas que los alumnos creen apoyados por profesores, de tal forma que la comunidad tome conciencia de asuntos financieros o ecológicos, u otros de interés de los estudiantes ¿Muere más gente por hambre o por obesidad? Chile, ¿es el país que invierte más en educación de Sudamérica? ¿Cuáles de los países fronterizos tienen menor cantidad de población? Y sobre asuntos financieros hay una gran variedad. Con encuestas los estudiantes pueden levantar problemáticas en su comunidad, y el análisis de los resultados permite desarrollar el espíritu crítico de los estudiantes, lo que finalmente ayuda a la comunidad, logrando de esta forma conectar la realidad con la matemática, y en problemas que preocupen a los alumnos.

3. Arándanos: un trabajo interdisciplinario

Presentamos ahora un problema de modelización que puede ser abordado en dos partes, una primera que podríamos llamar *Modelización sin datos*, MSD, y otra que podríamos llamar *Modelización con datos*, MCD. Ambos procesos son complejos e iterativos (Huincahue *et al*., 2018). Sin embargo, y dado el contexto de la situación a introducir, destacamos que agrónomos, entomólogos y expertos en el área toman decisiones con la información actualizada que logren en el tiempo de que disponen, lo que muchas veces se remite a la predicción de aspectos climáticos (Huincahue, 2011; Gaete-Peralta, 2020). Generalmente recurren a modelos computacionales gratuitos y elementales, que la mayoría modifica para su utilización específica, o, simplemente, softwares comerciales ya estructurados. Usualmente estos modelos tienen muchas variables que considerar, pero sólo algunas son las claves y otras son datos fáciles de encontrar – por ejemplo, temperaturas, asuntos meteorológicos y agronómicos locales –.
Se sugiere trabajar con un profesor de ciencias o de biología que indague con los alumnos en el tema de las abejas, la polinización y recuperación de hábitat. La idea es que este profesor sólo oriente a los alumnos, indicando qué tipo de información se debe buscar y dónde se la puede encontrar. En caso de no contar con este profesor, esta tarea puede ser asumida por otro profesor en uno o dos talleres que formen equipo para la recolección de información variada sobre las abejas nativas.

En general, para el abordaje de casos complejos como estos, se recomienda hacer un primer modelo desde el MSD, sólo con información variada como lo haremos a continuación. La razón de este procedimiento es que los matemáticos (en este caso los estudiantes) se harán preguntas y supuestos *a priori* que ayudarán a la búsqueda acotada de la información, pero esta búsqueda a su vez, nos orientará a acotar los modelos y/o a abrirnos a otros tipos de ideas, que podrían ser abordadas con otro tipo de modelos. También hay que tener en cuenta que los modelos son sólo una aproximación a la realidad, y que los datos son información que funciona en ciertos rangos y con limitaciones.

En nuestro caso sugerimos omitir en el inicio desde el inicio situaciones climáticas extremas de temperaturas, vientos etc., y suponer que los datos existentes se refieren a ambientes estables y con variabilidad en un cierto rango: un escenario idealizado. En todo caso, debe tratarse aquí de modelos simples. A continuación, se da un contexto de la tarea en la Figura 4, en la cual las preguntas a desarrollar son definidas posteriormente, y destacadas en *itálicas*, quedando de tarea buscar esta información en la web, teniendo en cuenta que se trata de una intervención en el tipo de cultivo.

En una región del sur de Chile se quiere aumentar el cultivo de arándanos debido a la demanda creciente de este producto que, además de ser sabroso, tiene propiedades benéficas. Algunos lugareños ya tienen este tipo de cultivos y sólo quieren aumentar sustantivamente la producción en mismo espacio que ya tienen destinado para cultivos; otros quieren cambiar sus plantaciones tradicionales o usar áreas eliminando árboles y plantaciones silvestres. Los lugareños saben que esto depende de la polinización de las abejas, y quieren contar con modelos matemáticos que les ayuden a tomar sus decisiones. Necesitan tener alternativas para determinar costos y beneficios.

Fig. 4: Problemática de los arándanos

Información para el profesor

Los arándanos son un cultivo relativamente nuevo en Chile; son nativos de Norte América. Cada planta es capaz de producir miles de flores, y cada flor se puede convertir en un arándano (NAPPC, 2020). Estas plantas requieren de insectos, principalmente abejas, para su polinización (Mardones, 2020). Cada una de sus flores necesita ser visitada por un polinizador para que se transforme en un fruto. Esto significa que el polen de las anteras debe alcanzar el estilo para poder fecundar el óvulo de la flor (Mardones, 2020). La polinización más efectiva la hacen las abejas, ya que son capaces de polinizar por *zumbido* (NAPPC, 2020). Esto significa que pueden

crear una vibración que permite que las anteras suelten el polen. Lo interesante es que solo los abejorros y otras abejas nativas son capaces de polinización por zumbido.
La abeja de miel es una especie introducida que se usa para la producción de miel y por sus servicios de polinización. La ventaja de usar esta especie para la polinización es que, a diferencia de las abejas nativas, estas se pueden manejar y las colmenas se pueden mover. Es decir, cuando los arándanos están floreciendo, se pueden trasladar colmenas a los campos para que hagan la polinización. La desventaja de usar las abejas de miel es que no son capaces de realizar polinización por zumbido, como los abejorros y otras especies nativas; es decir, se pierde la oportunidad de realizar una polinización profunda para lograr una gran cantidad de arándanos. Por ende, como las abejas de miel son ineficientes si es que se quiere asegurar la polinización, debe haber una gran cantidad de ellas.
Algunas preguntas que surgen: Si una hectárea tiene 2200 plantas, *¿cuántos nidos de abejas nativas se debe tener, y cómo deben estar distribuidos?* O, *¿Cuantas abejas nativas se necesitan para asegurar la polinización, y por ende, una buena cantidad de arándanos?* Otra forma de pregunta es: *¿Cuántos nidos de abejas se requieren para esta labor?*
La única forma de asegurar la presencia de abejas nativas es teniendo el hábitat necesario para que estas puedan anidar en proximidad a los cultivos o facilitar la creación de nidos en el cultivo.
Sin más información que la antes dada, se puede iniciar una modelización matemática, MSD, haciendo supuestos; por ejemplo, que se trabajará con dos tipos de abejas, una de miel y otra nativa, y se hará un estudio comparativo de la efectividad de cada cual.
En ambos casos, debemos imaginarnos las propiedades de las abejas con la información dada. Las abejas nativas no forman panales, lo que hubiera servido para cambiarlas de posición durante la temporada, facilitando que ellas hagan sus nidos.
Entonces tenemos dos modelos: MSD de abeja de miel y MSD de abeja nativa.
Preocupaciones de orden biológico:
A.- Conociendo los arándanos: *¿Qué propiedades benéficas tienen los arándanos? ¿Son árboles, flores u otros? ¿Por qué se cultivan en el sur de Chile?, ¿en qué sector? ¿Necesitan mucha agua, o mucho sol?*
B.- Conociendo las abejas: *¿Qué tipos de abejas son las mejores polinizadoras de arándanos? ¿Cuál es la forma de polinizar que tienen ellas? ¿Cuánta área poliniza cada tipo? ¿Se pueden cambiar los nidos de las abejas nativas?*

Sugerencias al modelar la situación de arándanos – Caso I

Se debe dividir el o los terrenos en partes con distintas formas geométricas, de acuerdo a cómo y por qué poliniza la abeja y la distancia que puede recorrer para poder volver a su origen. Por ejemplo, cubrir el terreno con círculos de cierto radio, suponiendo que un panal de abejas de

miel lo cubriría en un tiempo fijo y después se movería, o simplemente traer muchos panales, para que en un tiempo estipulado polinicen todo el terreno (en este último caso sube el costo y eso debe estar tomado en cuenta). Si hay estudiantes conocedores del tema, no debería ser extraño que incluyan el efecto del viento en la ubicación de los panales de abajas de miel. Para abejas nativas se tiene un modelo similar, la diferencia es que ellas no están en un panal reunidas, y cada una tiene un nido. Toda la información la pueden obtener los estudiantes de la web y con ella construir un modelo teórico elemental que necesita de información básica, la creación de un modelo teórico levanta nuevas preguntas que pueden ser respondidas para alimentar y perfeccionar el modelo.
El modelo inicial a crear puede ser teórico y simple; de tal forma que se use una planilla Excel para simular cada sector y poner parámetros que se pueden cambiar para estudiar la sensibilidad respeto a la diversa información que se logre desde la biología (MCD). Por ejemplo, un parámetro tipo de abeja, otro de plantas de arándanos compitiendo con otras plantas, un parámetro de temperatura (y comportamiento climático que afecta o favorece la productividad). Esta idea basal puede llevar a una representación espacial de la situación local y global.

Sugerencias al modelar la situación de arándanos – Caso II

Se debe crear una función ganancia versus costo, debiendo buscar datos de precios de arándanos y jugar con ganancia por superficie de terreno cultivado y costos de producción por superficie plantada.

4. Un horizonte

Las tareas propuestas en este escrito plantean una visión sobre cómo proveer de mayores significados a la matemática en la escuela. Si bien los caminos puramente abstractos poseen un grado de valoración, rutas híbridas que vinculen a la realidad del estudiante con constructos matemáticos, y viceversa, otorgan y construyen mayores significados a las ideas matemáticas, y así potencian los procesos de aprendizaje que vivimos en nuestras salas de clases, más aún si en estos procesos se utiliza tecnología y recursos apropiados de la web. En este sentido, la labor del profesor de matemáticas es clave, ya que este debe confiar en su capacidad para vincularse con otras disciplinas en la escuela, de modo de tomar el desafío de cruzar barreras puramente abstractas, ya que en ocasiones son ellas las barreras de aprendizaje que existen en las aulas, y, con la debida y continua vigilancia de nuestras prácticas didácticas, lograr ampliar los espacios de aprendizaje.

Bibliografía

Arrieta, J. & Díaz, L. (2016). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización. Matemática Educativa*. Ciudad de México, México: Gedisa.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers, *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 163–177.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. H. (2018). Interdisciplinary problem oriented project work – A learning environment for mathematical modelling. En S. Schukajlow y W. Blum (Eds.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (pp. 11–29). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Blum, W. & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Borromeo-Ferri, R. (2015). Mathematical thinking styles in school and across the cultures. En S. Cho (Ed.) *Selected Regular Lectures from de 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 153–174). Cham: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. New York: Springer.

Borromeo-Ferri, R. & Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.), CERME-6 – *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2046–2055). Lyon: INRP.

Colvin, R.L. & Edwards, V. (2018). *Teaching for global competence in a rapidly changing world. Asia Society and OECD*. New York: OECD Publishing.

Cordero, F. (2016). Modelización, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Coord.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización: Matemática Educativa*, (pp. 139–162) México DF: Gedisa.

Gaete-Peralta, C. (2020). La categoría de modelización y el concepto de integral definida: una mirada socioepistemológica. *UCMaule*, *58*(1), 83–105.

Huincahue, J. (2011). *Dinámica de modelos de depredación continuos e impulsivos y estudio fenológico del brevipalpus chilensis* (tesis de Magíster en Matemáticas). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso.

Huincahue, J. (2017). *Propuesta de modelización matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelización desde la teoría socioepistemológica* (tesis de doctorado en Didáctica de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso.

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelización matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 99–115.

Huincahue, J. y Vilches, K. (2019). Interdisciplinarity, Mathematical Modelling, and Poincare's work: comparing conceptions about knowledge construction. *Journal of Physics: Conference Series*, *1160*, 012009.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302–310.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113–142.

Mardones, D. (2020). *Abejas silvestres y su importancia en la polinización de nuestra flora nativa*. Gland, SW: World Wildlife Fund. https://wwf.panda.org/es/noticias_y_publicaciones/publicaciones/?363695/Abejas-silvestres-y-su-importancia-en-la-polinizacion-de-nuestra-flora-nativa.

Mena-Lorca, J. (2016). Modelización matemática y la construcción de conocimiento. En J. Arrieta y L. Díaz (Coord.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelización. Matemática Educativa*, (pp. 139–162) México DF: Gedisa.

Mena-Lorca, J., Klenner, J. & Alarcón-Relmucao, N. (2020). Modelización gráfica en la enseñanza del cálculo para el siglo XXI. En C. Guerrero, A. Morales-Soto y E. Ramos-Rodríguez (Eds.), *Modelización Matemática, Aportes para la Formación de Profesores* (en prensa). Madrid: Graó.

MINEDUC (2016). *Habilidad de modelamiento matemático*. Santiago: Ministerio de Educación.

NAPPC (2020). *Los abejorros son esenciales*. San Francisco, EU: Pollinator Partnership. https://www.pollinator.org/pollinator.org/assets/generalFiles/NAPPC.BumbleBee.broch_SPA.pdf.

OECD/ Asia Society (2018). *Teaching for global competence in a rapidly changing world*. New York: OECD Publishing.

Sevinc, S. & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modelling based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education*, *50* (1–2): 301–314.

Vergara, C. (2017). Los efectos adversos de una evaluación nacional sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas. El caso de SIMCE en Chile. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *10*(1), 69–87.

Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis*, *8*(16), 133–148.

Capítulo 5
El estudio de sistemas socioecológicos empleando modelamiento cualitativo colaborativo basado en sidigrafos

Rodrigo Ramos-Jiliberto
Facultad de Estudios Interdisciplinarios, Universidad Mayor, Chile

En este artículo, presento a los educadores de matemática y ciencias el uso de sidigrafos (digrafos signados) como lenguaje para modelar sistemas socioecológicos. Esta técnica, basada en la teoría de grafos, es adecuada para este propósito y lo suficientemente simple como para usar en actividades de aprendizaje de la enseñanza media. Además, este marco de modelamiento requiere de una cantidad limitada de datos y permite utilizar una variedad de métodos analíticos que requieren niveles crecientes de pericia. Por otra parte, les invito a realizar modelos en forma colaborativa como forma de construir modelos cualitativos formales, en el contexto de la educación, para enfrentar problemas socioecológicos. El enfoque de modelamiento que presento aquí fomenta el trabajo en equipo, el pensamiento sistémico y la creatividad, e impulsa las habilidades de razonamiento y la comprensión de sistemas complejos. Como caso de estudio, utilizo el enfoque de modelamiento cualitativo para representar y analizar un problema socioecológico real: vivir en las quebradas de la ciudad de Valparaíso, en nuestro país. Finalmente, destaco las fortalezas del modelamiento de sistemas cualitativos para la educación escolar.

Palabras clave: digrafos signados, ciencia de redes, teoría de sistemas, aprendizaje basado en problemas.

1. Introducción

Los humanos debemos reconocernos verdaderamente como parte de la naturaleza. Los seres humanos transformamos profundamente los ecosistemas y, al mismo tiempo, dependemos irremediablemente de ellos (MEA, 2005). En términos prácticos, no hay lugar en la Tierra donde la naturaleza persista en su forma original, prehumana. Incluso al interior de las reservas naturales, los ecosistemas son manejados por seres humanos y están influidos por el agua y el aire, cuyas propiedades fisicoquímicas han sido modificadas por personas en otras regiones. Además, los ambientes prístinos están amenazados por especies exóticas (por ejemplo, ganado, mascotas, patógenos, cultivos) cuya distribución ha sido modificada por las actividades humanas. Por otra parte, las personas viven en estrecha dependencia y contacto con otros animales, plantas y microorganismos. Incluso en ciudades densamente pobladas, los seres humanos construyen y usan jardines, parques y otras áreas verdes para recreación, educación, atención médica, producción de alimentos y regulación del clima. Por lo tanto, los ecosistemas reales deben reconocerse como entidades que incluyen a los humanos y, a la inversa, las sociedades humanas deben percibirse como compuestas por componentes culturales y naturales (Schoon y Van der Leeuw, 2015). El concepto de sistemas socioecológicos se basa en la fuerte conexión que existe entre los elementos naturales y humanos (es decir, sociales, económicos, políticos) en nuestro mundo (Colding y Barthel, 2019).

Los sistemas socioecológicos son, ante todo, *sistemas*. Un sistema es un conjunto de elementos interconectados e interdependientes, que forman una unidad integrada, coherente, persistente y distinguible, que exhibe un rango característico de comportamientos (Ramos-Jiliberto, 2020). Los sistemas socioecológicos están compuestos por elementos naturales, es decir, plantas, animales, microorganismos, suelo, agua, aire y elementos creados por nuestra sociedad, tales como comunidades humanas, industrias, organizaciones, leyes y contaminantes. La característica clave de los sistemas socioecológicos es que contienen interconexiones entre elementos naturales y sociales, además de la conectividad al interior de los subconjuntos ecológicos y sociales. Esta compleja interacción entre las personas y la naturaleza genera muchos de los problemas más desafiantes que enfrenta nuestra sociedad hoy en día. La crisis ambiental, las enfermedades humanas causadas por infecciones y agravadas por la contaminación, la incidencia de plagas, el suministro insuficiente de alimentos, agua y energía, son solo algunos ejemplos de este tipo de problemas socioecológicos (Angelstam et al., 2013). Los ciudadanos deberíamos poder comprender, razonar y discutir estos temas, además de evaluar las acciones tomadas por nuestros representantes. Adicionalmente, muchos profesionales deberían poder hacer frente a tales desafíos y trabajar colaborativamente para encontrar y proponer soluciones (Ramos-Jiliberto y Jiliberto Herrera, 2021). Para preparar a nuestros niños en tales tareas, el currículo escolar debería fortalecer el pensamiento sistémico y fomentar el desarrollo de habilidades sólidas en el modelamiento y análisis de sistemas (Ben-Zvi, Assaraf, y Orion, 2005).

En este ensayo, me focalizo en el habitar las quebradas de la ciudad chilena de Valparaíso como estudio de caso (Cañete-Islas, 2017; Cañete-Islas et al., 2018). Esos terrenos son ejemplos rudimentarios de sistemas socioecológicos urbanos que exigen una gestión basada en el conocimiento, tal como presento a continuación en el texto.

El pensamiento sistémico proporciona una forma de observar y comprender la realidad. Un pensador sistémico percibe los sistemas, procesos y problemas reales como un todo integrado, y se focaliza en las conexiones y relaciones entre los elementos que los componen. Esencialmente, el pensamiento sistémico es un pensamiento contextual (Capra y Luisi, 2014). Esto significa que los elementos que componen un todo adquieren sentido en sus relaciones con otros elementos, y no solo por sí mismos. Por lo tanto, este enfoque niega soluciones simplistas a problemas complejos, y a la vez valida el trabajo colaborativo y transdisciplinario. En los proyectos colaborativos, las opiniones de personas con conocimientos, experiencias y sentimientos diversos interactúan para crear una visión más rica y de mayor amplitud del problema. Sin embargo, los sistemas socioecológicos reales a menudo comprenden una gran cantidad de elementos e interrelaciones. Desafortunadamente, nuestras habilidades intelectuales son demasiado limitadas para abordar una red tan compleja de elementos interrelacionados. Para estudiar situaciones complejas del mundo, necesitamos un sustituto más simple del sistema real, susceptible de análisis, que conserve las características consideradas esenciales de la realidad y descarte los elementos accesorios. A ese sustituto lo llamamos *modelo* (Ramos-Jiliberto, 2020). Las ciencias sociales, así como las naturales y físicas, hacen un uso extensivo de modelos desde hace décadas. Para comprender sistemas socioecológicos complejos desde una perspectiva científica, y en especial con un enfoque STEM, los modelos son esenciales. Además, a partir del análisis de modelos que representan sistemas socioecológicos, podríamos crear, expresar y justificar opiniones informadas, a la vez que proponer explicaciones y soluciones al problema que se enfrenta. En este ensayo, muestro cómo construir y analizar modelos cualitativos de sistemas socioecológicos mediante el uso de sidigrafos. Luego, aplico este enfoque para abordar algunas de las adversidades que enfrentan los habitantes de las quebradas en Valparaíso, desde la perspectiva de los sistemas socioecológicos.

2. Modelamiento colaborativo

El acto de construir un buen modelo es una mezcla de ciencia y arte (Getz, 1998). Requiere de competencias científicas para gestionar la evidencia y el conocimiento como base del procedimiento de modelamiento. Es arte, porque se basa en la creatividad y la práctica, y depende del dominio de un conjunto de habilidades técnicas.

Para la mayoría de los casos, sin embargo, el conocimiento y la evidencia relevantes respecto del sistema real que es objeto de modelamiento no se encuentra en las mentes de los expertos ni en los informes técnicos o académicos. Los actores locales a menudo constituyen la fuente más rica de información empírica y suelen poseer una comprensión profunda de los componentes críticos y la organización del sistema (Prell et al., 2007). Por ello, es recomendable que, en el contexto del desarrollo de recursos para la toma de decisiones, el modelamiento se realice a través de medios participativos. Este enfoque se basa en la participación y el compromiso de diferentes personas, con sus particulares sensibilidades, actitudes, experiencias y creencias (Voinov et al. 2018). La participación puede ocurrir en diferentes niveles de compromiso. El modelamiento colaborativo es una forma intensiva de modelamiento participativo, en el cual todos los participantes desempeñan roles comparables (Sedlacko et al., 2014; Basco-Carrera et al., 2017). Este enfoque abre la interesante oportunidad de educar para la *construcción* activa y colectiva de conocimiento, lo cual permite también la contextualización de los aprendizajes.

La evidencia reciente indica que las actividades colaborativas en el aula mejoran el rendimiento del aprendizaje de los estudiantes (Williams et al., 2019). Por lo tanto, el modelamiento colaborativo entre compañeros de clase –y, eventualmente, incluyendo a otros miembros de la comunidad escolar– podría ser una forma eficaz de coaprendizaje para desarrollar habilidades STEM sobre problemas complejos. Además de promover competencias disciplinarias, el modelamiento colaborativo ofrece una oportunidad para el aprendizaje activo del trabajo en equipo, la interdisciplinariedad, la tolerancia y la democracia. En este empeño, la atención se centra en el proceso y no en el producto.

3. Construcción de un modelo

Sugiero construir un modelo cualitativo mediante un procedimiento escalonado (Ramos-Jiliberto, 2020). En primer lugar, en el aula defina grupos de trabajo encargados de construir diferentes alternativas de modelos del sistema en estudio. Una vez terminada la construcción de estos modelos, cada grupo debe presentar sus propuestas, justificarlas y discutir con miembros de otros grupos sobre posibles desacuerdos sobre la pertinencia de las respectivas alternativas de estructura del modelo. A lo largo de este proceso, el docente organiza y motiva a los estudiantes del curso, estableciendo neutralidad, promoviendo discusiones, incentivando la búsqueda de evidencias a través de medios digitales, y facilitando la fluidez del proceso por la vía de fomentar el consenso dentro y entre los grupos. Sugiero avanzar en el modelamiento siguiendo los pasos a continuación.

Paso 1. Construya colaborativamente el núcleo del modelo, por la vía de acordar las pocas variables que componen el núcleo del sistema y las relaciones entre esas variables. Utilice la pizarra para anotar —borrando y reescribiendo tanto como sea necesario— todos los nombres de variables sugeridos por los miembros del grupo. Tenga especial cuidado en discutir y aclarar el significado exacto de cada variable.

En un comienzo, las variables pueden ser cualquier tipo de concepto, ya sea abstracto o material, y las relaciones entre conceptos también pueden ser de muchos tipos. Ejemplos de relaciones entre conceptos son: "promueve", "incluye", "define", "apoya", "mata", "gusta de", "causa", etc. La visualización de la red de conceptos y relaciones que conectan conceptos forma un tipo de

diagrama conocido como *mapa conceptual* (Novak, 1990)[6]. Sin embargo, en el enfoque adoptado aquí, las variables y relaciones tienen significados específicos e inequívocos. Las variables pueden ser abstractas o materiales, pero deben ser consideradas como *variables cuantitativas continuas*. Las relaciones conectan pares de variables, tienen *dirección* y pueden ser *positivas* o *negativas*. Las relaciones positivas (mostradas como arcos con extremos de flechas, ver Figura 1) se entienden como el incremento de una variable (el blanco) por otra (la fuente). Las relaciones negativas (arcos con extremos circulares, ver Figura 1) se entienden como inhibición de una variable (el blanco) por otra (la fuente). No se permite tener arcos con los mismos nodos de origen y destino (es decir, arcos paralelos). Las estructuras matemáticas que están formadas por un conjunto de variables y un conjunto de relaciones definidas de esta forma se conocen como grafos dirigidos signados, o, abreviadamente, *sidigrafos*. En el lenguaje de los sidigrafos, las variables se denominan vértices y las relaciones se denominan arcos (Figura 1). Los modelos visuales cualitativos basados en sidigrafos también se conocen como "diagramas de bucle causal" o como "diagramas de influencia" (Lane, 2000; 2008).
Paso 2. Amplíe el modelo mediante la inclusión de nuevas variables. El grupo de trabajo debe acordar colectivamente la relevancia de estas nuevas variables como componentes esenciales del sistema bajo estudio. Durante este paso, identifique las relaciones positivas/negativas de las variables recién agregadas con las preexistentes y entre las nuevas variables en sí mismas.
Paso 3. Continúe el proceso de expansión del modelo hasta que el grupo de trabajo llegue a un acuerdo en que no se necesita incluir otras variables en el sistema. Repase la estructura del modelo y compruebe la idoneidad de cada variable y de cada relación entre variables. Elimine los componentes innecesarios del modelo.
Paso 4. Rotule las variables con números enteros consecutivos y construya la matriz de adyacencia correspondiente (vea la siguiente sección). Una vez completado este paso, el modelo estará construido como un sidigrafo y se presentará en dos formas: visual y matricial.

4. Los sidigrafos como modelos cualitativos

Los sidigrafos son estructuras matemáticas que se utilizan para representar las relaciones entre los elementos de un sistema. Un sidigrafo (por *grafo dirigido con signo*) consiste en un conjunto no vacío[7] de *vértices* y un conjunto de *arcos* que conectan los vértices. En los sidigrafos, los

[6] CmapTools es un software libre (para Linux, OS X, iPad, Windows) para construir mapas conceptuales. Disponible en línea en https://cmap.ihmc.us

[7] Un *conjunto* es una colección de objetos distintos, ninguno de los cuales es el conjunto en sí. Un conjunto que no contiene elementos se denomina conjunto vacío. Por tanto, un conjunto no vacío contiene al menos un elemento.

arcos tienen dirección. Cada arco comienza en algún vértice, llamado *cola* del arco, y termina en algún vértice, llamado *cabeza* del arco. En otras palabras, un sidigrafo es un grafo cuyos arcos tienen dirección y signo. Los sidigrafos se muestran habitualmente como diagramas compuestos por círculos y líneas, que representan vértices y arcos, respectivamente. Para distinguir arcos positivos de negativos en un diagrama, usaremos extremos de arco específicos. Los arcos positivos se muestran terminando en una punta de flecha, mientras que los arcos negativos se muestran terminando en un círculo. Para una explicación visual, vea la Figura 1.

Los sidigrafos también se pueden representar mediante una *matriz de adyacencia* (vea la Figura 1). La matriz de adyacencia *M* de un sidigrafo con S vértices es una matriz S × S. Tiene una fila y una columna para cada vértice. La entrada m_{ij} en la fila *i* y la columna *j* puede contener "1" o "-1", para representar un arco positivo o negativo, respectivamente, desde el vértice *j* al vértice *i*. Un "0" en la entrada m_{ij} indica que no hay un arco desde el vértice *j* al vértice *i*. Si bien la representación de un sidigrafo a través de un diagrama proporciona una forma muy simple e intuitiva de representar un sistema, el uso de matrices de adyacencia facilita el cálculo de métricas cuantitativas que se necesitan para caracterizar el sistema en estudio y compararlo con otros sistemas.

Los *modelos cualitativos* son representaciones simplificadas de sistemas que contienen poca o ninguna información cuantitativa explícita. Los sidigrafos son una forma muy eficaz de modelar cualitativamente un sistema. Un sidigrafo es un modelo cualitativo de un sistema, ya que especifica las influencias entre elementos de ese sistema, pero no las magnitudes ni la forma de las relaciones detrás de esas influencias. Además, el sidigrafo indica las variables del sistema, pero no los valores que asumen. El hecho de que los modelos cualitativos muestren poca o ninguna información cuantitativa tiene una gran ventaja: ellos hacen posible construir modelos a partir del conocimiento y la experiencia conceptual, sin necesidad de mediciones exhaustivas o resultados experimentales. Para construir un modelo cualitativo en forma de sidigrafo, solo necesitamos definir: a) el conjunto de variables del sistema, y b) cuáles variables ejercen influencia sobre otras variables, ya sea de manera negativa o positiva. Estas características hacen que este tipo de enfoque de modelamiento sea muy adecuado para la toma de decisiones y para desafíos de la vida real para una gran variedad de problemas.

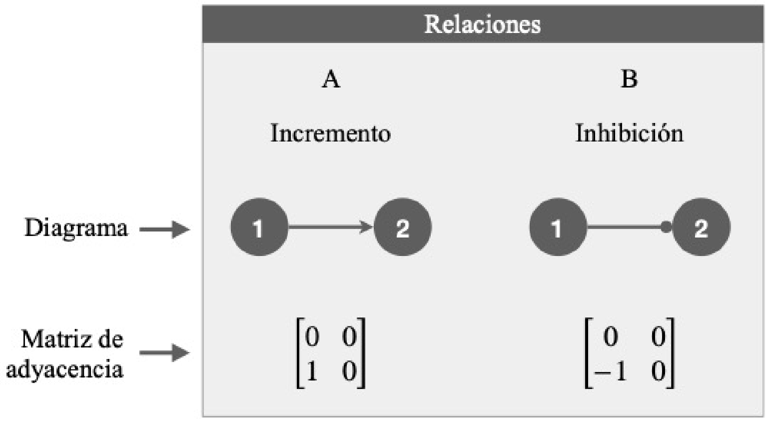


Fig. 1: Tipos de arcos (relaciones) entre vértices (variables del sistema) de un sidigrafo. El vértice 1 es la cola del arco y el vértice 2 es la cabeza del arco. A: Un arco positivo desde el vértice 1 al vértice 2 ($1 \rightarrow 2$) indica que la variable 1 del sistema incrementa el nivel de la 2 variable del sistema. Esto se representa visualmente mediante un arco de flecha (arriba) y un "1" en la entrada correspondiente de la matriz de adyacencia (abajo). B: Un arco negativo (1⊸2) indica que la variable 1 inhibe la variable 2. Esto está representado visualmente por un arco de extremo circular (arriba) y por un "-1" en la entrada correspondiente de la matriz de adyacencia (abajo)

5. Análisis estructural de modelos cualitativos

Análisis topológico cuantitativo

Este análisis proporciona una caracterización cuantitativa del sistema desde la perspectiva del conjunto de relaciones entre las variables componentes. Las métricas utilizadas aquí se pueden clasificar en dos tipos. El primero incluye métricas que apuntan a caracterizar el sistema en su conjunto. Estas métricas brindan información para responder preguntas tales como: ¿qué tan grande/pequeño es nuestro sistema? ¿Qué tan densa/débilmente conectado está nuestro sistema? Responder estas preguntas nos permitirá captar una idea de cuán complejo es nuestro sistema bajo estudio. Estas métricas son más útiles cuando se emplean de forma comparativa, es decir, contrastando nuestro sistema de estudio con otros similares. Aquí se presentan seis métricas del primer grupo: número de vértices, número de arcos, número de arcos positivos/negativos, densidad de enlace, y conectancia. Los cálculos de estas métricas se realizan en la matriz de adyacencia que representa nuestro sistema bajo estudio (Tabla 1).

Todas las operaciones utilizadas aquí se pueden realizar con la ayuda de algún software de hoja de cálculo (por ejemplo, las de Apache OpenOffice[8] y de LibreOffice[9], por mencionar dos paquetes gratuitos populares). Las operaciones que utilizamos se reducen a contar

[8] Disponible en línea en https://www.openoffice.org
[9] Disponible en línea en https://www.libreoffice.org

filas/columnas, sumar filas/columnas de matrices, y elevar matrices a potencias mediante multiplicación iterativa. Además, el uso de algunas operaciones lógicas del tipo *if x, then y, else z* aplicadas a las celdas de la hoja son extremadamente útiles. Por supuesto, todas las operaciones se pueden realizar de manera mucho más eficiente utilizando software matemático. Recomiendo GNU Octave[10], que es un software libre y un lenguaje de programación muy similar y en gran parte compatible con MATLAB. GNU Octave está disponible para ejecutarse en Linux, macOS y Windows.

Métrica	**Cómputo**
Número de vértices	Número de filas (columnas) de *G*
Número de arcos	Número de elementos no nulos de *G*
Número de arcos positivos	Número de elementos positivos de *G*
Número de arcos negativos	Número de elementos negativos de *G*
Densidad de conexión	Número promedio de conexiones por vértice, L/S
Conectancia	La proporción de todos los posibles arcos constituidos en el sistema. El número de posibles arcos se calcula como el número de celdas de *G* menos las de la diagonal principal, i.e., $S(S-1)$. Así, la conectancia es $L/[S(S-1)]$

Tabla 1: Propiedades topológicas globales del sistema en estudio y su cálculo a partir de la matriz de adyacencia G

El segundo grupo de métricas topológicas incluye aquellas destinadas a caracterizar la importancia relativa de cada variable del sistema (es decir, vértice de sidigrafo) para la estructura general de relaciones en el sistema del que forman parte. Dado que estas métricas evalúan las propiedades de los componentes del sistema, las llamamos "propiedades locales". En la literatura de teoría de grafos, estas métricas se conocen como "medidas de centralidad". Aquí nos focalizamos en la más simple, llamada “grado de un vértice”. El grado de un vértice v_i es simplemente el número de arcos que tienen v_i como punto inicial o final. Así, en los grafos dirigidos, distinguimos el grado total, el grado de entrada y el grado de salida (Tabla 2).

[10] Disponible en línea en https://www.gnu.org/software/octave/

Métrica	Cómputo
Grado de entrada del vértice v_i	Suma de las entradas de la fila *i* de *G*
Grado de salida del vértice v_i	Suma de las entradas de la columna *i* de *G*
Grado total del vértice v_i	Suma del grado de entrada y el grado de salida de v_i

Tabla 2: Propiedades topológicas locales del sistema de estudio y su cálculo a partir de la matriz de adyacencia G

Potencias de matrices

Si una matriz de dimensión $n \times n$ (filas × columnas), se multiplica por otra matriz de dimensión $n \times n$, el resultado es otra matriz $n \times n$. La potencia M^L de una matriz de adyacencia M, siendo L un entero no negativo, se define como el producto matricial de L copias de M. Para una matriz de adyacencia binaria, es decir, con solo 0 ó 1 en cualquier entrada, el elemento $(M^L)_{ij}$ de la matriz M^L da el número de recorridos de longitud L desde el vértice v_j al vértice v_i. De ello se deduce que para una matriz de adyacencia M de un sidigrafo G, las potencias $|M|^2$, $|M|^3$, $|M|^4$, etc., donde $|x|$ indica el valor absoluto de x, muestran el número de recorridos de longitud 2, 3, 4, etc. desde cualquier vértice $v_j$hasta cualquier vértice v_j en el sidigrafo G. Este cálculo no considera los signos de los recorridos.

Un recorrido es una secuencia de arcos dirigidos en la misma dirección que unen una secuencia de vértices. Un camino es un recorrido en el que todos sus vértices son diferentes (ver ejemplos en la siguiente sección). Dado que para nuestro análisis buscamos los caminos —y no los recorridos— que hay desde el vértice v_j al vértice v_i en G, aplicamos la siguiente lógica. Si hay un recorrido w_{ij}^l de longitud $l > 1$ desde el vértice v_j al vértice v_i, pero no hay recorridos de longitud entre 1 y $l - 1$ desde el vértice v_j al vértice v_i, entonces el recorrido w_{ij}^l debe ser un camino. Esto se traduce en un teorema de la teoría de grafos que establece que *el recorrido más corto de un vértice a otro es un camino*. Si también existe un recorrido w_{ij}^{l+1} de longitud $l + 1$, entonces también debe ser un camino. Esto se debe a que, para repetir un vértice a lo largo de un recorrido, un recorrido de v_j a v_i requeriría tener al menos dos arcos más con respecto al recorrido más corto de v_j a v_i. Por lo tanto, si el recorrido más corto en G desde v_j a v_i es de longitud *l*, entonces todos los recorridos de longitud *l* y longitud *l* +1 son caminos de v_j a v_i.

Hacemos uso de potencias matriciales para detectar *caminos cortos* de v_j a v_i. Definimos caminos cortos como de longitud *l* y *l*+1, donde *l* es la longitud del camino más corto. Para detectar el número de caminos cortos de v_j a v_i, calculamos la secuencia $|M|^2, |M|^3$ ... $|M|^S$, donde *S* es el número de vértices. Detectamos el exponente más pequeño *L* para el cual el elemento *ij* de la matriz $|G|^l$ es distinto de cero. Este exponente L es la longitud de los caminos más cortos de v_j a v_i , y el valor del elemento *ij* de la matriz $|M|^l$ es el número de caminos más cortos de v_j a v_i. Finalmente, obtenemos el número de caminos casi más cortos de v_j a v_i desde el elemento *ij* de la matriz $|G|^{l+1}$. Después de identificar el número de caminos cortos (tanto los más cortos como los casi más cortos) de una variable de interés a otra en nuestro sistema modelo G, procedemos a la identificación visual de cada uno de ellos.

Análisis visual

El análisis visual que aquí se propone para el estudio de modelos basados en sidigrafos se orienta a la identificación de efectos en cadena entre variables que merecen una atención especial. Estos efectos en cadena conducen a influencias indirectas, y nos centraremos en dos tipos de ellos que son omnipresentes en sistemas complejos: caminos y ciclos. El desafío es encontrar caminos y ciclos relevantes, inspeccionarlos sobre el gráfico y dilucidar su importancia para la estructura y el funcionamiento del sistema. El análisis visual de los sidigrafos requiere una buena representación visual del sistema, que se puede lograr mediante el uso cuidadoso del dibujo manual. Para obtener los mejores resultados de presentación, se pueden utilizar las aplicaciones de presentación incluidas en los paquetes ofimáticos para computadoras. Sin embargo, para gráficos más complejos, es decir, aquellos compuestos por muchos vértices y muchos arcos, sugiero el uso de software especializado para visualizar redes. Recomiendo el software de código abierto Gephi[11].

Los conocimientos más sorprendentes que se pueden obtener del análisis de sistemas representados por sidigrafos surgen del reconocimiento de la miríada de influencias indirectas que se establecen entre las variables del sistema. Aunque las influencias directas entre las variables del sistema son conocidas o asumidas durante el proceso de construcción del modelo, las influencias indirectas *emergen* al considerar el sistema como un todo coherente, sin suponerlas a priori. Una influencia indirecta del vértice v_j sobre el vértice v_i ocurre si hay intermediarios entre ellos que son necesarios para transmitir la influencia. Por ejemplo, si la persona *A* hace feliz a la persona *B* y la persona *B* hace feliz a la persona *C*, decimos que hay una influencia positiva directa de *A* a *B* y otra influencia positiva directa de *B* a *C*. Además, surge también una influencia positiva indirecta de *A* a *C*, y esta influencia ocurre a través del intermediario *B*. En términos de teoría de grafos, decimos que hay un recorrido de *A* a *C*, compuesto por los vértices *A*, *B* y *C* y los arcos $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$ (ver figura 2). La longitud de un recorrido es su número de arcos. Como ocurre con las influencias directas en los sidigrafos,

[11] Disponible libremente (para Linux, OS X o Windows) en https://gephi.org

las indirectas tienen un signo. El signo de un recorrido es producto de los signos de sus arcos. Un recorrido es negativo si contiene un número impar de arcos negativos y positivo en caso contrario.
En el ejemplo de la Figura 2, del vértice 2 al vértice 4 hay un recorrido positivo de longitud 2 (secuencia $2 \multimap 3 \multimap 4$) y un recorrido negativo de longitud 4 (secuencia $2 \multimap 3 \rightarrow 2 \multimap 3 \multimap 4$). Se dice que el primer recorrido es un *camino*. Recordemos que un recorrido es una secuencia de arcos dirigidos en la misma dirección que unen una secuencia de vértices, mientras que un camino es un recorrido en el que todos sus vértices son diferentes.

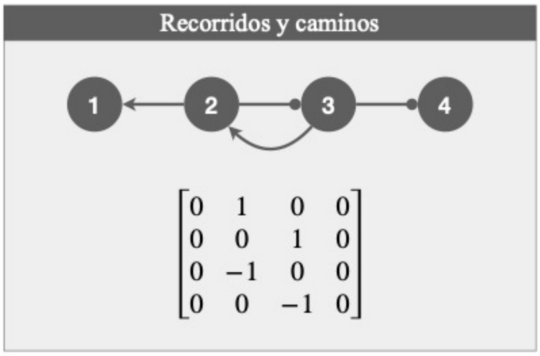


Fig. 2: Recorridos y caminos en sidigrafos. Arriba: representación visual de un sidigrafo. Abajo: matriz de adyacencia del mismo sidigrafo. Los caminos de longitud > 1 son: $2 \multimap 3 \multimap 4$ y $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Los recorridos que no son caminos son $2 \multimap 3 \rightarrow 2 \multimap 3 \multimap 4$ y $2 \multimap 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Un *ciclo* es un camino de longitud positiva que comienza y termina en el mismo vértice y cuyos vértices son distintos a excepción de los vértices inicial y final. En la Figura 3, muestro un ejemplo de sidigrafo que contiene dos ciclos, de longitud 3 y 5, ambos negativos.

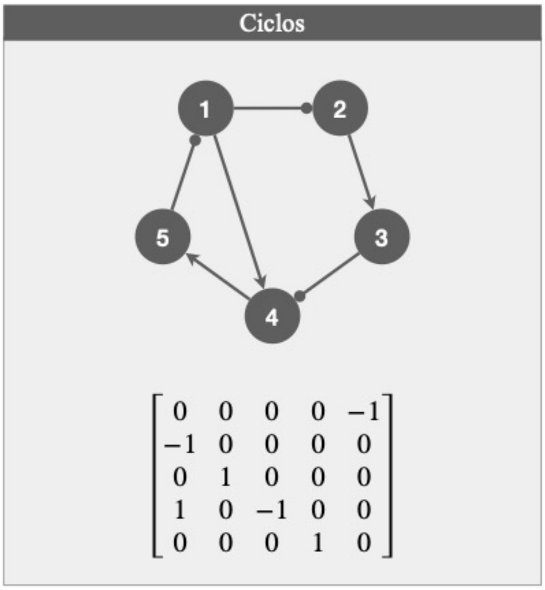


Fig. 3: Ciclos en sidigrafos. Arriba: representación visual de un sidigrafo. Abajo: matriz de adyacencia del mismo sidigrafo. Hay dos ciclos en este sidigrafo, de longitudes 3 y 5, respectivamente: 1 → 4 → 5 ⊸ 1 y 1 ⊸ 2 → 3 ⊸ 4 → 5 ⊸ 1

Una vez realizado el análisis del modelo, se procede a realizar la parte más reveladora del estudio, que consiste en la interpretación cautelosa, crítica y creativa de los resultados del análisis. Esto se lleva a cabo mejor mediante el trabajo en equipo. La actividad final debería ser una presentación de todo el proceso, desde la motivación y los objetivos del estudio, pasando por los pasos metodológicos para la construcción y el análisis de modelos, hasta la presentación gráfica de conocimientos cuantitativos y cualitativos y una discusión crítica del alcance y las limitaciones de los resultados y una propuesta para futuras investigaciones.

6. Caso de estudio: Las quebradas de la ciudad de Valparaíso

Modelamiento

Valparaíso (Chile) es una ciudad histórica compuesta por un centro plano y estrecho rodeado por 44 cerros que cubren la mayor parte de la superficie de la ciudad. Los cerros están delimitados por sus quebradas, que originalmente tenían abundante vegetación nativa y arroyos en sus fondos. Las quebradas de Valparaíso, particularmente en las altitudes mayores, son lugares no urbanizados entre los cerros urbanizados. Estos lugares se caracterizan por tener pendientes pronunciadas, suelos sin pavimentar y una cobertura relativamente más densa de vegetación nativa y no nativa, en comparación con el resto de la ciudad. Sus habitantes exhiben condiciones de vida que imponen limitaciones sociales vinculadas a la pobreza (Pino, 2014).

Los habitantes de Valparaíso se han apropiado de estos lugares y los han utilizado como asentamientos informales donde ellos mismos construyen sus casas, sus barrios, redes sociales y cultura. A veces se prefiere vivir en quebradas a establecerse en otros lugares en los márgenes o fuera de la ciudad. Esto se debe a que en las quebradas sus habitantes mantienen una red familiar, y viven más cerca del centro, entre otras razones (Pino & Hormazábal, 2016). Sin embargo, vivir en quebradas involucra circunstancias serias y complejas para su gente y para la ciudad. Para nuestra construcción del modelo, parto de dos problemas principales asociados con el habitar las quebradas en Valparaíso. Primero, existe el riesgo de colapso físico (i.e. derrumbes) de las edificaciones, derivadas de la construcción irregular de viviendas en pendientes pronunciadas. Este riesgo para los habitantes (representado por la variable 2) se incrementa después de las inundaciones por fuertes lluvias. Las lluvias intensas se producen de forma aperiódica, y están relacionadas con el fenómeno climático El Niño-Oscilación del Sur (ENOS). Además, el riesgo de derrumbes se ve magnificado por los grandes terremotos que esta región enfrenta con frecuencia (colaboradores de Wikipedia, 2020b). Además, se asume que el riesgo de colapso afecta la calidad general del espacio público del barrio, que se indica mediante la relación "la variable 2 inhibe la variable 6" ($2 \multimap 6$). El segundo gran problema es la acumulación de desechos domésticos en la cuenca. Los desechos aumentan el riesgo de incendios, que constituye una gran amenaza para la ciudad durante la estación cálida de cada año (colaboradores de Wikipedia, 2020a). Esta relación se muestra como $1 \rightarrow 4$, "la variable 1 incrementa la variable 4". Además, la acumulación de desechos favorece la incidencia de plagas, tales como ratas y parásitos, que afectan a los humanos. Por último, la descomposición de residuos y plagas genera contaminación por olores, que afecta directamente a la calidad del espacio público. Esta red de relaciones causales forma el conjunto inicial de relaciones de nuestro modelo (Figura 4).

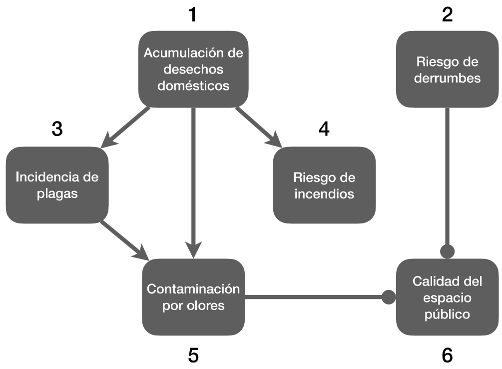


Fig. 4: El submodelo nuclear, que comprende un conjunto inicial de relaciones del sistema en estudio. Los recuadros muestran variables, los arcos muestran influencias causales entre variables. Las influencias positivas (potenciadoras) se indican mediante arcos con puntas de flecha. Las influencias negativas (inhibitorias) se indican mediante arcos con extremos circulares

Como primera extensión de nuestro submodelo nuclear, agregamos la variable *biodiversidad* (etiquetada como 7, Figura 5). Las quebradas de Valparaíso aún albergan cierta biodiversidad nativa, que incluye plantas, aves, reptiles y animales invertebrados. Sin embargo, estos ecosistemas están muy dañados, principalmente debido a la urbanización, los incendios, la acumulación de desechos y las invasiones biológicas. Se sabe que, en general, la biodiversidad controla la erosión y la aridez del suelo, y que inhibe el riesgo de derrumbes. Al mismo tiempo, la fauna nativa inhibe el establecimiento de plagas. Además, el material combustible a menudo se asocia con flora exótica y, por lo tanto, una mayor biodiversidad nativa protege de la quema a los ecosistemas. Ha habido varias propuestas encaminadas a recuperar esta biodiversidad local para mejorar las áreas verdes urbanas y el espacio público. Consistente con lo anterior, en nuestro modelo asumimos que la biodiversidad se ve afectada por los desechos acumulados y que la biodiversidad inhibe la incidencia de plagas, los riesgos de incendio y derrumbe, y mejora la calidad del espacio público (Figura 5).

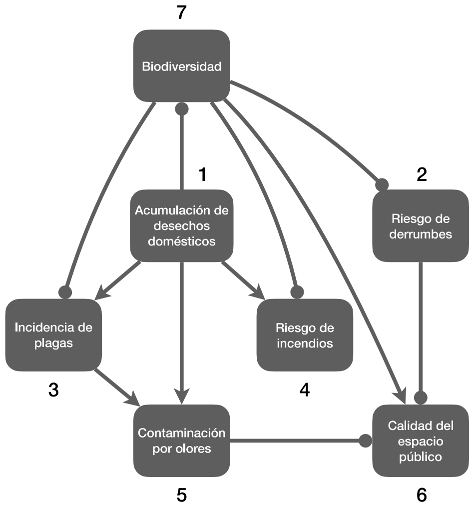


Fig. 5: Primera extensión del sistema en estudio. Se agregó la variable *biodiversidad* y sus relaciones. Símbolos como en la Figura 4

La segunda extensión de nuestro modelo, al agregar cuatro nuevas variables (etiquetadas 8-11) y sus relaciones, se muestra en la Figura 6. Podemos ver que el modelo ahora exhibe un mayor nivel de complejidad, principalmente debido a la multiplicidad de relaciones causales entre variables. En esta versión del modelo se incluyeron variables cuyos niveles se considera deseable incrementar. Se asume que la valoración del espacio público (etiquetada con 8) inhibe el vertido de residuos y se potencia por la variable 6. Además, se supone que la educación en sostenibilidad mejora el comportamiento de los ciudadanos y, por lo tanto, inhibe el vertido de residuos y fomenta acciones de limpieza de quebradas. Por otra parte, la educación para la sostenibilidad promueve la biodiversidad, ya sea a través de acciones directas como la erradicación de plagas o la replantación de especies nativas, o bien indirectamente mediante el desarrollo de actitudes proecológicas en niños y adolescentes. La calidad del paisaje, que promueve la calidad del espacio público, se ve reforzada por las actitudes respetuosas con el medio ambiente y por la propia biodiversidad, mientras que la acumulación de desechos la reduce (Figura 6).

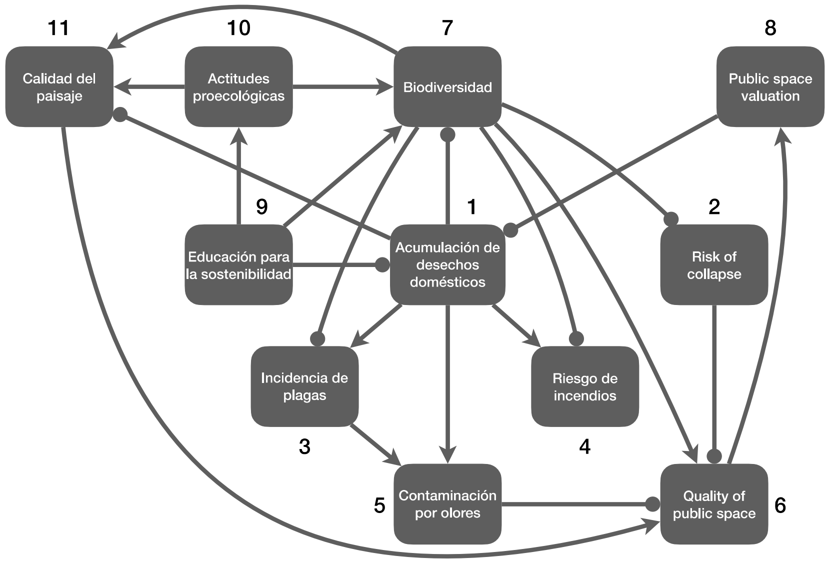


Fig. 6: Segunda extensión del sistema en estudio. Se agregaron cuatro variables (8-11) y sus relaciones. Símbolos como en la Figura 4

Continuamos el proceso de agregar variables relevantes al modelo, junto con sus relaciones. El modelo completo, que se muestra en la Figura 7, contiene 20 variables (vértices) y 53 relaciones causales (arcos) que son positivas (potenciadoras) o negativas (inhibidoras). Para percibir más claramente la estructura, los cuadros con nombres de variables fueron reemplazados por círculos numerados. En la Tabla 3 se muestra un resumen de las variables del modelo y sus etiquetas correspondientes. En conjunto, el sistema modelo así construido constituye un sidigrafo, G.

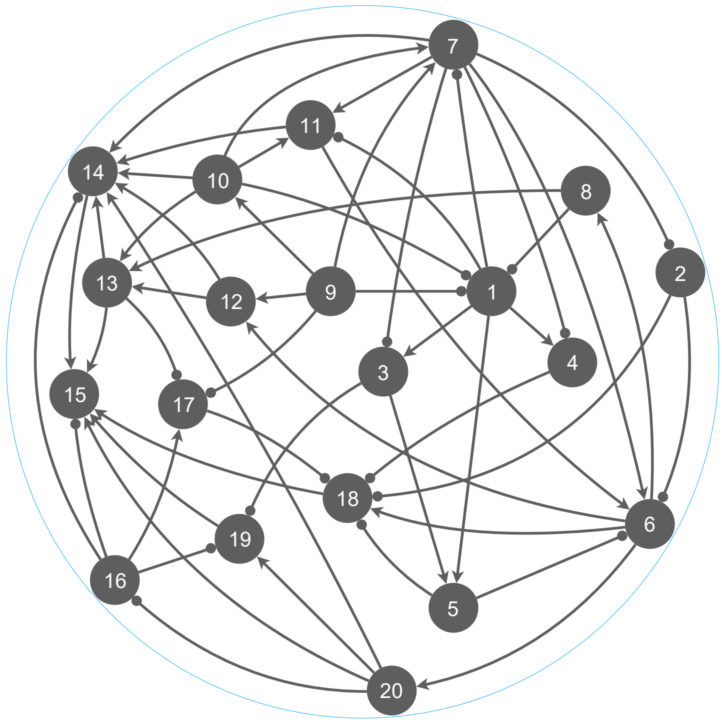


Fig. 7: Sidigrafo *G* que representa el modelo completo del sistema en estudio

La matriz de adyacencia M del sidigrafo G es:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La submatriz de color rojo de M representa el submodelo inicial que se muestra en la Figura 4. La submatriz rojo + violeta representa el modelo extendido que se muestra en la Figura 5. La submatriz rojo + violeta + verde representa el modelo extendido que se muestra en la Figura 6. La matriz completa *M* representa el modelo completo que se muestra en la Figura 7.

Vértice	Descripción
1	*Acumulación de desechos domésticos*
2	*Riesgo de derrumbes*
3	*Incidencia de plagas*
4	*Riesgo de incendios*
5	*Contaminación por olores*
6	*Calidad del espacio público*
7	*Biodiversidad*
8	*Valoración del espacio público*
9	*Educación para la sostenibilidad*
10	*Actitudes proecológicas*
11	*Calidad del paisaje*
12	*Actividad cultural*
13	*Integración social*
14	*Salud mental/emocional*
15	*Bienestar*
16	*Consumo de drogas*
17	*Criminalidad*
18	*Calidad del vecindario*
19	*Salud física*
20	*Actividad recreativa saludable*

Tabla 3: Rótulos de los vértices y sus descripciones como componentes del modelo cualitativo de sistema

Análisis cuantitativo: métricas topológicas

La tabla 4 muestra las características topológicas básicas del sistema en estudio, considerado en su totalidad. Como se indicó anteriormente, estas métricas son especialmente útiles al comparar sistemas diferentes. Por ejemplo, si los estudiantes de la clase construyen representaciones alternativas del mismo sistema real de interés, los modelos propuestos pueden compararse en sus propiedades globales básicas.

Métrica	Valor
Número de vértices	20
Número de arcos	53
Número de arcos positivos	32
Número de arcos negativos 21	21
Densidad de enlace	2.65
Conectancia	0.14

Tabla 4: Propiedades topológicas globales del sistema modelo

Las características topológicas locales del sistema en estudio, es decir, la importancia relativa –centralidad– de cada uno de sus elementos, se resumen en la Tabla 5. Una inspección de estos resultados revela que el vértice 7 (*biodiversidad*) tiene el mayor número de interacciones (grado total = 9), seguido de los vértices 1 (*acumulación de desechos domésticos*), 6 (*calidad del espacio público*) y 14 (*salud mental/emocional*), con un grado total de 8. El número de arcos entrantes (es decir, el grado de entrada) denota cuánto un vértice está directamente influido por otros vértices del sidigrafo. En la Tabla 5, podemos notar que el vértice 14 (*salud mental/emocional*) tiene el mayor grado de entrada del sistema. Por el contrario, el vértice 9 (*educación para la sostenibilidad*) no presenta arcos entrantes. El número de arcos salientes (es decir, el grado de salida) indica cuánto influye directamente el vértice en cuestión en otros vértices del sistema. El vértice 7 (*biodiversidad*) presenta el mayor grado de salida, mientras que el vértice 15 (*bienestar*) no presenta arcos salientes. Podemos ver, además, que los vértices 14 y 15 presentan las mayores diferencias entre el grado de entrada y el de salida. Mientras que el vértice 14 (*salud mental/emocional*), con un grado de entrada de 7 y un grado de salida de 1, es básicamente un sumidero de influencias directas, el vértice 15 (*bienestar*), con un grado de entrada de 0 y un grado de salida grado 6, es una fuente de influencias directas.

Vértice	Grado de entrada	Grado de salida	Grado total
1	3	5	8
2	1	2	3
3	2	2	4
4	2	1	3
5	2	2	4
6	4	4	8
7	3	6	9
8	1	2	3
9	0	5	5

10	1	5	6
11	3	2	5
12	2	2	4
13	3	3	6
14	7	1	8
15	6	0	6
16	1	4	5
17	3	1	4
18	5	1	6
19	3	1	4
20	1	4	5

Tabla 5: Medidas de centralidad de las variables del modelo

Análisis visual: caminos

El análisis de caminos en el sidigrafo G se focalizó en un subconjunto de caminos de longitud relativamente corta. Esto se debe a que es probable que los caminos más cortos ejerzan influencias más fuertes y, al mismo tiempo, son más fáciles de detectar y analizar. Además, seleccioné las siguientes variables del sistema que se consideraron de principal preocupación desde una perspectiva socioecológica: *acumulación de desechos domésticos* (vértice 1), *biodiversidad* (vértice 7), *educación para la sostenibilidad* (vértice 9) y *bienestar* (vértice 15). Por tanto, analizo a continuación las trayectorias cortas en las que participan estas variables clave.

En nuestro sistema modelo, hay cinco caminos de longitud 3 desde la *acumulación de desechos domésticos* (vértice 1) hasta el *bienestar* (vértice 15). Los caminos son:

$$1 \rightarrow 3 \multimap 19 \rightarrow 15 \tag{P1}$$

$$1 \rightarrow 4 \multimap 18 \rightarrow 15 \tag{P2}$$

$$1 \rightarrow 5 \multimap 18 \rightarrow 15 \tag{P3}$$

$$1 \multimap 7 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \tag{P4}$$

$$1 \multimap 11 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \tag{P5}$$

Los cinco caminos de longitud 3 son negativos, ya que cada uno de ellos contiene un solo arco negativo. Esto indica que, en el marco de nuestro modelo, la acumulación de desechos en las quebradas inhibe de manera inequívoca el bienestar de las personas. Es posible un mayor análisis conceptual y cuantitativo, considerando cada una de las relaciones potenciadoras/ inhibidoras que componen cada camino (ver Ramos-Jiliberto, 2020).

Hay seis caminos de longitud 3 desde la *educación para la sostenibilidad* (vértice 9) hasta el *bienestar* (vértice 15). Estos son:

$$9 \to 10 \to 13 \to 15 \qquad \text{(P6)}$$

$$9 \to 12 \to 13 \to 15 \qquad \text{(P7)}$$

$$9 \to 7 \to 14 \to 15 \qquad \text{(P8)}$$

$$9 \to 10 \to 14 \to 15 \qquad \text{(P9)}$$

$$9 \to 12 \to 14 \to 15 \qquad \text{(P10)}$$

$$9 \multimap 17 \multimap 18 \to 15 \qquad \text{(P11)}$$

Todos los caminos de longitud 3 son positivos, ya que cada uno de ellos contiene solo arcos positivos, excepto el camino P6, que contiene dos arcos negativos. Esto indica que, en el marco de nuestro modelo, la educación para la sostenibilidad mayormente mejora el bienestar de las personas.

Si bien no existe un vínculo directo entre la *biodiversidad* (vértice 7) y el *bienestar* (vértice 15), hay un camino positivo de longitud 2 y seis caminos de longitud 3, desde el vértice 7 al vértice 15. Estos caminos son:

$$7 \to 14 \to 15 \qquad \text{(P12)}$$

$$7 \to 11 \to 14 \to 15 \qquad \text{(P13)}$$

$$7 \multimap 2 \multimap 18 \to 15 \qquad \text{(P14)}$$

$$7 \multimap 4 \multimap 18 \to 15 \qquad \text{(P15)}$$

$$7 \to 6 \to 18 \to 15 \qquad \text{(P16)}$$

$$7 \multimap 3 \multimap 19 \to 15 \qquad \text{(P17)}$$

$$7 \to 6 \to 20 \to 15 \qquad \text{(P18)}$$

Todos los caminos son positivos. Esto sugiere fuertemente que la biodiversidad local mejora el bienestar.

Desde la *biodiversidad* (vértice 7) hasta la *acumulación de desechos domésticos* (vértice 1) podemos encontrar un camino de longitud 3 y dos caminos de longitud 4:

$$7 \to 6 \to 8 \multimap 1 \qquad \text{(P19)}$$

$$7 \to 11 \to 6 \to 8 \multimap 1 \qquad \text{(P20)}$$

$$7 \multimap 2 \multimap 6 \to 8 \multimap 1 \qquad \text{(P21)}$$

Todos estos caminos son negativos, ya que contienen un número impar de arcos negativos, lo que indica que la biodiversidad tiene el potencial de inhibir la acumulación de desechos en las quebradas.

Tenga en cuenta que no hay caminos que comiencen de las variables 9 o 15, ya que estas no tienen arcos de salida.

Análisis visual: ciclos

Hemos estudiado ciclos en los que podrían participar las variables de nuestro principal interés (vértices 1, 7, 9 y 15). Primero, observe que las variables 9 y 15 no pueden participar en un ciclo ya que no tienen arcos salientes.

La variable *acumulación de desechos domésticos* (vértice 1) participa en los siguientes tres ciclos de longitud 4:

$$1 \rightarrow 5 \multimap 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C1}$$

$$1 \multimap 7 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C2}$$

$$1 \multimap 11 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C3}$$

y tres ciclos de longitud 5:

$$1 \multimap 7 \multimap 2 \multimap 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C4}$$

$$1 \multimap 7 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C5}$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \multimap 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \tag{C6}$$

Los seis ciclos de longitud 4 y 5 (respectivamente) son todos positivos, ya que contienen un número par de arcos negativos. Esto revela una tendencia reforzante asociada a la acumulación de desechos. Es decir, esta variable presenta una retroalimentación positiva, situación que en este caso, dado su efecto desfavorable para el sistema, se conoce como "círculo vicioso": la acumulación de desechos promueve una mayor acumulación de desechos. Este resultado destaca la necesidad de intervenir en la acumulación de residuos en quebradas a través de acciones centralizadas o autónomas locales.

La variable *biodiversidad* (vértice 7) participa en un ciclo de longitud 4 y dos ciclos de longitud 5:

$$7 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \multimap 7 \tag{C7}$$

$$7 \multimap 2 \multimap 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \multimap 7 \tag{C8}$$

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \multimap 1 \multimap 7 \tag{C9}$$

De manera similar a la variable 1, la biodiversidad participa en ciclos positivos. Tenga en cuenta que estos ciclos son los mismos que los ciclos C2, C4 y C5 identificados para la variable 1 anterior. Esto también implica que la biodiversidad presenta una retroalimentación positiva, que en este caso constituye un "círculo virtuoso" ya que es deseable incrementar esa variable. La biodiversidad engendra biodiversidad. Este resultado subraya la rentabilidad ambiental y el efecto autopotenciador de la inversión de recursos para impulsar la biodiversidad de las quebradas de Valparaíso.

7. Comentarios finales

Para poder participar efectivamente en la sociedad, mujeres y hombres necesitan desarrollar, de preferencia en la escuela, capacidades críticas para enfrentar problemas complejos de la vida real. Estas capacidades incorporan habilidades para el trabajo colaborativo a la vez que para actuar con estricta autonomía intelectual. Una buena manera de lograr estas capacidades es a través de actividades de aprendizaje basado en proyectos que incluyan modelos cualitativos y análisis de fenómenos socioecológicos. Ilustré el potencial de esta estrategia estudiando un conjunto de temas centrales relacionados con el habitar las quebradas de la ciudad de Valparaíso, en Chile. Mostré un procedimiento para construir un modelo cualitativo estructural del sistema de interés, mediante el uso de sidigrafos. En la Tabla 6, usted puede encontrar una lista de conceptos centrales usados en este ensayo, que podrían usarse como punto de partida para estudios posteriores. Luego, presenté algunas técnicas básicas para analizar la estructura de los sistemas socioecológicos basadas en sidigrafos. A través del uso de este enfoque, las herramientas de las matemáticas y de la teoría de sistemas sirven para organizar objetos y fenómenos aparentemente desconectados, que tradicionalmente se estudian por separado dentro de los dominios de las ciencias sociales y naturales. De esta manera, se puede avanzar en la creación de una imagen integrada de ciertos fenómenos complejos. Las habilidades de modelamiento cualitativo y análisis estructural de sistemas fomentan el desarrollo de visiones alternativas sobre causas y soluciones posibles a problemas complejos de la vida real. Aprender a construir modelos cualitativos promueve el pensamiento sistémico, lo que implica una comprensión contextual y sintética de los fenómenos, y desarrolla tolerancia a la incertidumbre y al cambio. Además, estos logros potencian la valoración de las ciencias y las matemáticas desde una perspectiva interdisciplinar, motivando también el uso de herramientas informáticas. La práctica colaborativa para el modelamiento, por otro lado, promueve el trabajo en equipo, la cooperación y la valoración de la diversidad humana. En última instancia, el desarrollo y puesta en práctica de estas habilidades en el aula cataliza el desarrollo del razonamiento, la capacidad de analizar y sintetizar, abordar problemas y proponer soluciones. Esto también implica aportar a la educación para la ciudadanía, mediante aliviar la frustración de las personas cuando se enfrentan a decisiones no triviales, así como con la necesidad u oportunidad de expresar opiniones sobre temas complejos que nos afectan.

Tópico	Central/periférico
Álgebra de matrices	P
Caminos	P
Centralidad	P
Ciclos	P
Grafos	C
Matriz de adyacencia	P
Modelamiento	C
Pensamiento sistémico	C
Retroalimentación	P
Sidigrafos	C
Sistemas	C
Sistemas complejos	P
Sistemas socioecológicos	C
Teoría de sistemas	P

Tabla 6: Principales conceptos cubiertos en este ensayo. Los conceptos se clasifican en centrales (C) o periféricos (P), según su importancia para la comprensión del tema abordado.

Para una comprensión más detallada de estos conceptos, le invito a consultar (en idioma castellano) el libro de Ramos-Jiliberto (2020) u otros más especializados como Wasserman y Faust (2013).

Reconocimiento

El autor recibió apoyo del proyecto de investigación FONDECYT 1190173.

Bibliografía

Angelstam, P., Andersson, K., Annerstedt, M., Axelsson, R., Elbakidze, M., Garrido, P. & Skärbäck, E. (2013). Solving problems in social–ecological systems: Definition, practice and barriers of transdisciplinary research. *Ambio*, *42*(2), 254–265.

Basco-Carrera, L., Warren, A., van Beek, E., Jonoski, A. & Giardino, A. (2017). Collaborative modelling or participatory modelling? A framework for water resources management. *Environmental Modelling & Software*, *91*(1), 95–110.

Ben-Zvi Assaraf, O. & Orion, N. (2005). Development of system thinking skills in the context of earth system education. *Journal of research in Science Teaching*, *42*(5), 518–560.

Cañete Islas, O. (2017). Habitar en la quebrada. Resiliencia urbana y lenguaje de patrones en Valparaíso, Chile. *Revista de Urbanismo*, *37*(1), 1–19. https://doi.org/10.5354/0717-5051.2017.47987

Cañete Islas O.E., Moraga-Lacoste J.L. & López-Flores F.M. (2018). Habitar la quebrada: Conformación de gradientes en las trazas vernaculares de los sectores altos de Valparaíso. *Revista de Arquitectura (Bogotá)*, *20*(2), 20–35. https://doi.org/10.14718/RevArq.2018.20.2.106.

Capra, F. & Luisi, P.L. (2014). *The systems view of life: A unifying vision*. New York, USA: Cambridge University Press.

Colding, J. & Barthel, S. (2019). Exploring the social-ecological systems discourse 20 years later. *Ecology and Society, 24*(1), 2.

Getz, W.M. (1998). An introspection on the art of modeling in population ecology. *BioScience, 48*(7), 540–552.

Lane, D.C. (2000). Diagramming conventions in system dynamics. *Journal of the Operational Research Society, 51*(2), 241–245.

Lane, D.C. (2008). The emergence and use of diagramming in system dynamics: a critical account. Systems Research and Behavioral Science: *The Official Journal of the International Federation for Systems Research, 25*(1), 3–23.

MEA (Millennium Ecosystem Assessment). (2005). *Ecosystems and human well-being: synthesis*. Washington DC, USA: Island.

Novak, J.D. (1990). Concept maps and Vee diagrams: Two metacognitive tools to facilitate meaningful learning. *Instructional science, 19*(1), 29–52.

Pino, A. (2014). *Quebradas de Valparaíso. Memoria social autoconstruida*. Santiago de Chile: Consejo Nacional de Artes y Culturas, CIGIDEN, Universidad Técnica Francisco Santa María. Descargado desde https://www. researchgate.net/publication/282328448_ Quebradas_de_Valparaiso_Memoria_ soc.

Pino, A. & Hormazábal, N. (2016). Informal settlements: Reinterpreting rural imaginary in urban areas: The case of Valparaiso's ravines. *Habitat International, 53*(1), 534–545.

Prell, C., Hubacek, K., Reed, M., Quinn, C., Jin, N., Holden, J. & Sendzimir, J. (2007). If you have a hammer everything looks like a nail: traditional versus participatory model building. *Interdisciplinary Science Reviews, 32*(3), 263–282.

Ramos-Jiliberto, R. (2020). *Deja a la estructura hablar. Modelización y análisis de sistemas naturales, sociales y socioecológicos*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Mayor.

Ramos-Jiliberto, R. & Jiliberto Herrera, R. (2021). Modelización y análisis de escenarios de intervención en sistemas socio-naturales: El caso del sistema de sustentabilidad energía-territorio de la región de Coquimbo, Chile. Revista de Ciencias Ambientales, 55(1), 1-31.

Sedlacko, M., Martinuzzi, A., Røpke, I., Videira, N. & Antunes, P. (2014). Participatory systems mapping for sustainable consumption: Discussion of a method promoting systemic insights. *Ecological Economics, 106*(1), 33–43.

Schoon, M. & Van der Leeuw, S. (2015). The shift toward social–ecological systems perspectives: insights into the human-nature relationship. *Natures Sciences Sociétés, 23*(2), 166–174.

Voinov, A., Jenni, K., Gray, S., Kolagani, N., Glynn, P.D., Bommel, P. & Sterling, E. (2018). Tools and methods in participatory modeling: Selecting the right tool for the job. *Environmental Modelling & Software, 109*(1), 232–255.

Wasserman, S. & Faust, K. (2013). *Análisis de redes sociales. Métodos y aplicaciones* (Vol. 10). Madrid, España: CIS-Centro de Investigaciones Sociológicas.

Wikipedia contributors. (2020a, January 2). Great Fire of Valparaíso. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Descargado 18:57, 8 de Abril de 2020, desde https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Great_Fire_of_Valpara%C3%ADso&oldid=933677036.

Wikipedia contributors. (2020b, March 12). List of earthquakes in Chile. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Descargado 04:58, 9 de April de 2020, desde https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_earthquakes_in_Chile&oldid=945143063

Williams, E.A., Zwolak, J.P., Dou, R. & Brewe, E. (2019). Linking engagement and performance: The social network analysis perspective. *Physical Review Physics Education Research, 15*(2), 020150.

Capítulo 6
Un problema de modelización con y sin uso de un sensor de temperatura

Miguel Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile

En este capítulo proponemos un problema de modelización que puede ser realizado con implementos de la vida diaria y también usando programación en bloques y un sensor de temperatura. A lo anterior agregamos un análisis didáctico relacionado con la tarea, útil, además, para orientar la enseñanza de conceptos matemáticos a nivel escolar mediante el uso de este tipo de tecnología. Por otro lado, asumimos que utilizar variables y listas al abordar tareas de modelización mediante programación en bloques, redunda en la configuración de tablas, recurso que puede ayudar a estimular el concepto de función desde un enfoque diferente al analítico.

Palabras clave: *modelización, sensores, mBlock, pensamiento inductivo, indagación.*

1. Presentación

Vamos a considerar la siguiente tarea de modelización, que fue aplicada a un grupo de estudiantes de secundaria por Vásquez, Mena-Lorca, Rodríguez y Cabrera (en prensa).
Instrucciones:

a. Luego de hervir agua, viértala en una taza, con precaución.
b. Introduzca el termómetro, sin que esté en contacto con la superficie de la taza.
c. Una vez que alcance la máxima temperatura, retire el termómetro de la taza.
d. Registre el valor de la temperatura que indica el termómetro durante 5 minutos, en intervalos de 10 segundos.

¿Qué relación puede establecer, a partir de los datos obtenidos, entre el tiempo y la temperatura?

En primer lugar, daremos una solución al problema que usa un termómetro y en la cual los datos son tomados por los alumnos de manera tradicional. Aprovecharemos de explicitar las etapas del ciclo de modelización para este problema. Añadiremos un análisis didáctico en la terminología de Guy Brousseau (Brousseau, 1998).

Posteriormente, realizaremos otra solución, con uso de sensores electrónicos y software *ad hoc*. Para ello, comenzaremos por cambiar levemente el enunciado del problema. Luego, daremos una descripción detallada de las herramientas tecnológicas que el profesor puede usar tanto para su propio estudio como para introducir a los estudiantes a su utilización. A continuación, añadiremos elementos para la solución del problema, y un análisis didáctico.

Finalmente, hacemos algunos comentarios de carácter general, y agregamos referencias bibliográficas.

2. Primera solución

Análisis Didáctico

Esta tarea fue propuesta en un *estudio de clases* (Isoda, Arcavi y Mena, 2012), y para su análisis se consideraron las fases del ciclo de Modelización de Borromeo-Ferri (2006), ciclo que se aprecia en la Figura 1.

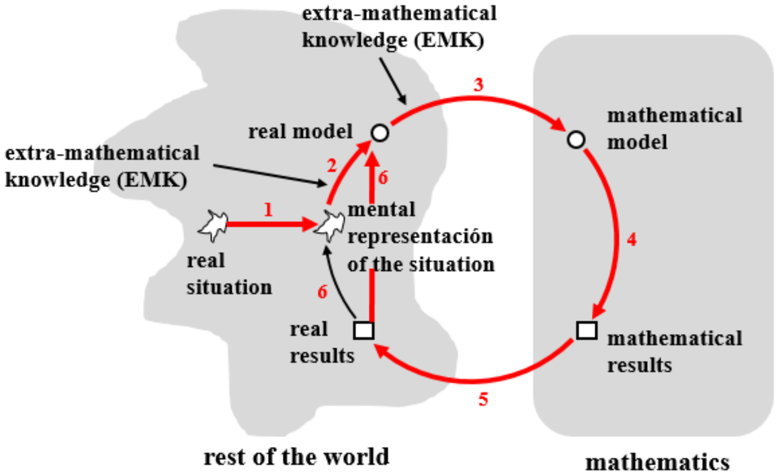


Fig. 1: Ciclo de Modelización (Borromeo-Ferri, 2006, p. 92)
(Según el movimiento de los punteros de un reloj análogo): situación real; 1; representación mental de la situación; conocimiento extramatemático, (EMK); 2; modelo real; conocimiento extramatemático, (EMK); 3; modelo matemático; 4; resultados matemáticos; 5; resultados reales; 6; representación mental de la situación

El ciclo es iniciado con una situación del mundo real (RS) que puede ser dada en distintos formatos, ya sea una imagen, un texto, o ambos. Luego existe una transición hacia una fase de representación mental de la situación (MRS), que es la comprensión parcial del problema, la cual se puede dar de manera implícita e inconsciente para quien intenta resolver la tarea. En la fase MRS, el individuo toma decisiones y filtra información del problema. La siguiente fase es la idealización y simplificación del problema; dependiendo de qué tipo de problema se presente, surge la demanda o pregunta de conocimiento extramatemático. La próxima fase es el modelo real (RM), el que muestra cómo es construido el modelo; dibujos o fórmulas pueden representar el RM. Se continúa con la *matematización*, donde se recurre al conocimiento extramatemático para la construcción de un modelo matemático, donde aparecen representaciones externas por medio de dibujos o fórmulas, pero las declaraciones se hacen en un modo matemático. Luego hay que hacer trabajo matemático, lo que requiere de las competencias matemáticas del modelador, para obtener los resultados matemáticos (MR). Estos son interpretados, incluso de manera inconsciente, para obtener los resultados reales (RR), los cuales deben ser validados, discutiendo la correspondencia entre los RR y el RM de la situación. Existen dos tipos de validación, una es intuitiva y la otra radica en el conocimiento matemático. Generalmente, estos tipos de validación son inconscientes y conscientes, respectivamente.

Cabe destacar que Vásquez *et al*. (en prensa), identificaron y analizaron cómo los estudiantes transitaron por las distintas fases de dicho ciclo, desde un punto de vista cognitivo y epistemológico.

(1) Fase de *Comprensión.* Los estudiantes deben crear una imagen mental de la situación que están experimentando; imaginar a qué se debe el enfriamiento del agua. Podrían evocar la imagen de una persona cubriendo una taza de café o té caliente con sus manos para así aumentar su temperatura corporal, o bien imaginar a un esquimal con sus prendas de vestir para mantener la temperatura de su cuerpo en un ambiente inhóspito donde prevalecen temperaturas bajo cero. Con esas imágenes los estudiantes podrían reflexionar sobre las variables al haber trasferencia de calor y la variación de la temperatura de un objeto o sustancia al enfriarse.

(2) Fase de *Simplificación*. Los estudiantes deben pensar en la temperatura ambiente, el tipo de recipiente y la temperatura del líquido; en definitiva, la trasferencia de calor a un ambiente estable. Un punto crucial es establecer la manera de registrar la temperatura del líquido; para ello deberán establecer una unidad de tiempo adecuada, cada cierta cantidad de minutos, por ejemplo. Primero podrían observar las mediciones en una tabla o lista y, posteriormente, analizar que ocurre con la gráfica en una computadora, para finalmente enfocarse en las características de la variación de la temperatura mediante la gráfica de los puntos obtenidos.

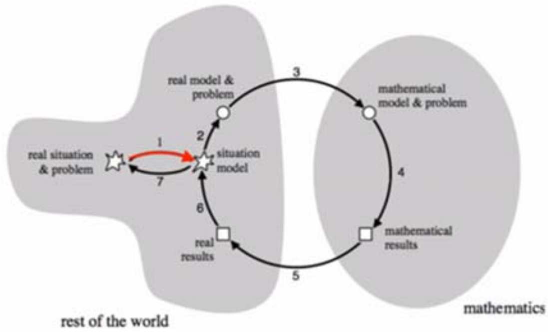
(3) Fase de *Matematización*. En este punto, los estudiantes deberán trabajar con los datos que han logrado recopilar; en particular, pueden enfocarse en comparar la variación de la temperatura, observando por ejemplo que la variación del tiempo es constante y conlleva, por tanto, asociada una progresión aritmética. Por otro lado, es necesario analizar qué ocurre con la razón de cambio de la variable temperatura. En definitiva, activar la comparación por diferencia y cociente, verificando si hay una posible covariación entre ambas variables.

(4) Fase de *Trabajo Matemático*. En esta etapa, previamente a llevar los datos a un software de geometría dinámica o a una planilla Excel, los estudiantes pueden enfocarse en establecer las condiciones para asumir alguna expresión polinomial que relacione las variables y los datos que se han obtenido en la experimentación. Lo anterior basándose en el comportamiento de las derivadas de una función polinomial. Por otro lado, se podría establecer un eventual comportamiento exponencial al relacionar la tasa de cambio y la variación del tiempo.

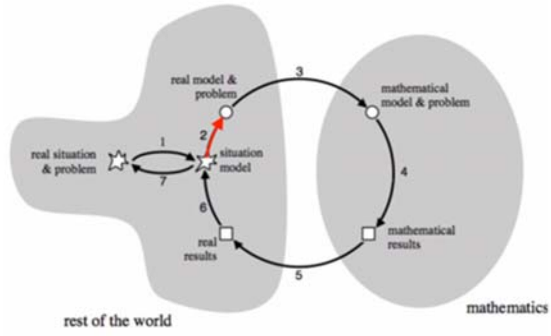
(5) Fase de *Interpretación.* En este punto, se podría cotejar el resultado de utilizar el modelo que se ha determinado para modelar los datos y predecir aquellos que el sensor siguió registrando. Con ello se puede ajustar parámetros del modelo real. Recurriendo a la interpretación gráfica, se pude ver qué tan pertinente resultó ser la unidad de tiempo (intervalo) utilizada para registrar la temperatura del agua; además, qué tan útiles resultan ser los primeros datos y los últimos datos.

(6) Fase de *Validación*. Finalmente, los estudiantes pueden repetir el experimento y considerar aquellos datos que la fase 5 permitió validar, además de considerar qué ocurre al realizar nuevos experimentos, considerando otra temperatura y manteniendo constante el recipiente, y ver si el modelo real se ajusta a la nueva medición.

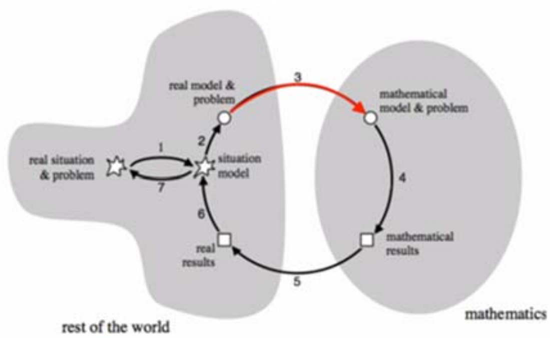
Siguiendo el ciclo de modelización de Borromeo-Ferri (2006, p. 92) presentamos un ajuste al plan de clases planteado por Vásquez *et al*.

Descripción	Activación de la fase de modelización
La pregunta *¿Qué problema podemos resolver matemáticamente con este termómetro y el vaso precipitado?* se ubica en la fase de Comprensión de la Situación (COM); esta etapa es el primer acercamiento a la situación de modelación, la cual debe ser comprendida por el estudiante; es la transición de la situación real a su representación mental (MRS).	

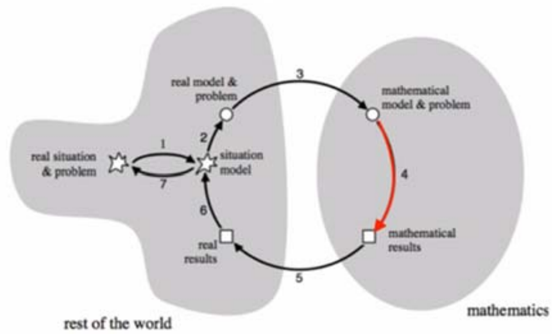
La interrogante *¿Qué ocurrirá con la temperatura a medida que transcurre el tiempo?* se ubica en la fase de Simplificación (SIM); es la transición de la MRS al modelo real. En ella se comienza a idealizar la situación, descartando variables externas. El propósito es dar sentido a la acción de medir la temperatura mientras avanza el tiempo.



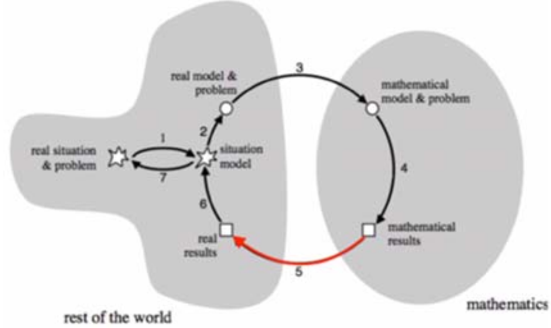
Las tareas de medir la temperatura del termómetro cada cierto intervalo de tiempo y posteriormente registrarlo en la tabla de datos se ubican en la fase de Matematización (MAT); esta es la transición del modelo real al modelo matemático. En ella se constituyen los modelos matemáticos de la situación. En esta fase, los estudiantes representan los valores en una tabla de datos y, a partir de esto, deben establecer relaciones con base en los datos obtenidos.



Durante la fase de matematización, los estudiantes deben describir las relaciones que pueden establecer a partir de los valores registrados en la tabla; dicha acción nos permite transitar desde la fase de Matematización al Trabajo Matemático (T. MAT). Durante esta fase, los estudiantes deben ingresar los datos obtenidos a Geogebra, graficarlos, y nuevamente indicar qué relaciones pueden establecer a partir del registro gráfico. Este proceso se sitúa en la transición del modelo matemático a los resultados matemáticos. En ella, se comienza a trabajar con los modelos considerados en la etapa de matematización, utilizando las competencias matemáticas del individuo.



Durante la fase de trabajo matemático, las preguntas *¿Qué temperatura hay a los 45 segundos? Argumente su respuesta,* y *¿Es válido este argumento para predecir la temperatura a los 217 segundos?* son articuladores para transitar a la fase de Interpretación (INT). En esta fase ocurre el tránsito entre los resultados matemáticos y los resultados reales. Se analizan y comparan los resultados matemáticos obtenidos con el modelo real. Los



estudiantes verifican que, a medida que transcurre el tiempo, efectivamente la temperatura va disminuyendo.

La fase de Validación (VAL) se sitúa en el momento en que los estudiantes comunican las relaciones establecidas en el plenario desarrollado por ellos, en el cual presentan las conclusiones obtenidas a partir del experimento llevado a cabo. Durante esta fase ocurre la transición entre los resultados reales y la representación mental de la situación, evidenciando correspondencia entre ambos. En esta, los estudiantes, en el plenario conformado por el docente, presentan sus resultados y las conclusiones del proceso experimental.

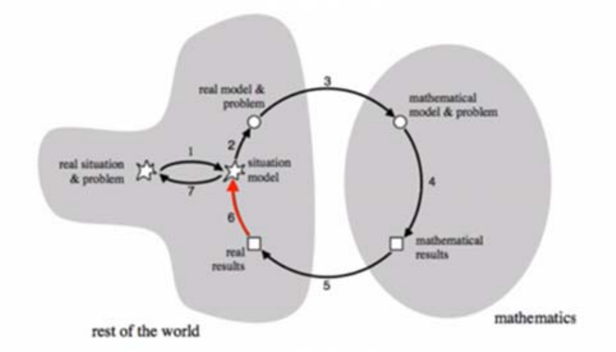


Tabla 1: Descripción del plan de clase en correlato con el ciclo de modelización

3. Solución con uso de sensores

Ahora usaremos un sensor de temperatura en lugar del termómetro que se utilizó en la primera versión.
Primeramente, enunciaremos nuevamente el problema, con leves modificaciones:

a. Luego de hervir agua, viértala en una taza, con precaución.
b. Introduzca el sensor de temperatura sin que este esté en contacto con la superficie de la taza.
c. Programe el sensor de temperatura para que, durante 5 minutos y en intervalos de 10 segundos, se registre la variación de la temperatura y muestre una gráfica de lo está ocurriendo con esta.

¿Qué relación puede usted establecer, a partir de los datos obtenidos, entre el tiempo y la temperatura?

A continuación, proponemos, *grosso modo,* dos etapas para una tarea de modelización en la clase de matemática. Para ello podemos utilizar recursos de *Makeblock* con tecnología *Arduino* —placas y software con código abierto— que permite interactuar con el mundo real (https://arduino.cl/). Makeblock es una empresa de tecnología china que provee de productos para la robótica educativa y entretenimiento STEAM (https://www.makeblock.es/). En particular, haremos referencia al *Inventor Electronic Kit* para llevar adelante una tarea de modelización programando un sensor de temperatura con el programa mBlock.

Sobre las funcionalidades del software mBlock

A continuación, comenzamos con una breve descripción de la interfaz del software *mBlock*. Debemos tener presente que su aspecto puede variar según la versión que se desee utilizar. En la Figura 1 se observan las tres zonas de la versión 4.0.1.

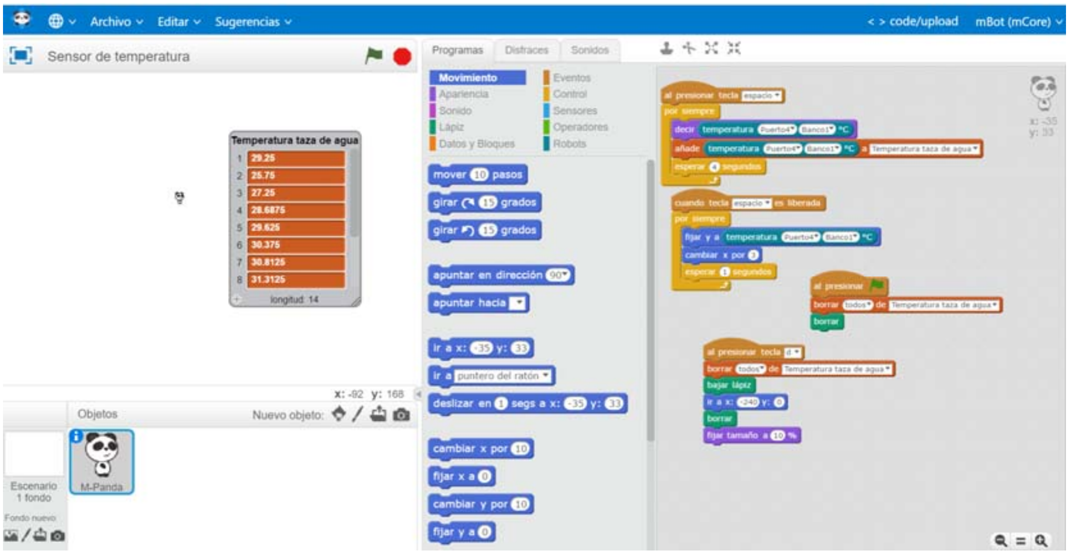


Fig. 2: La interfaz del software mBlock versión 4.0.1

A la izquierda de la interfaz se encuentra el *escenario*. Es ahí donde se observan *acciones* tales como animar un objeto, generar interacción entre dos o más objetos, procesar información, entre otras, o se interactúa con algún *objeto* (puede ser una imagen o aquello que el usuario pueda crear desde la herramienta dibujo o bien algún recurso que se pueda importar a la interfaz), dependiendo de la tarea. La interacción es posible mediante el teclado, el mouse o la cámara de vídeo de la computadora. Bajo el *escenario* se ubican los *objetos* que intervienen en una tarea. A estos se les puede activar o desactivar los atributos que por defecto se les asigna —estilo de rotación, dirección, mostrar o arrastrar—. En la barra de menú se encuentran algunos íconos que permiten duplicar o borrar un objeto; también es posible disminuir o ampliar su tamaño.

En la columna central de la interfaz hay tres pestañas. Con la pestaña *programas* se accede a diez secciones clasificadas por color. Cada una de esas secciones agrupa diferentes *bloques* que están asociados con alguna *acción*; algunos bloques incluyen parámetros que se pueden modificar durante el proceso de programación. Con la segunda pestaña aparece la herramienta *dibujo*, que permite crear figuras, disfraces o escribir textos. Un *disfraz* ayuda a simular el efecto de movimiento para un *objeto*, entre otras posibilidades. La tercera pestaña muestra la herramienta para grabar y editar audios. Un audio se puede usar para retroalimentar alguna tarea o dar instrucciones.

Por último, a la derecha de la interfaz se encuentra la zona donde se arrastran y conectan bloques para programar una tarea. En la sección *eventos* están los *bloques* que permiten ejecutar las distintas *acciones* en el *escenario*, pudiéndose configurar distintas secuencias de *bloques* para un mismo *objeto*.

En la Tabla 1 se muestra una descripción general de algunas *acciones* que se pueden activar con los distintos bloques de cada *sección*.

Sección	Descripción	Sección	Descripción
Movimiento	Desplazar objeto, ubicación	Eventos	Iniciar una acción, enviar mensajes
Apariencia	Textos, disfraz, atributos	Control	Ciclos iterativos
Sonido	Agregar audios y sonidos	Sensores	Condicionar acciones y preguntar
Lápiz	Trazar líneas, color y grosor	Operadores	Operadores matemáticos y conectores
Datos	Crear variables y listas	Robots	Sensores y dispositivos

Tabla 2: Secciones de la interfaz de mBlock versión 4.0.1

Variables, operadores y tareas rutinarias

Una de las bondades que ofrece mBlock es crear variables y listas, lo que se puede realizar accediendo a la sección *Datos*. Para crear una variable hay que asignar rótulos y, a cambio, se obtiene un conjunto de bloques que permiten fijar, modificar, mostrar u ocultar el contenido de esas variables —sea este un texto, un número o una combinación de ambos—. Para el caso de una lista, se procede de la misma manera que para una variable; la diferencia radica en el número de bloques que se despliegan. El contenido de la variable o lista se muestra en el escenario mediante un bloque que está incorporado por defecto. El uso de operadores es otra funcionalidad a tener en cuenta en mBlock, para ello se debe acceder a la sección *sensores*. Los operadores que se disponen permiten realizar cálculos, asignar números al azar, componer textos, determinar el número de caracteres de un número o de una palabra, entre otras posibilidades.

Explorando el sensor de temperatura del Inventor Electronic Kit

En esta primera etapa es necesario organizar a los estudiantes en grupos de trabajo mediante la asignación de roles, dentro de los cuales pueden estar:

(a) *El mecánico* es quien debe procurar conectar el sensor a la placa Orion del Inventor Electronic Kit mediante el adaptador RJ25 Me, como se aprecia en la Figura 2.

(b) *El inventor* es quien debe implementar técnicas y estrategias para llevar a delante la solución de una tarea.

(c) *El programador* es quien debe organizar rutinas definiendo variables y utilizando operadores matemáticos.
(d) *El representante* es quien debe dar a conocer los resultados de las distintas tareas que se proponen.

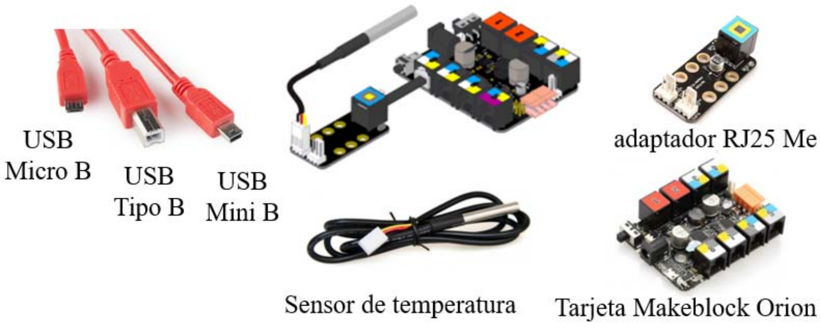


Fig. 3: Sensor y dispositivos a utilizar del Inventor Electronic Kit

Cada equipo deberá explorar las bondades del sensor de temperatura conectando el sensor de temperatura a la placa Orión y luego al computador vía un Cable USB 2.0, conector USB tipo A (al puerto USB del computador) y el conector USB micro Tipo B (en la placa Orion)[12]. Cabe indicar que el sensor tiene una carcasa de metal que puede medir la temperatura y, por lo tanto, requiere un tiempo de respuesta para ajustar la medición que se está realizando. Es importante tener en cuenta que, al manipular el sensor, éste funciona adecuadamente hasta los 125°C; el PVC que recubre los cables se puede dañar con facilidad, así que es recomendable mantener el cable sumergido sólo bajo los 100ºC. Cabe indicar que la carcasa de acero inoxidable no tiene ese problema.

A continuación, mediante el software mBlock, se puede programar el sensor de temperatura mediante el computador. En la Tabla 2 se muestra la programación para mostrar en pantalla el cambio de temperatura mientras el sensor está en funcionamiento. Es importante destacar que la medición por defecto se realiza cada 1 segundo, pero se puede cambiar esa frecuencia desde la programación.

Propósito de la actividad	Secuencias de bloques
Con esta secuencia de bloques, un profesor o profesora puede pedir a sus estudiantes, organizados por grupos de trabajo, que observen lo que ocurrirá en la pantalla al presionar la tecla m, registrando sus observaciones en una hoja de cuaderno. Esta	

[12] El conector USB tipo B es para conectar la placa Orion a la placa del mBot, utilizando el adaptador RJ25 Me.

situación didáctica puede ser abordada siguiendo las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1980).	

Tabla 3: Secuencia de bloques para la exploración del sensor de temperatura

Por otro lado, desde las funcionalidades de mBlock, se podría crear una lista o bien configurar una tabla combinando bloques de las secciones operadores y datos. Cabe indicar que la lista se pude exportar a un archivo de texto cuyos datos se pueden copiar en una planilla de cálculo como Excel para así obtener una gráfica.

Otra posibilidad, como se muestra en la Figura 3, es programar el sensor de temperatura para que en la interfaz de mBlock aparezca una gráfica; por ejemplo, se podría graficar la temperatura al apretar el sensor con la mano durante un período determinado y luego dejarlo expuesto a las condiciones del ambiente para registrar en ese momento las temperaturas por un lapso de tiempo.

Fig. 4: Programación del sensor para mostrar la gráfica de la temperatura

Por último, se puede agregar una lista para registrar los datos y después exportarlos a un archivo de texto. Cabe indicar que versiones superiores de mBlock permiten agregar extensiones para que los datos se exporten directamente a una planilla Excel, sin que el usuario tenga que exportar los datos mediante un archivo de texto. Simplificar pasos, mediante extensiones, podría no ser recomendable en una primera etapa. Por ello, es aconsejable enfocarse inicialmente en la versión 4.0.1 de mBlock.

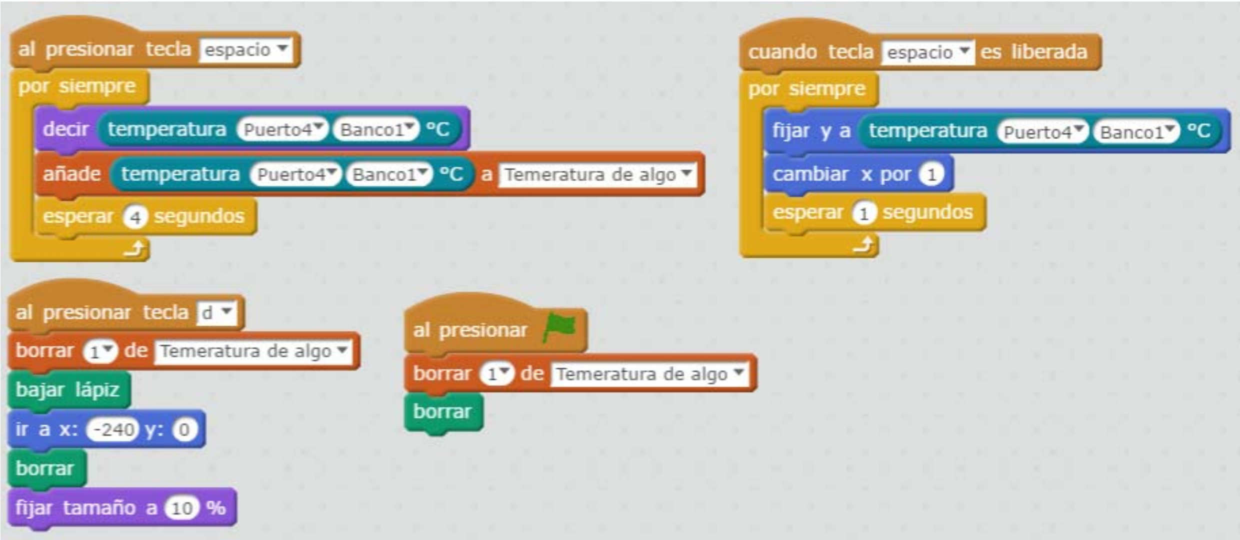


Fig. 5: Incorporación de una lista y la posibilidad de borrar datos de esta

Para concluir con esta primera etapa, cada grupo podría escribir un informe sobre el funcionamiento del sensor de temperatura o bien diseñar una cápsula (vídeo) para dar cuenta de los hallazgos obtenidos.

Cabe indicar que la toma de datos se puede programar variando la unidad de tiempo a criterio de los estudiantes; por ejemplo, cada 2 segundos o cada 5 segundos. Lo anterior podría estar en estrecha relación con el aspecto de la gráfica que se puede activar en la interfaz del mBlock. El uso de listas y tablas en este tipo de actividad puede ser adecuado en el sentido que estimula el concepto de función desde una perspectiva distinta a la analítica. Por otro lado, cabe resaltar que el uso de variables y parámetros permite a los estudiantes abordar los distintos usos de una variable en el sentido de lo que plantean Ursini y Trigueros (2006).

A modo de sugerencia, una vez terminada la actividad que hemos analizado, los estudiantes podrían aprovechar dicha experiencia para focalizarse en el sensor ultrasónico o bien en el sensor de luminosidad del mBot[13]. Sin perjuicio de lo anterior, podrían reportar especificaciones de cualquier otro sensor que les sea de interés, como el sensor seguidor de línea, entre otros.

Por último, la combinación de distintos sensores podría abrir la posibilidad de que los estudiantes aborden un problema que diga relación con un sistema de control; por ejemplo mantener la temperatura estable en función del cambio de luminosidad en un ambiente determinado.

[13] Dispositivo robótico de Makeblock que está compuesto por una placa, ruedas, sensores.

Análisis Didáctico

Pensamos la situación ya descrita desde las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas, TSD (Broussseau, 1998):

En la *fase de acción* un estudiante podría utilizar el sensor de temperatura recurriendo a distintos estímulos del entorno para observar la evolución de los datos en la pantalla; por ejemplo, dejar el sensor a temperatura ambiente y esperar a ver los datos, o bien pasarlo de temperatura ambiente a un vaso con agua que contenga un cubo de hielo —otro integrante del grupo podría repetir para dos o tres cubos de hielo— o mantener el sensor con la mano apretada, entre otras posibilidades, teniendo presente no dañar el sensor.

En la *fase de formulación* se espera que un representante de cada grupo de estudiantes pueda dar cuenta de conjeturas en temas tales como la precisión en la medición, el tiempo de respuesta para arrojar datos adecuados en función de la forma y las características del sensor; incluso, en temas que digan relación con el manejo y funcionamiento de los dispositivos con el computador. Se podría pensar en posibles preguntas de devolución: Si el espesor del material con el que está construida la carcasa fuera dos o tres veces más grueso, ¿en qué podría afectar aquello a la medición? Entendiendo que dentro de esa carcasa de metal está el sensor de temperatura y lo introdujéramos directamente en el agua fría, ¿qué cambios podríamos observar en las mediciones? Si el sensor es lento al medir los cambios bruscos, ¿es eso bueno o malo para el científico que necesita buenos datos de sus experimentos?

Para la *fase de validación* los estudiantes pueden dar explicaciones plausibles sobre la pertinencia de los datos en función del tiempo de repuesta que el sensor necesita frente al estímulo, considerando el recubrimiento de metal del sensor, entre otros aspectos.

Cabe precisar que estas tres primeras fases no se dan en un orden lineal, pues se podría presentar algún aspecto en la fase de formulación o validación que conlleve nuevamente a la fase de acción; hay un proceso cíclico que lleva al grupo curso finalmente a decantar elementos comunes asociados con el dispositivo y el fenómeno de la transferencia de calor.

Por último, en la *fase de institucionalización* el profesor podría hacer referencia a las características del hardware, como las placas Arduino y sus peculiaridades, conectores, entre otros. También a aspectos conceptuales que digan relación con el calor específico y la transferencia de calor, por nombrar algunos.

En la Figura 6 presentamos la secuencia de bloques que permite registrar la temperatura del agua cada vez que transcurren 10 segundos, pudiendo variarse ese intervalo de tiempo. Además, se ha agregado a dicho programa una gráfica para que los estudiantes puedan observar la variación de temperatura; a su vez, se agregó una lista para registrar en tiempo real los valores de la temperatura. Todo ello se podría realizar tomando en cuenta el aprendizaje que se ha ido aquilatado con las diferentes tareas que se han ido proponiendo a lo largo de este capítulo.

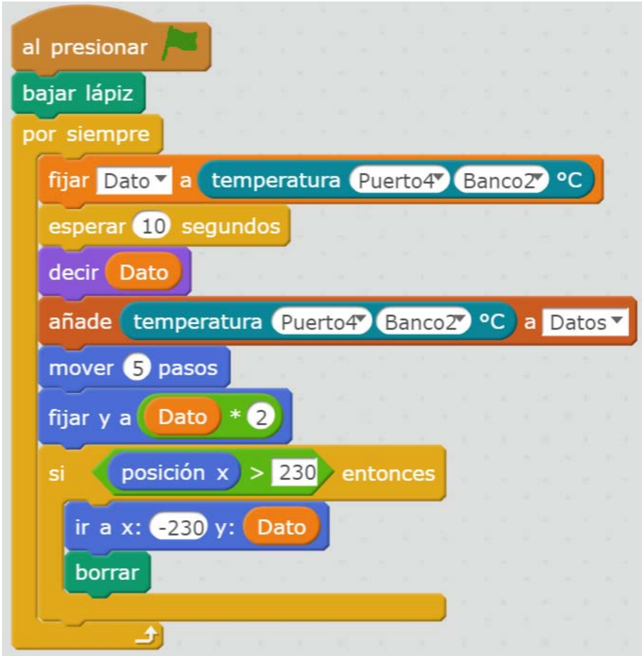


Fig. 6: Secuencia de bloques para programar el sensor de temperatura

Cabe señalar que el uso de este sensor requiere tener en cuenta aspectos tales como la precisión y la pertinencia de las mediciones que se obtendrán, lo que significará descartar una parte inicial de los registros. Por otro lado, se deberá considerar la pertinencia del intervalo de tiempo que es más adecuado para realizar un tratamiento de los datos que se obtendrán. Un aspecto favorable de realizar esta tarea mediante el uso del sensor de temperatura y no con termómetro, es que el dispositivo se mantiene fijo en la taza de agua caliente y, de manera simultánea, cada estudiante podrá variar los parámetros al trabajar con su respectivo vaso de agua. Con ello se obtendrán distintos conjuntos de datos manteniendo las condiciones ambientales para cada caso. Por otro lado, los datos se pueden llevar a una lista y se pueden exportar a una planilla Excel para su eventual tratamiento y poder así avanzar en la formulación de un modelo que describa el enfriamiento del agua.

A modo de conclusión

A la luz de lo que se hemos presentado, mediante el uso de recursos de *MakeBlock y mBlock* se aprecia un potencial que es auspicioso para abordar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Por lo tanto, es deseable que un profesor o profesora que trabaja en el sistema escolar pueda tener la oportunidad de reflexionar sobre aquello y, a la vez, involucrarse con este tipo de tecnología.

Por otro lado, es importante notar que, para hacer uso de todos estos recursos y a su vez diseñar otro tipo de tareas, se requiere apreciar y direccionar la matemática que está involucrada en una tarea. Por ejemplo, pensando en el problema estudiado, es conveniente tener en cuenta que el concepto de función exponencial en su construcción requirió una mirada articulada entre dos variables, una dependiente y otra dependiente, que se compartan según una progresión aritmética geométrica, respectivamente, dando paso a una invariante que caracteriza la función exponencial, entre otros aspectos.

Además, se deben tomar en cuenta variables didácticas que intervienen; por ejemplo, el tipo de obstáculos, sean estos didácticos o epistemológicos (Brousseau, 1998), el tipo de registros de representación semiótica que están en juego en una tarea (Duval, 2004), el rol que juega un artefacto o herramienta (Douady, 1986), las concepciones de los profesores y estudiantes en torno a los conceptos matemáticos, las limitaciones de una interfaz o de un recurso tecnológico, por nombrar algunas. Con todo ello se podrá llevar adelante, de manera eficiente y efectiva, el diseño de tareas con recursos tecnológicos a nivel escolar.

Lo anterior abre la posibilidad de que estudiantes en formación inicial y profesores en desarrollo profesional puedan reflexionar sobre el uso de este tipo de tecnología en su proceso formativo y experimentar con ella, además de motivarse para investigar el efecto que tiene este tipo de recursos en los aprendizajes de los estudiantes.

En el problema propuesto se pudo apreciar cómo el concepto de variable se fortalece al programar una tarea y tener que condicionar o alimentar un proceso recursivo. El uso de listas para configurar tablas, sumado a la idea de variable, tributan considerablemente al concepto de función. Los diferentes usos de la variable en la variedad de tareas que se presentaron permiten fomentar tanto el pensamiento inductivo, ir de lo particular a lo general analizando casos de manera gradual, como el deductivo, al asumir el uso de variables y aplicar propiedades para ir descubriendo posibles soluciones a un problema.

Por último, esperamos que este problema propuesto, y su respectivo análisis didáctico, así como las herramientas tecnológicas que usamos, puedan servir de referencia para que profesores, estudiantes de pedagogía y estudiantes de posgrado hagan uso de este tipo de recursos tanto para promover aprendizajes como para realizar investigaciones.

Bibliografía

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle

Isoda, M.; Arcavi, A. & Mena, A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. (3ª. Ed.). Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes estudian matemáticas avanzadas? *Revista Educación Matemática*, *18*(3), 5-38.

Vásquez, P. Mena-Lorca, A., Rodríguez M. & Cabrera, A. (2021). *La modelización Matemática, habilidad a desarrollar en el currículo escolar de Chile*. En E. Ramos; A. Morales y C. Guerrero (Eds.). Aportes desde la Didáctica de la Matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente. Modelización Matemática (en prensa).

Capítulo 7
Modelamiento matemático, experimentos simples y conceptos fundamentales de la física

Francisco Vera y Rodrigo Rivera
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

El comportamiento de los diversos fenómenos naturales presentes en nuestro mundo cotidiano se puede describir de manera muy simple usando los conceptos fundamentales de la ciencia, conceptos que se han desarrollado a la par con la construcción de la ciencia moderna. Para enseñar qué es la ciencia y la importancia de la experimentación en el método científico, es conveniente guiar a los alumnos usando experimentos simples y contextualizados, que tengan una raíz conceptual profunda y que les permitan entender, en base a ejemplos concretos, cómo se modela la naturaleza. En esta sección discutiremos diversos experimentos muy simples de replicar y cuya conexión con los conceptos fundamentales de la física permite a los profesores de matemáticas o ciencias guiar a sus alumnos hacia un descubrimiento de cómo funciona su entorno.

1. Introducción

La idea fundamental que ha guiado a los grandes pensadores en su búsqueda por entender cómo funciona el universo es que en los fenómenos naturales existen regularidades y que es posible descubrir principios básicos que guían de manera simple la evolución de todo fenómeno natural. Esta idea estaba presente hace más de dos mil años, cuando el comportamiento de la naturaleza se describía en base a los "elementos" tierra, aire, fuego y agua, y ya en ese tiempo había filósofos que realizaban experimentos que les ayudaran a descubrir los principios básicos que rigen el comportamiento de todo fenómeno natural.

El inicio de una descripción matemática de la naturaleza que se mantuvo vigente por muchos siglos se basó en regularidades que permitían establecer conexiones entre el comportamiento de la naturaleza y la forma de figuras geométricas. Un ejemplo icónico es la relación entre las trayectorias de los planetas y la perfección incuestionable del círculo.

El nacimiento de la ciencia moderna se atribuye a los trabajos experimentales de Galileo en su estudio metódico de la caída libre de objetos y del movimiento de objetos que caen por planos inclinados. Estos simples experimentos permitieron a Galileo comprobar que los objetos aceleran en su caída hacia la superficie de la Tierra. Posteriormente, los resultados de Galileo permitieron a Newton formular una descripción matemática que explicaba de manera unificada los distintos movimientos observados por Galileo.

La descripción matemática de Newton hoy se expresa como una ecuación diferencial conocida como "segunda ley de Newton" y permite modelar el movimiento de cualquier sistema. Aunque la relatividad especial, la relatividad general y la mecánica cuántica extienden el poder explicativo de las ecuaciones clásicas de Newton, la segunda ley nos permite generalmente obtener con mucha precisión la evolución temporal del movimiento de una gran diversidad de objetos, desde átomos o moléculas hasta incluso el movimiento de planetas, estrellas y galaxias. Si se conocen las fuerzas que actúan sobre un objeto y la posición y la velocidad del objeto en un instante particular, la segunda ley de Newton nos permite obtener la posición y la velocidad del objeto para tiempos anteriores y posteriores a ese tiempo particular. Podemos así predecir el comportamiento futuro del objeto y además conocer las posiciones y velocidades de su comportamiento en el pasado. El poder modelar de manera matemática el movimiento de objetos ha permitido extender la metodología usada por Galileo y Newton hacia todas las áreas de las ciencias naturales, llevando al ser humano hacia una explosión de conocimiento.

En este capítulo discutiremos ejemplos concretos que permitirán al lector introducir a sus alumnos en la metodología de la ciencia y en la comprensión de la maravillosa simpleza que rige al mundo natural. Pero antes de eso, debemos notar que la ciencia no avanza de manera lineal y que el estudio de un fenómeno particular no tiene un comienzo o un final bien definido. La gran mayoría de los estudios científicos comienzan con una idea ambigua o con alguna evidencia experimental no muy clara. Estas ideas y evidencias "se retuercen" avanzando en una ruta espiral, en donde las hipótesis y variables del problema no están muy bien definidas al inicio, pero al seguir el camino demarcado por Galileo y Newton evolucionan permitiendo una comprensión más simple y definida del problema. Esta evolución generalmente trae consigo nuevas preguntas, y junto a ellas el premio más reconfortante que alienta a los científicos en el duro camino de la ciencia: el poder comprender de manera simple el comportamiento del mundo que nos rodea.

Los ejemplos concretos que incluiremos a continuación permitirán a los profesores de ciencia guiar a sus alumnos hacia un entendimiento de la importancia de las leyes de Newton en la descripción de diversos fenómenos de la vida diaria y de cómo este conocimiento permite dar fundamento a otras disciplinas científicas como la química y la biología. Los fundamentos de la metodología de la ciencia y la conexión entre conceptos científicos y problemas de la vida real son de gran relevancia en esta nueva metodología integrada para la enseñanza de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, STEM.

2. Primera Ley de Newton: La secadora inercial

Hablaremos aquí de secadora inercial en vez de secadora centrífuga debido a que es un error usar una fuerza centrífuga no existente para entender algo que puede ser explicado fácilmente usando el concepto de inercia.

Mas adelante intentaremos comprender los conceptos de energía y trabajo, pero basta por ahora usar de manera intuitiva el concepto de energía para definir el siguiente problema doméstico:

¿Cómo hacemos para secar la ropa del lavado haciendo un uso eficiente de la energía?

Una posibilidad sería convertir el agua de la ropa en vapor de agua, pero este proceso necesita mucha energía para subir la temperatura del agua y lograr su evaporación.

Este ejemplo es una excelente oportunidad para introducir el **concepto de inercia**, concepto que demoró miles de años en ser racionalizado en la primera ley de Newton, pero que incluso niños pequeños pueden entender y usarlo de manera apropiada en diferentes situaciones.

Primera Ley de Newton: Si no existen fuerzas sobre un objeto, el objeto mantendrá su estado de reposo o su estado de movimiento.

Un primer ejemplo de la aplicación de este principio se ilustra en la figura 1, para el caso sencillo de movimiento en línea recta. Se muestra un móvil que chocará con una mesa. En reposo sobre el móvil, y a la misma altura de la mesa, se encuentra un carro con ruedas. ¿Qué sucede con el carro una vez que se produce el choque?

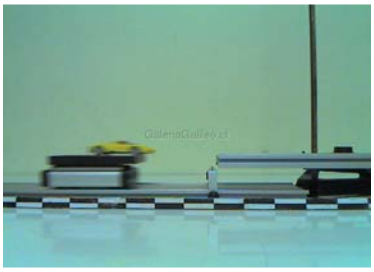


Fig. 1: Móvil que choca con una mesa

http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/PRIMERA_LEY_DE_NEWTON-auto_que_continua_moviendose_con_rapidez_constante/movimiento.html

De acuerdo a la Primera Ley de Newton, dado que sobre el carro no actúan fuerzas horizontales, el carro que tiene un movimiento con rapidez constante antes del choque lo mantiene después del choque.

Ahora que entendemos cómo aplicar la primera ley a un movimiento en línea recta podemos intentar entender el caso de movimiento curvo que es relevante para la lavadora inercial.

Fig. 2: Calcetín mojado obligado a moverse en órbita circular.

La figura 2 muestra un calcetín empapado con agua que es obligado a moverse en una órbita circular dentro del cilindro de la secadora de ropa. Suponga que mágicamente hiciéramos desaparecer las fuerzas que actúan sobre el calcetín. En ausencia de fuerzas, el calcetín mojado mantendría su estado de movimiento, manteniendo constante la velocidad que tenía justo antes de hacer desaparecer las fuerzas. El calcetín y el agua pasarían de moverse forzados en una órbita circular a moverse libres en línea recta con la velocidad tangencial que tenían al finalizar su movimiento circular.

El truco que se usa en la secadora inercial para separar gran parte del agua de la ropa, consiste en primero forzar a la ropa a moverse en una órbita circular dentro del cilindro, para que los agujeros del cilindro permitan que la tendencia del agua a mantener su movimiento tangencial haga pasar el agua por los agujeros separándose de la ropa.

El agua escapa por los agujeros del cilindro gracias a su tendencia a mantener su movimiento en línea recta tangente al círculo. Es decir, la presencia de las paredes del cilindro proporciona la fuerza hacia adentro del círculo que causa el movimiento circular de la ropa, y la ausencia de esta fuerza donde hay un agujero permite el movimiento en línea recta del agua que por lo tanto se separa de la ropa.

Esta secadora inercial separa mecánicamente y de manera económica gran parte del agua de la ropa. Las secadoras modernas, en un proceso posterior hacen pasar aire caliente por la ropa evaporando el agua residual. Este último proceso necesita de una gran cantidad de energía, pero puede ser reemplazado por la antigua costumbre de colgar la ropa al viento.

Para visualizar esta tendencia a mantener el estado de movimiento al hacer desaparecer las fuerzas sobre objetos que inicialmente se movían en órbita circular haremos uso de uno de los experimentos presentes en nuestra Galería de Galileo, disponible en http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD.

El video de la figura 3 muestra a dos esferas que se mueven en una órbita circular amarradas entre sí por un hilo. Las esferas ruedan en un plano horizontal y el hilo que las une pasa cerca de una vela encendida que tiene el propósito de quemar el hilo. ¿Qué trayectorias tendrán las esferas después que se corta el hilo?

Fig. 3: Dos esferas en órbita
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/MOVIMIENTO_CIRCULAR-pelotas-cordel/movimiento.html

Al cortar el hilo, desaparecen las fuerzas que obligaban el movimiento circular, permitiendo que cada esfera se aleje tangencialmente manteniendo la dirección y magnitud de la velocidad que tenían justo antes de cortarse el hilo.

3. Segunda Ley de Newton: Acelerando un automóvil

Nos interesa aquí contestar la siguiente pregunta:

¿Cómo depende la aceleración de un automóvil de la masa de éste y de la fuerza que transmite el motor al punto de contacto entre las ruedas y el suelo?

Newton descubrió que la aceleración que adquiere un objeto está directamente relacionada con la fuerza neta que actúa sobre éste. Además de formular matemáticamente la relación entre fuerza y aceleración, Newton pudo establecer que, para fuerzas aplicadas de igual magnitud, mientras más grande es la masa del objeto se hace más difícil acelerarlo.

Fig. 4: Cada alumno intenta hacer una fuerza de magnitud constante sobre el o los alumnos que están sobre la patineta. a) Dos alumnos hacen fuerza sobre uno en la patineta, b) Cuatro alumnos hacen fuerza sobre uno en la patineta, c) Dos alumnos hacen fuerza sobre dos en la patineta
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/SEGUNDA_LEY_DE_NEWTON-fuerza_sobre_alumnos_en_patineta_2a1/movimiento.html
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/SEGUNDA_LEY_DE_NEWTON-fuerza_sobre_alumnos_en_patineta_4a1/movimiento.html
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/SEGUNDA_LEY_DE_NEWTON-fuerza_sobre_alumnos_en_patineta_2a2/movimiento.html

Segunda ley de Newton: La aceleración que adquiere un objeto es igual al cociente entre la fuerza aplicada y la masa del objeto.

La aceleración se define matemáticamente como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo y por lo tanto la segunda ley de Newton corresponde a una ecuación diferencial.

Segunda ley de Newton en notación matemática:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}/m \qquad (1).$$

Por ejemplo, en el estudio de la caída de objetos efectuado por Galileo, las aceleraciones adquiridas por los objetos al moverse por cada plano inclinado tenían un valor constante (diferente para cada plano). Según Newton, estas aceleraciones son consecuencia de fuerzas de valor constante que actúan sobre los objetos. En estos casos es muy fácil resolver esta ecuación diferencial para encontrar la expresión para la posición del objeto para todo instante. En cambio, cuando las fuerzan dependen del tiempo o de otras variables, o cuando la masa del sistema no se mantiene constante, la segunda ley de Newton sigue siendo una poderosa herramienta que predice la evolución del sistema, aunque las ecuaciones que se obtienen pueden ser más difíciles de resolver.

Volviendo a nuestra pregunta conceptual inicial, la segunda ley de Newton nos permite responder en forma sencilla: si usted quiere diseñar un auto de carrera ganador, se debe diseñar un motor de gran potencia y poca masa. De gran potencia, para conseguir una gran fuerza impulsora del suelo sobre auto (un detalle sobre el que volveremos más adelante), y de poca masa para que dicha fuerza logre producir una gran aceleración. Los videos de los alumnos en la patineta en la figura 4 permiten verificar esta respuesta de manera cualitativa.

Veamos ahora un ejemplo que se relaciona más directamente con nuestra pregunta inicial.

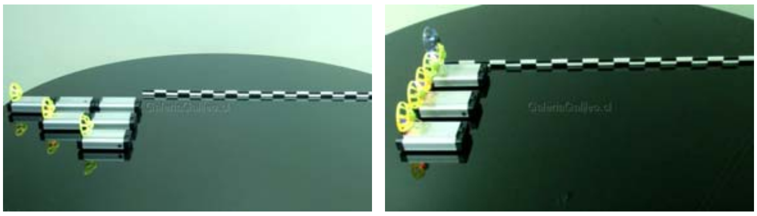


Fig. 5: a) Carros de distinta masa impulsados por una hélice. b) Carros de igual masa impulsados por distinto número de hélices
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/SEGUNDA_LEY_DE_NEWTON-carros_con_ventiladores_3_carros_varian_la_masa/movimiento.html
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/SEGUNDA_LEY_DE_NEWTON-carros_con_ventiladores_tres_carros_varian_la_fuerza/movimiento.html

En los videos mostrados en la figura 5 los ventiladores son idénticos, y los carros también son iguales entre sí, por lo que es posible comparar los resultados de los experimentos. En el primer caso la fuerza impulsora es la misma y podemos observar lo que ocurre al impulsar distintas masas. En el segundo caso, en cambio, variamos la fuerza impulsora manteniendo aproximadamente constante la masa que se pone en movimiento.

4. Tercera Ley de Newton: Propulsión al caminar, nadar, volar y viajar por el espacio vacío

De acuerdo a la segunda ley de Newton, una fuerza externa puede cambiar el estado de movimiento de un objeto y en ausencia de una fuerza externa neta el objeto mantendrá su estado de movimiento. Esto da origen a la siguiente pregunta:

¿Como es posible que un objeto se autopropulse y cambie su estado de movimiento si inicialmente la fuerza externa neta que actúa sobre él es cero?

Todos los mecanismos de autopropulsión hacen uso de la tercera ley de Newton y de algún tipo de conversión de energía para generar a) fuerzas sobre objetos externos o b) fuerzas que permitan arrojar una parte del sistema en movimiento hacia fuera de éste, causando la propulsión de la materia restante. En ambos casos estas fuerzas juegan un papel trascendental a través de la tercera ley de Newton.

Tercera ley de Newton: Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta.

La tercera ley aplicada de manera general a la autopropulsión nos dice que cuando el sistema ejerce una fuerza en cierta dirección sobre el resto del mundo, el mundo reacciona haciendo una fuerza en dirección contraria sobre el sistema, impulsándolo y causando su movimiento.

La figura 6 muestra dos videos en donde el alumno A de la derecha, que se encuentra sobre una patineta, hace fuerza sobre uno o dos alumnos B que se encuentran sobre otra patineta. ¿Cuál es la fuerza que explica que el alumno A sea impulsado?

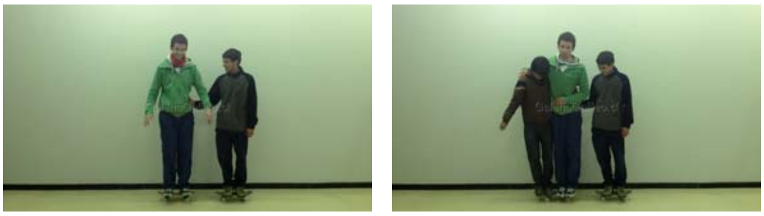


Fig. 6: a) Un alumno A sobre una patineta hace fuerza sobre otro alumno B que se encuentra sobre otra patineta. b) Un alumno A sobre una patineta hace fuerza sobre dos alumnos B que se encuentran sobre otra patineta

http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/TERCERA_LEY_DE_NEWTON-alumnos_que_se_empujan_sobre_patinetas_1_a_1/movimiento.html

http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/TERCERA_LEY_DE_NEWTON-alumnos_que_se_empujan_sobre_patinetas_1_a_2/movimiento.html

Al revisar los videos correspondientes a la figura 6 es posible darse cuenta de que en cada caso aparece una fuerza de reacción sobre el alumno A y debido a eso este alumno cambia su estado de movimiento.

Para propulsarnos generalmente usamos parte de nuestro cuerpo para generar una fuerza sobre un objeto externo en la dirección contraria al movimiento deseado. Cuando caminamos, nuestros pies ejercen fuerza sobre el suelo impulsándolo “hacia atrás”; cuando nadamos, nuestras manos ejercen fuerza sobre el agua; cuando un helicóptero vuela, ejerce fuerza “hacia abajo” sobre el aire. Estas fuerzas producen fuerzas de reacción que nos impulsan en la dirección deseada.

La explicación es ligeramente distinta cuando se trata de explicar cómo se propulsa un cohete cuando viaja por el espacio, donde no hay objetos externos sobre los cuales hacer fuerza.

Fig. 7: Cohete de agua
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/MOMENTUM_LINEAL-cohete_propulsado_por_agua_y_aire_a_presion/movimiento.html

El video mostrado en la figura 7 muestra un cohete de juguete que impulsa parte de su contenido hacia abajo. Al hacer una fuerza sobre objetos arrojándolos en dirección contraria al movimiento deseado, estos objetos producen una fuerza de reacción sobre el cohete en dirección contraria a la fuerza que inicialmente arrojó los objetos. Se produce así la propulsión deseada. Lo interesante de este mecanismo es que el cohete no necesita de objetos externos para impulsarse. En cohetes reales los objetos arrojados hacia atrás corresponden a moléculas de combustible que se mueven a mucha velocidad debido a la explosión producida por la reacción química de la combustión.

5. Tiempo, posición, velocidad y aceleración

La **posición** de un objeto es un registro de dónde se encuentra ese objeto. Si un objeto cae, su posición cambia a medida que transcurre el tiempo. Galileo se propuso medir simultáneamente las posiciones y tiempos en el movimiento de un objeto que cae, realizando experimentos que revolucionaron la historia del pensamiento científico.

El tiempo es una de las variables más importantes de cualquier estudio científico, pues los fenómenos cambian a medida que el tiempo transcurre. Uno de los obstáculos que Galileo tuvo que vencer fue la necesidad de inventar un reloj que le permitiera medir el tiempo con la precisión suficiente para sacar conclusiones de sus experimentos. Inicialmente Galileo medía el tiempo usando su pulso, pero esto era claramente insuficiente y estuvo muchos años buscando cómo inventar un reloj que le permitiera avanzar en sus experimentos.

La caída libre de un objeto toma tan poco tiempo que incluso los cronómetros modernos no son adecuados para medir cuánto tiempo tarda en llegar al suelo un objeto que soltamos. Galileo solucionó parte de este problema haciendo rodar esferas por planos inclinados de manera que los cambios de posición fuesen lo suficientemente lentos.

Por muchos años, Galileo tuvo presente el problema de medir el tiempo en su cabeza. Un día, Galileo observó que el movimiento de una lámpara en el techo de una iglesia se producía a intervalos regulares de tiempo. Incluso cuando variaba mucho la amplitud del movimiento tipo péndulo de la lámpara, el tiempo que demoraba en dar un ciclo de ida y vuelta completo se mantenía igual. Galileo luego reprodujo la situación en su laboratorio inventando el reloj de péndulo. Curiosamente, después de transcurridos varios siglos nuestros relojes de cuarzo modernos funcionan bajo el mismo principio.

Medir la **velocidad** con que se mueve un objeto es más complicado que medir posiciones. Galileo logró comprobar de manera experimental que muchas ideas acerca del movimiento de caída libre de objetos habían estado equivocadas por más de mil años. Dejando caer objetos desde distintas alturas, Galileo logró percibir el sonido distinto que hacían al chocar con el suelo. Esto fue interpretado por Galileo como debido a las distintas velocidades con las que los objetos llegaban al suelo: cuando se soltaban desde más alto sonaban más fuerte, lo que evidenciaba que llegaban al suelo con mayor velocidad.

Medir la velocidad **v** requiere de medir simultáneamente posiciones y tiempos. La definición operacional que nos permite medir velocidades en el laboratorio es la siguiente: cuando un objeto se mueve medimos su posición en distintos tiempos, y luego calculamos, para cada pequeña parte en que hemos dividido el movimiento, el cociente $\Delta x/\Delta t$ entre la distancia recorrida Δx y el tiempo transcurrido Δt. Cuando el tiempo es suficientemente pequeño, llamamos al valor del cociente $\Delta x/\Delta t$ "la velocidad del cuerpo" en ese intervalo de tiempo. Este procedimiento experimental origina la descripción matemática de "velocidad instantánea": al ser el intervalo de tiempo pequeño, podemos asignar el valor obtenido para la velocidad a un instante del tiempo específico.

Galileo diseñó "experimentos lentos" para lograr medir velocidades y aunque le interesaba el estudio de objetos en caída libre, tuvo que conformarse con el movimiento análogo de esferas rodando "lentamente" por planos de poca inclinación. Pudo así confirmar su idea de que la velocidad de estos objetos iba creciendo a medida que avanzaban por los planos y pudo además darse cuenta que la razón a la cual cambia la velocidad con el transcurso del tiempo permanece constante para cada experimento, pero depende del ángulo de inclinación del plano.

La **aceleración** se obtiene calculando el cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ entre el cambio de velocidad $\Delta\mathbf{v}$ al recorrer una pequeña distancia y el tiempo Δt transcurrido mientras se recorre esa pequeña distancia. Cuando el tiempo transcurrido es pequeño llamamos al valor del cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ obtenido como "la aceleración del cuerpo" en ese intervalo de tiempo.

Con estas definiciones experimentales, Galileo pudo medir las distintas aceleraciones que adquirían los objetos al rodar por planos inclinados de distinta pendiente. El hecho que Galileo midiera aceleraciones constantes fue la base para la futura genialidad de Newton.

6. Masa y fuerza

La **masa** está relacionada con la cantidad de materia que tiene un objeto y, si seguimos la idea de los filósofos griegos de que la materia está constituida por pequeños átomos, se puede relacionar la masa de un objeto con la suma de las masas de todos sus constituyentes (electrones, protones y neutrones).

En el mundo mecánico de Newton, la masa aparece con dos significados conceptuales muy distintos. El primero tiene que ver con la idea de inercia o de qué tan difícil es acelerar un objeto al aplicarle una fuerza. El segundo tiene que ver con la fuerza de atracción gravitacional entre dos masas, fuerza que mantiene a los planetas en sus órbitas alrededor del sol o a las estrellas en torno al centro de la galaxia a la que pertenecen.

Podemos medir masa usando la idea de inercia o usando la atracción gravitacional, y llamamos masa inercial y masa gravitacional a los valores obtenidos en cada caso. En la práctica, normalmente usamos la atracción del planeta Tierra sobre un objeto para medir el valor de la fuerza de atracción entre la Tierra y el objeto y por lo tanto medimos su masa gravitacional. Esta medición de masa a partir de una medición de fuerza hace uso de que el valor de la fuerza de atracción gravitacional entre la Tierra y un objeto ubicado cerca de la superficie terrestre lo podemos escribir como el producto entre la masa del objeto y la constante g que aparece al medir la aceleración de objetos que caen hacia la superficie de la Tierra. Todas las balanzas o pesas ya sea de resorte, electrónicas o de equilibrio de fuerza, usan la atracción gravitacional para medir la fuerza de la Tierra sobre el objeto o la masa del objeto.

7. El *momentum* p y otras cantidades conservadas en física

La segunda ley de Newton se escribe normalmente como $\mathbf{a}=\mathbf{F}/m$ en donde $\mathbf{a}$ es la razón a la cual cambia la velocidad de un objeto ($d\mathbf{v}/dt$ o d^2x/dt^2). En realidad, la ecuación escrita de esta forma sólo es válida cuando la masa del objeto bajo estudio permanece constante. En este escenario podemos también escribir esta ecuación como $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ y usando la definición de aceleración podemos escribirla como $md\mathbf{v}/dt=\mathbf{F}$ o bien como $d(m\mathbf{v})/dt=\mathbf{F}$. Esta última forma de la ecuación resulta ser válida incluso si la masa del objeto bajo estudio cambia en el tiempo. Podemos reescribir entonces la Segunda Ley de Newton en la siguiente forma:

$$d\mathbf{p}/dt=\mathbf{F} \qquad (2),$$

donde el producto mv recibe el nombre de *momentum* lineal **p;** la segunda ley de Newton escrita de esta forma nos dice que al aplicar una fuerza externa a un objeto cambiaremos su *momentum* lineal. Se deduce de esta ecuación que si la fuerza es cero el *momentum* del objeto permanecerá sin cambiar de valor. Cuando esto ocurre decimos que el *momentum* lineal es una cantidad conservada.

La segunda ley de Newton escrita en esta forma la podemos también leer “al revés” y preguntarnos cuánta fuerza es necesario aplicar a un objeto que ya posee un cierto valor de *momentum* para lograr frenarlo. De esta manera, la segunda ley nos dice que un objeto con mucho *momentum* es difícil de frenar, y que este efecto depende crucialmente de dos ideas relacionadas con la inercia: la masa y la velocidad, las que se combinan en el concepto de *momentum* lineal.

De manera análoga a la conservación del *momentum*, aparecen en física otras cantidades conservadas que son de mucha importancia para comprender de manera simple el comportamiento de un sistema. Cuando no existen torques sobre un sistema se conserva el *momentum* angular **L**, y cuando las interacciones no dependen del tiempo se conserva la energía de un sistema cerrado. Examinaremos estas ideas con más detalle un poco más adelante.

8. Un gran viaje: De Galileo a Newton, luego al mundo celestial y de vuelta a la aceleración de caída libre

Una buena parte de cualquier curso de física tradicional se enfoca en el estudio del movimiento de rotación. Este movimiento es importante por la innumerable cantidad de aplicaciones tecnológicas o de ingeniería, y además tiene una gran importancia en el desarrollo de la ciencia, ya que permite avanzar hacia el estudio del movimiento de los planetas alrededor del sol.

Luego de lograr entender el movimiento de los objetos en la escala humana, Newton se involucró en la discusión acerca de qué es lo que mantiene a los planetas en sus órbitas alrededor del sol. De acuerdo a la segunda ley de Newton, debería haber una fuerza dirigida hacia el sol sobre cada planeta que afecte el estado de movimiento de éstos y los mantenga en sus órbitas. Una fuerza de distinta naturaleza, pero que cumple con el mismo rol de mantener dos objetos en órbitas circulares, es la tensión en el hilo que conecta las esferas del experimento de la Figura 3.

Previamente, a Johannes Kepler se le había ocurrido una gran idea: dibujar las trayectorias de los planetas poniendo al sol en el centro de las órbitas. Esta idea permitía la confrontación experimental (basada en evidencia) de dos ideas muy antiguas: Por una parte, la teoría predominante por miles de años que suponía que los planetas giran en torno a la Tierra y por otra parte la teoría muy desacreditada de que los planetas, incluida la Tierra, se mueven en torno al sol. El resultado de Kepler fue impresionante: todos los datos observacionales para las órbitas de los planetas se convertían en círculos casi perfectos alrededor del sol. Kepler pudo así reducir a tres simples relaciones matemáticas su descubrimiento del movimiento elíptico de cada planeta alrededor del sol.

Una vez que se hizo evidente que los planetas orbitaban en torno al sol, la pregunta que Newton y otros científicos se hicieron era la siguiente: ¿cuál es la forma matemática de la fuerza que ejerce el sol sobre cada planeta? Adivinando de manera educada, Newton propuso una fuerza de atracción que varía de manera inversa con el cuadrado de la distancia entre el sol y el planeta. Luego de utilizar esta fuerza en su segunda ley, Newton logró reproducir las leyes o regularidades matemáticas que había obtenido Kepler de manera observacional.

Lo anterior no sólo fue un gran triunfo en el modelamiento matemático de la naturaleza, también fue el primer paso en la comprensión de que la fuerza obtenida por Newton, que conocemos hoy en día como la **ley de gravitación universal,** es una de las **cuatro fuerzas fundamentales** que rigen el comportamiento del universo.

Ley de gravitación universal:

$$F=Gm_1m_2/r_{12}^2 \qquad (3),$$

donde F es la magnitud de la fuerza de atracción entre objetos de masas m_1 y m_2, G es la constante de gravitación universal y r_{12} es la distancia entre los centros de los objetos, supuestos esféricos si es que no son puntuales.

No sólo los planetas son atraídos por el sol con esta fuerza; esta fórmula nos entrega también la fuerza de atracción entre planetas, entre un planeta y sus lunas, entre lunas y lunas, entre estrellas y estrellas, o entre un ser humano y la Tierra. Aunque el valor de esta fuerza es extremadamente pequeño para objetos en la escala humana, sentimos su efecto al ser atraídos hacia la Tierra debido a la gran masa de ésta.

Al usar la ley de gravitación universal para encontrar la fuerza sobre un objeto que se encuentra cerca de la superficie de nuestro planeta, obtenemos

$$F=GMm/R^2 \qquad (4),$$

donde M es la masa de nuestro planeta, R es el radio del planeta, m es la masa gravitacional del objeto y donde hemos aproximado la distancia del objeto al centro del planeta por el radio de la Tierra R. De esta forma la fuerza sobre la masa m se puede escribir como

$$F=(GM/R^2)\ m \qquad (5).$$

La expresión entre paréntesis se denota por g y su valor numérico es de aproximadamente 9,8 m/s^2.

Así, todos los movimientos de caída libre de objetos cerca de la superficie del planeta son afectados por fuerzas de magnitud constante y de acuerdo a la segunda ley de Newton tendrán una aceleración constante de valor $a=F/m$. Al reemplazar en esta última ecuación el valor de la fuerza con que el planeta Tierra atrae al objeto de masa m dado por la ecuación 5, la masa inercial de la segunda ley se cancela con la masa gravitacional proveniente de la ley de gravitación universal haciendo que cualquier objeto adquiera una aceleración constante de valor 9,8 m/s^2.

Finalizamos de esta forma un gran viaje que se inició con Galileo en su estudio de la caída libre de objetos midiendo aceleraciones constantes en planos inclinados. Luego Newton usó estos resultados para formular su segunda ley y usando esta ley encontró la fuerza que atrae a todos los objetos celestiales. Esta fuerza aplicada a los experimentos de Galileo permite explicar la razón por la cual todos los objetos en caída libre aceleran con una misma aceleración constante de valor g.

9. *Momentum* angular

En el movimiento de rotación de objetos aparecen nuevas combinaciones de variables que facilitan su estudio y que incluso adquieren una gran importancia conceptual en el estudio de las propiedades fundamentales de las partículas que componen toda la materia de nuestro universo.

El momento angular combina dos variables relacionadas con la inercia: la inercia rotacional, que cuantifica cómo está distribuida la masa en torno al eje de rotación, y la rapidez con que un objeto rota. Y así como necesitábamos de una fuerza en la segunda ley de Newton para modificar el *momentum* de un objeto, aquí se necesita de un torque para alterar el momento angular de un objeto que rota. El torque cuantifica qué tan efectiva es una fuerza para lograr que un cuerpo cambie la rapidez con que rota. Para lograr que esta rapidez cambie es necesario ejercer fuerzas en dirección tangente al movimiento circular, y una misma fuerza produce un efecto mayor si es aplicada más lejos del eje. Así, el torque se define como el producto de la componente tangencial de la fuerza aplicada por la distancia al eje de giro del punto donde se aplica la fuerza.

Fig. 8: El plato de sopa

http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/TORQUE_Y_ROTACION_inercia_de_rotacion_en_un_plato_de_sopa/movimiento.html

La figura 8 muestra un recipiente transparente con agua teñida de color rojo en su interior. Flotando sobre el agua pusimos pequeños trozos de papel para poder visualizar el movimiento del agua. En el video del experimento, forzamos el agua a moverse en un movimiento de rotación y luego detuvimos abruptamente la rotación del recipiente. Al observar los papeles flotando, es evidente de este simple experimento que el agua continúa su movimiento de rotación como si nada hubiese sucedido.

Así como el *momentum* **p** es el producto de la masa m por la velocidad **v** y se mantiene constante en la ausencia de fuerzas, el *momentun* angular **L** es el producto de la inercia rotacional I por la velocidad angular ω y se mantiene constante en ausencia de torque.

La inercia rotacional del sistema I compromete las masas de los objetos que componen al sistema y su distribución, la velocidad angular $\omega=\Delta\varphi/\Delta t$ corresponde a la razón entre un pequeño cambio en el ángulo del sistema $\Delta\varphi$ al girar respecto a un eje de rotación y el pequeño intervalo de tiempo en que ocurre dicho cambio Δt. Similarmente, la aceleración angular $\alpha=\Delta\omega/\Delta t$ corresponde a la razón entre un cambio de velocidad angular $\Delta\omega$ y el pequeño tiempo Δt en que éste ocurre. La segunda ley de Newton aplicada a un movimiento de rotación ($d\omega/dt=T/I$) nos permite obtener la aceleración angular α si conocemos el torque externo **T** y la inercia rotacional I del sistema.

La segunda ley de Newton se puede escribir en términos del *momentum* angular **L** como:

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{T} \qquad (6).$$

La segunda Ley de Newton nos dice en esta forma que en ausencia de torques el momento angular es una cantidad conservada.

En el video anterior, los torques que producen las paredes del contenedor sobre el agua son pequeños y por lo tanto el momento angular del agua permanece prácticamente constante durante el tiempo que dura el video del experimento.

Los experimentos que involucran *momentum* angular son fascinantes y este concepto es la base para entender sistemas tales como trompos, giróscopos, sistemas planetarios, átomos, etc. Incluso las partículas elementales tienen como propiedad fundamental un *momentum* angular intrínseco llamado espín que permite caracterizarlas e identificarlas en sus interacciones.

Debido a que nos hemos centrado en la historia del modelamiento matemático del desarrollo científico de las ideas de Galileo, Newton y Kepler, mencionaremos aquí cómo el concepto de *momentum* angular nos puede ayudar a comprender la existencia de las estaciones del año en el movimiento de traslación de nuestro planeta alrededor del sol.

La discusión de la forma de las órbitas de los planetas data desde los antiguos griegos y hoy en día es común que la forma de la órbita del movimiento de traslación de la Tierra en torno al sol se dibuje como una elipse muy exagerada, cuando en realidad la forma es casi circular (la mayor distancia al sol sólo es alrededor de un 3% mayor que la menor distancia). Lamentablemente esta elipse exagerada hace que muchas personas piensen que el verano es cuando la Tierra está más cerca del sol y el invierno es cuando está más lejos. Este error se puede erradicar fácilmente

haciendo notar que mientras nosotros en el hemisferio sur estamos en verano los países del hemisferio norte están en invierno y, obviamente, estamos en la misma zona de la órbita elíptica.
La clave para entender las estaciones del año está en entender que la Tierra, además de moverse en torno al sol, gira en torno a un eje imaginario que pasa por los polos norte y sur del planeta, y que este eje apunta en una dirección que no es perpendicular al plano de la órbita del planeta al moverse alrededor del sol.
Este movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma tiene un momento angular de rotación que se mantiene constante debido a que (si suponemos la Tierra esférica) no hay torques externos que lo modifiquen. Así, la dirección del eje de rotación del planeta no cambia a medida que se traslada alrededor del sol. Debido a la inclinación del eje de rotación, en verano un hemisferio del planeta queda más expuesto a la radiación proveniente del sol ya que la radiación llega en ángulos más cercanos a la vertical y el otro hemisferio queda menos expuesto a esta radiación. El hemisferio más expuesto recibe más energía del sol por unidad de área y estará en verano y el otro hemisferio estará en invierno al recibir menos radiación solar por unidad de área.
Cuando el planeta se traslada al extremo opuesto de su órbita, su eje de rotación mantiene su dirección haciendo que ahora se intercambien los hemisferios que reciben la energía solar con mayor y menor intensidad, respectivamente.

10. Trabajo y energía

La energía es un concepto muy importante que evolucionó junto a los demás conceptos mencionados en relación al mundo mecánico desarrollado por Newton. En este ámbito, la segunda ley de Newton y la definición del **trabajo** W producen la siguiente relación entre el trabajo y el cambio de energía cinética $\Delta E_c = W_1+W_2+ \ldots$, donde $E_c = ½\,mv^2$ se denomina la **energía cinética** de un objeto. Cada fuerza que actúa sobre un objeto contribuye a cambiar su velocidad, y esto queda cuantificado a través del trabajo realizado por esa fuerza. Para un pequeño desplazamiento Δx del objeto, el trabajo está dado por el producto de la componente de la fuerza que apunta en la dirección en que se mueve el cuerpo multiplicado por el pequeño desplazamiento Δx.
La importancia del concepto de energía radica en que el concepto se generaliza rápidamente y se aplica en contextos cada vez más ricos. Una primera extensión del concepto ocurre cuando nos damos cuenta que para una gran cantidad de fuerzas, llamadas fuerzas conservativas, se puede asociar la fuerza a un cambio **de una energía potencial**. Por ejemplo, cuando un cuerpo cae, en vez de decir que su rapidez aumenta porque su peso tira de él, podemos reformular esta

idea diciendo que cuando el cuerpo cae su energía cinética aumenta debido a una disminución de la energía potencial gravitatoria. Reordenando términos, la relación entre el cambio de energía cinética y el trabajo se puede reescribir como $\Delta E_{mec} = W_{nc}$ donde ahora el lado izquierdo corresponde al cambio de la suma de todas las energías del cuerpo y el lado derecho incluye sólo los trabajos realizados por aquellas fuerzas, denominadas no conservativas, para los cuales no hemos asociado una energía potencial. De esta forma, si no existen fuerzas no conservativas la segunda ley de Newton nos dice que la **energía total del sistema** E_{mec} es una cantidad conservada y todos los cambios que ocurren al interior del sistema consisten en transformaciones de energía de una forma a otras.

Finalmente, el concepto de energía alcanza todo su esplendor cuando se generaliza a otras disciplinas de la física más allá de la mecánica, incluyendo por ejemplo la energía térmica, la energía química, la energía de la radiación y la energía nuclear, por nombrar algunas. Si consideramos sistemas suficientemente grandes, encontramos que éstos incluyen muchos tipos de energías diferentes y, si el sistema está aislado, sólo ocurren transformaciones de energía al interior del sistema, siendo la energía total una cantidad conservada que no cambia en el tiempo.

Para hacer notar la importancia del concepto de energía, mencionaremos aquí algunos ejemplos de cómo la energía que recibimos de la radiación solar es la que mantiene funcionando la vida en nuestro planeta: el mundo vegetal se alimenta de la energía del sol para convertir el CO_2, H_2 y O_2 presentes en el aire en fibras, madera y frutos. Los animales se alimentan de las plantas para transformar la energía química almacenada en los vegetales en energía útil para ser almacenada y para mantener funcionando su propio metabolismo. Otros animales hacen uso indirecto de la energía solar al alimentarse de vegetales y/o de productos animales para transformar la energía ahí almacenada en el tipo de energía que necesita su metabolismo.

Muchas de las primeras máquinas inventadas por el hombre hacían uso de la madera de los árboles para convertir su energía en energía térmica que les permitiese funcionar. Las máquinas modernas hacen uso de combustibles fósiles como el petróleo o el gas natural para funcionar. Estos combustibles son subproductos de material vegetal o animal enterrado bajo la superficie del planeta y por lo tanto los automóviles, al igual que nosotros, hacen uso de la energía del sol de manera indirecta.

La energía eléctrica producida en las centrales hidroeléctricas proviene de la energía potencial gravitacional del agua acumulada a gran altura en las represas, energía que a su vez proviene de la energía de la radiación solar que evapora el agua de mar y que al caer como lluvia alimenta de energía potencial gravitacional a nuestras represas.

Recién en los últimos años estamos avanzando a hacer un uso más directo de la energía del sol para el funcionamiento de las máquinas que requiere nuestra sociedad moderna. Hemos avanzado mucho en convertir directamente la energía radiante del sol en energía eléctrica usando paneles solares y en convertir la energía del viento en energía eléctrica. Pero incluso la energía del viento proviene del sol, pues se origina en diferencias de energía térmica en la atmósfera producidas por la radiación solar.

Debido a que toda nuestra civilización se alimenta de la energía del sol, cabe hacerse la pregunta de cómo se produce dicha energía en el sol. Uno de los grandes avances de la ciencia fue el descubrimiento de los procesos nucleares, procesos en donde los protones y neutrones que forman los núcleos de los átomos se combinan para formar nuevos elementos (fusión) o procesos en donde núcleos atómicos pesados se quiebran para formar elementos más livianos (fisión, responsable de la radioactividad). Dentro del sol y debido a la increíble temperatura cerca de su núcleo, los elementos livianos se combinan para dar origen a elementos más pesados, y en este proceso parte de la masa de los elementos iniciales se convierte en energía que abandona al sol en la forma de luz.

En resumen, la comprensión del mundo mecánico de Newton nos ha ayudado a entender el origen de la energía responsable de mantener nuestro mundo en funcionamiento. Una forma alternativa de entender la evolución temporal contenida en la segunda ley de Newton en términos energéticos es que los sistemas tratan de alcanzar estados de equilibrio, y para ello la naturaleza evoluciona de manera de disminuir la energía potencial. Así un resorte tiende a volver a su largo original, una piedra tiende a caer hacia el centro del planeta, una pila tiende a hacer mover los electrones si existe algún camino conductor que conecte a sus terminales, el gas comprimido en un cilindro tiene a salir si hacemos un agujero, etc.

Gran parte de la energía que utilizamos en nuestras casas proviene de la energía potencial gravitacional acumulada en las represas, energía que puede escribirse en forma muy sencilla utilizando la relación:

$$U = mgh \qquad (7),$$

donde U es la energía potencial utilizable, m es la masa de agua acumulada en la represa que caerá recorriendo una altura h desde la salida del agua en la represa hasta golpear las hélices de los generadores eléctricos ubicados al final de su caída. Al igual que antes, g es la constante cuyo valor es de 9,8 m/s^2.

Al dejar salir el agua de la represa, el agua cae convirtiendo su energía potencial gravitacional en energía de movimiento o energía cinética. La velocidad adquirida por el agua al caer es frenada por el choque con las hélices de los generadores, y por la tercera ley de Newton se produce una fuerza de reacción que obliga a las hélices a girar. Esta energía de rotación de las hélices es convertida luego en energía eléctrica que es distribuida a nuestros hogares.

Para ilustrar estas ideas de conversión de energía, proponemos al lector analizar el siguiente video de un auto de juguete. El hilo del que cuelga la masa de bronce está enrollado en el eje de las ruedas. ¿Qué conversión de energía tiene lugar en el sistema? ¿Cuáles son los dos cuerpos que interactúan y que a través de la tercera ley de Newton explican que el auto comience a moverse?

Fig. 9: Auto propulsado por energía potencial gravitacional
http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/Galeria/Mecanica/ENERGIA-auto_propulsado_por_la_energia_potencial_gravitacional/movimiento.html

Al liberar el auto de juguete de la figura 9, la masa de bronce comienza a bajar forzando al eje de las ruedas a girar, así la energía potencial gravitacional de la masa de bronce se convierte en energía de rotación. Debido al contacto entre la rueda y el suelo, esta rotación produce una fuerza sobre el suelo y por acción y reacción el suelo hace una fuerza sobre la rueda haciendo un trabajo que se convierte en energía cinética del auto y de la masa que baja.
La energía potencial gravitacional mgh que podemos almacenar en objetos de masas y tamaños comparables a las de los automóviles reales es tan pequeña que el mecanismo usado por este auto de juguete no puede ser usado de manera práctica para propulsar a nuestros medios de transporte. Los únicos mecanismos viables en un futuro cercano, para almacenar energía potencial que permita propulsar limpiamente nuestro estilo de vida, serían el uso de la energía solar para acumular energía química en combustibles limpios como el hidrógeno o en baterías electroquímicas. Un mecanismo distinto que permitiría almacenar la energía obtenida a partir de la radiación solar en la forma de energía potencial eléctrica en espacios reducidos, y que ha avanzado notoriamente en las últimas décadas, son los supercondensadores.

11. Conclusiones

La intencionalidad de este capítulo es ofrecer con claridad herramientas teóricas fundamentales de la física, que se pueden entender y desarrollar utilizando la Galería de Galileo que hemos creado para que profesores de matemáticas y de ciencias trabajen en conjunto en proyectos que pueden abordar fácilmente. Con ello se potencia el trabajo docente de los participantes, permitiendo a alumnos y profesores percibir que se puede y se debe trabajar apoyándose en recursos confiables existentes en la web, usando tecnología y el conocimiento de las distintas disciplinas. Por lo demás, está implícito para todos los participantes que el mundo es complejo y que las aulas deben dar espacio a aquella interacción disciplinar, y también que los aprendices tienen grandes capacidades para abordar esta tarea aprovechando los recursos ya existentes en la web (simuladores, información, tecnología, etc.).

Los ejemplos concretos que hemos discutido son una pequeña muestra de cómo profesores de matemáticas y ciencias, trabajando en equipo, pueden guiar a sus alumnos hacia un entendimiento de la importancia de las leyes de Newton en la descripción de diversos fenómenos de la vida diaria y cómo estos conocimientos permiten dar fundamento a otras disciplinas científicas tales como la química y la biología. Los fundamentos de la metodología de la ciencia y la conexión entre conceptos científicos y problemas de la vida real, son de gran relevancia en esta nueva metodología integrada para la enseñanza de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y la matemática (STEM).

Agradecimiento

El segundo autor agradece el financiamiento parcial recibido del proyecto CONICYT FONDECYT 1181782.

RESEÑAS BIOGRÁFICAS DE LOS AUTORES

María Aravena Díaz es Profesora Titular de la Universidad Católica del Maule, UCM, donde es, adicionalmente, directora del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, y del Doctorado en Didáctica de la Matemática. Es Doctora en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad de Barcelona y miembro del Claustro de Doctores de esa universidad. Es Licenciada y Profesora de Matemáticas de Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Ha realizado estadías en la Universidad de Tsukuba, Japón, en la Universidad de Jaume I, España, en la Universidad Politécnica de Catalunya, el Centro Artigas en Uruguay. Ha sido invitada a diversos países a dictar conferencias de modelización matemática y resolución de problemas para profesores e ingenieros. Ha dirigido proyectos de investigación de FONDECYT y FONIDE, y ha sido autora y ejecutora de diversos proyectos de capacitación para profesores de matemática financiados por MINEDUC y CPEIP. Su principal interés ha sido mejorar la formación de profesores de matemática y los aprendizajes de los alumnos de establecimientos públicos, con atención a la diversidad.

Roberto Araya Schulz es Profesor Titular del Instituto de Educación de la Universidad de Chile. Es Doctor en Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California en Los Ángeles. Ha obtenido varios reconocimientos internacionales: el Premio al Mejor Trabajo de la 10ª Conferencia Internacional en Metodologías y Sistemas Inteligentes para el Aprendizaje Mejorado con Tecnología MIS4TEL 2020, Italia; el Premio al Mejor Trabajo en la 10ª Conferencia Internacional sobre Aprendizaje basado en la Web, ICWL 2011, Hong-Kong; y el Premio al Mejor Póster de la 12ª Conferencia Europea sobre Aprendizaje Mejorado con Tecnología, ECTEL 2017, Estonia. Codirige el proyecto APEC *InMside*, en colaboración con Japón y Tailandia, y ha liderado proyectos financiados por el Centro Internacional de Investigaciones para el Desarrollo (IDRC) de Canadá, la Academia de Ciencias de Finlandia junto con ANID Chile, y el Banco Interamericano de Desarrollo.

Rita Borromeo Ferri es Profesora Titular de Educación Matemática en la Universidad de Kassel. Es Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Hamburgo, donde recibió también su Habilitación. Es profesora de Matemáticas y Geografía. Ha sido profesora invitada en la Universidad de Hamburgo y en la Universidad de Columbia en Nueva York. Ha recibido un Premio a la Enseñanza de la Universidad de Hamburgo; un Premio a la Enseñanza del Ministerio de Ciencia y Educación del estado de Hesse por su seminario universitario *Modeling Days*; y un premio de la Stifterverband y la Fundación Daimler Benz por su proyecto

MINTERFACE. Fue vicepresidenta de la 14th *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, ICTMA-14, en Hamburgo, y conferencista invitada en el 12th *International Congress on Mathematical Education*, ICME-12, en Seúl. Sus áreas de investigación son: Modelamiento Matemático en la escuela y la formación docente, Educación Matemática Interdisciplinaria y Aprendizaje STEM, Estilos de Pensamiento Matemático, y Profesionalización docente para TPACK.

Jaime Huincahue Arcos es Profesor en la Universidad Católica del Maule, UCM, donde es además director de Formación General, investigador del Centro de Investigación de Estudios Avanzados, y colaborador del Programa de Doctorado en Educación en consorcio. Es doctor en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Sus publicaciones se iniciaron con el análisis de modelos biomatemáticos y fenómenos específicos de depredación, y actualmente se dedican al análisis de prácticas de modelización que son utilizadas en escenarios interdisciplinarios, con el fin de revelar resultados didácticos que impacten en la educación del profesor de matemáticas, materia en la cual dirige un proyecto de FONDECYT.

Andreas Meister es Profesor Titular en la Universidad de Kassel, donde ocupa la cátedra de Matemática Aplicada. Es Doctor Rerum Naturalium (Dr. en Ciencias Naturales) por la Universidad Técnica de Darmstadt, y recibió su Habilitación de la Universidad de Hamburgo. Trabajó en la Institución de Investigación Aeroespacial Alemana, y fue investigador científico en el Instituto Fraunhofer de Matemáticas Industriales. Fue Profesor Asistente de la Universidad de Hamburgo, donde obtuvo dos veces el Premio al Mejor Profesor. Junto con su colega Rita Borromeo Ferri, obtuvo el nuevo Premio a la Enseñanza del Ministerio de Ciencia y Educación por el seminario universitario *Modeling Day*s. Además, recibió el Premio Kurt-Hartwig-Siemers por investigación científica en Métodos Numéricos para ecuaciones diferenciales parciales, y el Premio de Tutoría de la Claussen-Simon-Stiftung. Su área de investigación cubre el modelamiento matemático y los métodos numéricos en el campo de problemas de flujo de fluidos con un enfoque especial en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

Paulina Mena Carrasco es Profesora Asociada en el Departamento de Biología del Central College, en Pella, Iowa, Estados Unidos. Es Ph. D. in Biology de la Universidad de Iowa, Iowa City, Iowa, Estados Unidos, y Licenciada en Biología por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Su área de investigación es Biología y conservación de abejas nativas.

Jaime Mena Lorca es Profesor Titular de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, PUCV, donde fue director del Instituto de Matemáticas y decano de la Facultad de Ciencias. Es Ph. D. in Mathematics por la Universidad de Iowa, Estados Unidos. Su investigación se centró inicialmente en modelamiento en Biomatemáticas, especialmente modelos de predador-presa y modelos epidemiológicos; y, en la actualidad, en que se desempeña en los programas de Doctorado y de Magíster en Didáctica de la Matemática de la PUCV, se focaliza en Modelamiento y Tecnología en Educación Matemática

Rodrigo Ramos-Jiliberto es Profesor Titular de la Universidad Mayor, donde además es director del Programa de Doctorado en Ecología Integrativa. Es Doctor en Ciencias Naturales por la Universidad Ludwig-Maximilians de München, Alemania. Es Licenciado en Biología y Magíster en Ciencias Biológicas por la Universidad Católica de Valparaíso. Fue Profesor Titular de la Universidad de Chile. Como investigador, su principal interés ha sido comprender la relación entre la estructura y el funcionamiento de los sistemas naturales y socioecológicos, a través de un enfoque interdisciplinario, de biología, matemática e informática, disciplinas que integra en la modelización. Es autor de más de setenta publicaciones especializadas en Ecología y ha sido asesor científico liderando equipos multidisciplinarios para el Centro Nacional del Medio Ambiente y el equipo de diseño curricular en Ciencias la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación.

Rodrigo Rivera Campos es Profesor Adjunto de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Es Doctor en Física por la Universidad Técnica Federico Santa María, y Licenciado en Física y Magíster en Física por la misma universidad. Su línea de investigación versa sobre Educación en Física, con énfasis en el uso de la Metodología indagatoria (*Physics by Inquiry*) y de actividades experimentales para mejorar el aprendizaje de conceptos básicos de la Física. Ha dirigido varios proyectos de FONDECYT en esa dirección, que incluyen videos de experimentos, mejoramiento de actitudes hacia la ciencia, metacognición.

Miguel Alejandro Rodríguez Jara es profesor e investigador de la Facultad de Educación en el Departamento de Pedagogía de la Universidad de Playa Ancha, donde además es investigador del Centro de Estudios Avanzados, coordinador del Laboratorio de Aprendizaje y Enseñanza, y coordinador del Programa de Doctorado en Políticas y Gestión Educativa. Es doctor en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Su línea de trabajo es el estudio de conceptos del álgebra lineal a nivel escolar y universitario desde un punto de vista cognitivo, considerando para ello el uso de tecnología.

Francisco Vera Mathias es Profesor Titular del Instituto de Física en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Es doctor en Física por la Universidad Técnica Federico Santa María, y Licenciado en Física por la Universidad Austral de Chile. Durante la última década formó un grupo de investigación en didáctica de la física y se ha dedicado a desarrollar nuevas metodologías para enseñar física a nivel introductorio, usando experimentos simples de construir y tecnologías de bajo costo. Dentro de esta línea de trabajo, ha generado diversos proyectos de investigación e investigación aplicada en educación tales como EXPLORA, MECESUP, FONDEF Y FONDECYT. Una marca característica de su trabajo es la identificación y clarificación de explicaciones conceptuales erróneas de experimentos simples de alta divulgación, y la creación de experimentos para la divulgación de la ciencia.

ISBN 978-3-7376-0966-1

9 783737 609661