Actividad de evaluación

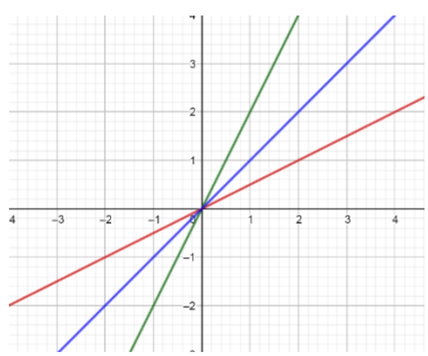
Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada. **OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática. • Modelan situaciones lineales o cuadráticas, restringiendo parámetros. • Representan la inversa o la composición de funciones, utilizando gráficos y lenguaje algebraico. • Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente. • Modelan situaciones por medio de la inversa o de la composición de funciones.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se recomienda usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1; pueden emplearse cada una por sí misma o en conjunto. Los estudiantes pueden trabajar la evaluación de forma personal o colaborativa. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación, pues permite al alumno ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS EN UN AMBIENTE CARTESIANO

1. Se consideran pares de funciones de una función f con su inversa f^{-1}.
   a. ¿Por qué las rectas verdes y rojas representan un par de función f e inversa f^{-1}, respectivamente?
   b. ¿Por qué la función g representada por la recta azul es inversa de sí misma?
   c. Verifica esta propiedad de la función g mediante un diagrama sagital.



2. Se considera la función f con $f(x) = \frac{1}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de f en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.
   b. ¿Qué simetría axial tiene el gráfico de f y qué se puede conjeturar acerca de su función inversa f^{-1}?
   c. Desarrolla la función inversa f^{-1} para verificar o rechazar la conjetura.
   d. Verifica algebraicamente qué funciones g con $g(x) = a \cdot x^{-1}, (a \neq 0)$ son inversas de sí misma.
3. Con base en los resultados de las actividades anteriores, determina la función afín h, que es inversa de sí misma, y verifica gráficamente el resultado mediante herramientas digitales.
4. Se considera la función k con $k(x) = \frac{-2}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de k para $x > 0$ con herramientas tecnológicas
   b. ¿Es k inversa de sí misma? Argumenta gráfica o algebraicamente.

MODELANDO LOS COSTOS DE EMPAQUE

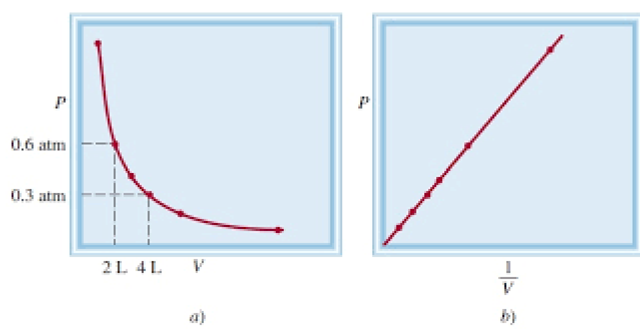
Una empresa que empaca libros de enciclopedia envía a los clientes, estima en $\$10\ 000$ los costos fijos de empaque para mantener su infraestructura. Se quiere modelar la situación de costos variables con una función afín decreciente para que, a partir de 10 ejemplares, el envío quede libre de aquellos costos fijos. En otra variante, se piensa en el modelo de la proporcionalidad inversa que considera, por ejemplo, costos de $\$2\ 000$ de empaque si se encarga 5 libros.

a. Elaboran el gráfico que representa la función *f* del primer modelo y la función *g* del segundo modelo. (Escala: eje X: 1 una unidad representa 1 libro, eje Y: 1 unidad representa $\$1\ 000$).
b. Determinan ambas funciones.
c. Explican el significado de la variable independiente y de la variable dependiente, para la función inversa de ambas funciones.
d. ¿Qué debilidades tienen ambos modelos, si se sobrepasa los 10 ejemplares?
e. ¿Qué debilidad tiene el modelo de la proporcionalidad inversa con respecto a los gastos fijos?

Para la tarea “Modelamiento de una situación del ámbito de la economía”, puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Determinan las variables del contexto para elaborar tablas, gráficos y funciones.	Describen las variables del contexto según los modelos presentados en el problema.	Describen variables asociadas a un modelo del problema.	Identifican información del problema y asocia letras con frases del problema.
	Elaboran tablas, gráficos y funciones de forma manual o utilizando tecnología.	Elaboran tablas, gráficos y funciones que están relacionados de alguna manera con el problema.	Ordenan la información del problema.
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.	Determinan e interpretan la función inversa de cada modelo según las variables y el contexto.	Determinan la función inversa de cada modelo.	Determinan funciones inversas de otros modelos completamente diferentes a los presentados.

MODELANDO EL VOLUMEN Y LA PRESIÓN DE GASES



Un recipiente de gas tiene un pistón móvil. Si se disminuye el volumen del gas, se aumenta la presión del gas. Durante el proceso del cambio del volumen, se debe mantener la temperatura del gas (proceso isotérmico) para evitar accidentes.

a. ¿Qué función de presión y volumen representan los gráficos?

b. Elabora la función *p* que modela la presión en dependencia del volumen.

c. ¿Por qué el segundo gráfico modela el mismo fenómeno? ¿Qué debilidades presentan los modelos?

d. Determina la función inversa p^{-1} de la función *p* según el primer gráfico.

e. Elabora el gráfico de la función inversa p^{-1} y explica el cambio del significado de las variables.

TRABAJANDO ALGEBRAICAMENTE

1. Despejar las ecuaciones según la variable indicada en paréntesis.

   a. $2y - 3x = -1 \ (y)$

   b. $\frac{1}{4}x + 2y = \frac{1}{4} \ (x)$

2. La función f tiene la ecuación $f(x) = 2x + 5$. Determina la pendiente de la recta que representa la función f^{-1}.

3. En algunas ocasiones es posible confundirse con el símbolo de producto y el de composición, como en el caso de $(f \cdot g)(x)$ o $(f \circ g)(x)$.
   a. $I(x)$ se obtuvo como el producto de dos funciones. Prueba componiendo las mismas funciones y verifica si la resultante es igual a $I(x)$ o es distinta.
   b. Interpreta ambas composiciones de funciones y compárenlas con $I(x)$.

4. Encuentra $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$, utilizando herramientas digitales si es posible y confirmando los resultados de forma algebraica.

   a. $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x - 3$
   b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   c. $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

5. Grafica las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4x + 1$.

   a. Marca un punto C en el eje X.

   b. Traza una recta vertical que pase por C y que corte a la gráfica de $f(x)$ y a la gráfica de $g(x)$.

   c. Copia sobre $g(x)$ el segmento formado entre C y la gráfica de $f(x)$, como se muestra en la figura.

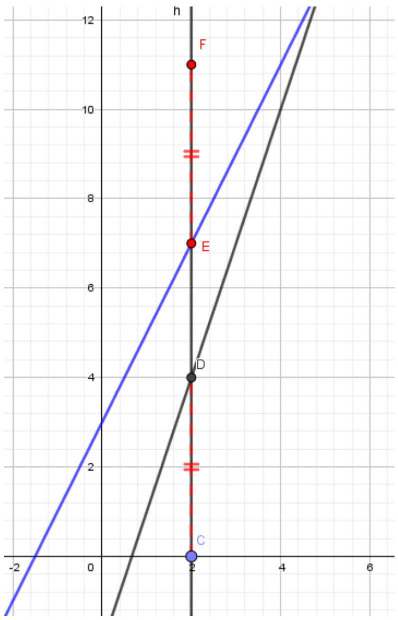
   d. Repite lo anterior, ubicando otros puntos sobre el eje X.

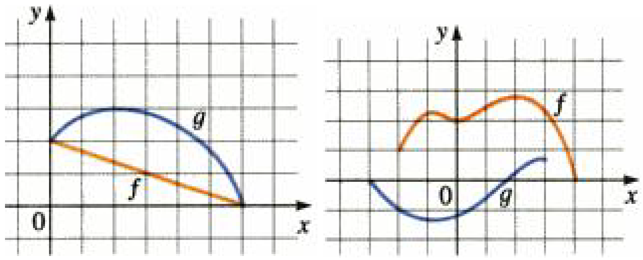
   e. Completa con la forma gráfica que une los puntos obtenidos.

   f. Por otro lado, suma algebraicamente las funciones f y g; es decir, determina $(f + g)(x)$.

   g. Compara la función resultante con la forma gráfica obtenida.

   h. Prueba con otros ejemplos de funciones y generaliza para la adición de funciones.





i. Prueba con otras operaciones. ¿Son todas igualmente fáciles de obtener gráficamente?

6. Realiza las siguientes acciones: Se considera la función afín f con $f(x) = 2x - 1$.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1}.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Qué propiedad existe entre los tres gráficos?
   c. Marca el dominio y recorrido en los ejes con diferentes colores.

7. Se considera la función cuadrática g con $g(x) = x^2$.
   a. Dibuja el gráfico de g.
   b. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1}.
   c. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de g y g^{-1} junto con la bisectriz del primer cuadrante.

8. Aplicación del concepto inversa de una función a funciones conocidas.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1} de la función exponencial f con $f(x) = 2^x$.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
   c. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1} de la función logarítmica g con $g(x) = \log_{10} x$.

2. Sea f la función cuadrática $f(x) = x^2$.
   a. Determina la ecuación de la función compuesta "$f \circ f$".
   b. Conjetura: ¿Qué función resulta si se compone una función f con su función inversa f^{-1}? Argumenta con la metáfora de "máquina".
   c. Elige pares de funciones f y f^{-1}, compone y compara los resultados con la actividad anterior.

MODELANDO LA OFERTA Y DEMANDA

1. De acuerdo con su experiencia y la información que ha recabado a lo largo de los años, Alex ha determinado que las funciones de oferta y demanda de las cómodas que él produce y vende son las siguientes:

$$O(p) = 60\,000p - 230\,000$$
$$D(p) = -3\,000p + 220\,000$$

   a. ¿Que podría representar p en ambas funciones?
   b. ¿Qué información entregan la función oferta y la función demanda? ¿Qué representan las funciones $D(p)$ y $O(p)$?

2. Grafica ambas funciones en un plano cartesiano. Puedes usar alguna herramienta digital, graduando adecuadamente los ejes.

3. ¿Cómo se interpreta el punto de intersección de las rectas?

4. Encuentra el punto de intersección de las rectas de forma algebraica.
   a. ¿Qué relación se da entre ambas funciones para encontrar el punto de intersección de las rectas?
   b. Otra forma de resolverlo es restar ambas funciones. Opéralas de esta forma y compara con tu respuesta anterior.

5. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

$$Q(x) = -50 + 1{,}5p$$
$$D(x) = 600 - p$$

   a. Calcula el precio y la cantidad para tener equilibrio en el mercado.
   b. ¿A qué precio se producirá una escasez de 100 unidades?

6. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:

$$Q(x) = -200 + \frac{1}{4}p^2$$
$$D(x) = 520 - \frac{1}{5}p^2$$

   a. ¿Cuál es la cantidad para el equilibrio?
   b. Si el fabricante desea poner un precio de $50 al producto, ¿qué cantidad de producto demandará el mercado?

MODELANDO EL PRECIO DE BIENES

1. Para conocer los costos por la producción de las cómodas, Alex estima algunos gastos y concluye que si el costo por una cómoda es $100 000, puede reducir el gasto por dos cómodas y costarían $198 000; tres cómodas tendrían un costo de $294 000, y así sucesivamente.
   a. Completen la tabla.

Tabla 1: Tabla de valores. Relación entre costos y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Costo $C(x)$	100 000	198 000	294 000						

2. Trabajando en grupo con alguna herramienta digital (Excel), encuentren la curva que mejor aproxima la función entre x y $C(x)$.
   a. Distribúyanse las siguientes tareas:
   - Ingresar los datos anteriores en una tabla de dos columnas; la primera corresponde a la cantidad de cómodas y la segunda, a los costos.
   - Insertar un gráfico de dispersión.
   - Describir de manera general la forma de esta gráfica.
   - Agregar la línea de tendencia, usando la opción de tendencia “polinómica”.

   b. ¿Qué función es la mejor aproximación a los datos presentados?

3. Interpreten esta función en el contexto del costo de producción de x unidades.
   a. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de unidades de cómodas deja de aumentar el costo? ¿Qué sentido tiene?
   b. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

4. Respecto del precio que debe cobrar, Alex estima que debe hacer un descuento a medida que aumentan las unidades solicitadas. Descuenta un 1% por cómoda, desde la compra de dos de ellas en adelante. No se hace descuento por comprar solo una.
   a. Completen la tabla.

Tabla 2: Tabla de valores. Relación entre precio y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Precio $P(x)$	200 000	396 000	588 000			1 800 000			

5. En Excel, encuentren la curva que mejor aproxima la función entre $P(x)$.

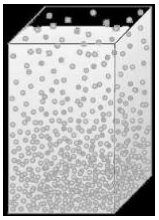
6. Interpreten esta función en el contexto del precio de venta de x unidades.
   a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   b. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de cómodas deja de aumentar el precio de venta? ¿Qué sentido tiene?
   c. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

7. ¿Cómo pueden determinar los ingresos de Alex solo por estas cómodas, según la cantidad de unidades producidas y vendidas?
   a. ¿Qué operación matemática pueden realizar entre $P(x)$ y x para obtener los ingresos?
   b. Muestren la operación y el modelo $I(x)$ obtenido en a.
   c. Grafiquen la función $I(x)$.
   d. Interpreten la función de acuerdo con el contexto.

8. ¿En qué valor de x Alex no gana ni pierde dinero entre la producción y la venta de cómodas?

9. ¿En qué valores de x Álex gana lo máximo posible?

MODELANDO LA PRESIÓN DEL AIRE



Subiendo por 1km sobre el nivel del mar, la presión del aire siempre decrece aproximadamente en un 10% en comparación con la anterior. Al nivel del mar, la presión del aire tiene un valor de aproximadamente $P_0 = 1\,000\; hP$ (*hecto Pascal*).

a. Elaboren la ecuación de la función exponencial que representa la disminución de la presión del aire en intervalos de 1km de altura.
b. Determinen la presión del aire en la cima del "Ojos del Salado" (6 893m) y al nivel del Mar Muerto (-430m).
c. En la subida de una carretera a la montaña, el altímetro integrado en un auto de aventura muestra una presión de 714hP. ¿En qué altura se encuentra el auto?
d. Desarrollen la fórmula que modela la altura según la presión del aire.
e. Grafiquen ambas funciones en diferentes sistemas de coordenadas, utilizando alguna herramienta digital.
f. ¿Con qué base de la función exponencial es constante la presión del aire? Representen la validez de la conjetura sobre un gráfico.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Comparan funciones y sus funciones inversas, utilizando diferentes representaciones.			
Describen funciones y sus inversas, utilizando características de simetría o asimetría.			
Verifican la correspondencia entre funciones y sus inversas, utilizando gráficos y procedimientos algebraicos.			
Representan funciones y sus inversas de forma manual o con herramientas digitales.			
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.			
Explican el significado de las variables dependientes e independientes de funciones y sus inversas.			
Varían parámetros para evaluar la pertinencia de modelos basados en una función y su inversa.			
Determinan de forma algebraica la adición, sustracción y multiplicación de funciones.			
Determinan de forma algebraica la inversa y la compuesta de funciones.			
Resuelven un problema, utilizando la intersección de rectas y de curvas.			
Determinan dominio y recorrido de funciones y dan sentido a las restricciones según un contexto.			
Evalúan modelos basados en funciones para tomar decisiones.			