Actividad 2: Comprender el modelo normal de probabilidades

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen en los conceptos clave de la distribución normal y la manera de llegar a ellos, y que argumenten sobre cómo histogramas que reflejan distribuciones binomiales se "parecen" cada vez más a "distribuciones normales" al aumentar el número de repeticiones. Se pretende también que dialoguen acerca de la necesidad de incorporar la distribución normal estándar para calcular determinadas probabilidades en contexto. Del mismo modo, pueden reforzar la aproximación de una distribución binomial por una distribución normal en contextos determinados.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

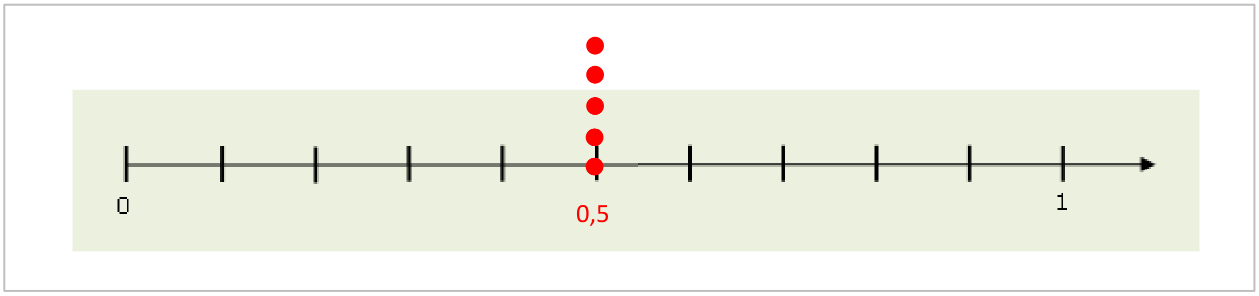
DESARROLLO

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

DESARROLLO Y SIGNIFICADO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Paso 1. El concepto de una variable aleatoria continua.
El recuadro siguiente muestra una recta numérica con subdivisión en décimas. Se marcó el número racional de $0{,}5$. Se sugiere realizar el siguiente experimento aleatorio, utilizando un generador digital de números al azar disponible en internet.

a. Primer experimento: Se elige números naturales de $1\ a\ 10$. Entre los números generados, se registra los números "5" –que se interpretan como "$0{,}5$"– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número "$0{,}5$". Después de $n = 100\ o\ 200$ números generados, se determina la frecuencia relativa de los “5”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.



b. Segundo experimento: Se elige números naturales de $1\ a\ 100$. Entre los números generados, se registra los números “50” –que se interpretan como “0,50”– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número “0,50”, que es la misma que la de “0,5”. La subdivisión de la recta numérica entre 0 y 1 se cambió en centésimas. Después de $n = 100\ o\ 200$ números generados, se determina la frecuencia relativa de los “50”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.

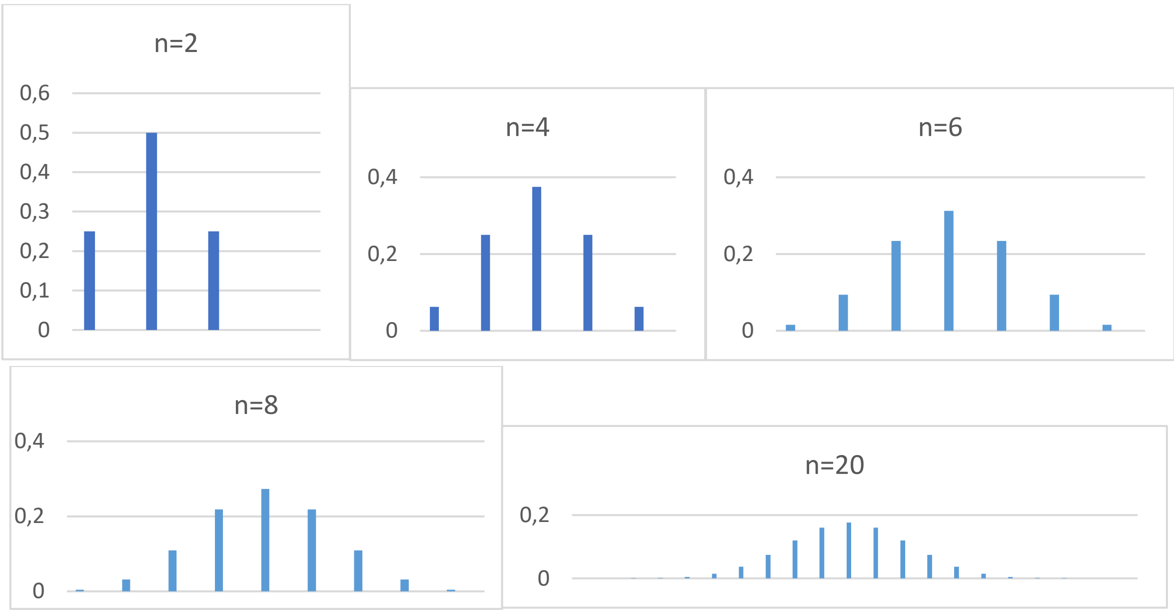
c. Se piensa en cambiar la graduación en $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{1\,000\,000}, \frac{1}{10\,000\,000}, \frac{1}{100\,000\,000}, \frac{1}{1\,000\,000\,000}$, … siguiendo con cambiar la subdivisión según el mismo patrón. El generador de números al azar generaría números de 1 a 1 000 000 000, continuando con aumentar los números generados con el factor 10. ¿Cuál sería la tendencia de la probabilidad de obtener "0,500", "0,5 000", “0,50 000” , “0,500 000”, “0,5 000 000”, “0,50 000 000”, “0,500 000 000”etc.? Argumenten su respuesta.

d. Si se considera el conjunto de los números racionales $\boldsymbol{Q}$, ¿cuál será la probabilidad teórica de encontrar un granito de arroz de, por ejemplo, $28,\overline{3}mg$? Argumenten su respuesta.

e. Si se considera que el conjunto de los números racionales $\boldsymbol{Q}$ es subconjunto de los números reales $\boldsymbol{R}$, ¿cuál será la probabilidad de encontrar un granito de arroz con una masa de $27{,}01001000100001 \ldots .mg$? Argumenten su respuesta.

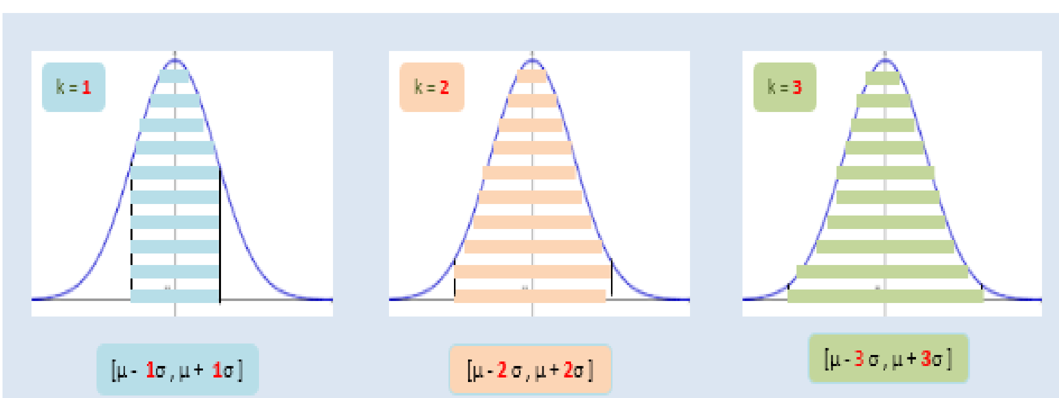
f. Considerando que las variables aleatorias continuas toman valores reales, ¿cuál es la probabilidad $P(r)$, si r es un número real? Argumenten su respuesta.

Paso 2. Se muestra los siguientes histogramas de distribuciones binomiales de la probabilidad de éxito de $p = 0{,}5$, incrementando cada vez el valor de "n".



a. Al aumentar el valor del número n, ¿qué cambio experimentan los histogramas en cuanto a la forma, la ubicación del valor esperado y la probabilidad que corresponde al valor esperado μ? Argumenten su respuesta.
b. Con herramientas tecnológicas digitales como Excel, GeoGebra u otros, elaboren los histogramas para $n = 40$ y $n = 60$. ¿A qué forma se acercan los histogramas?
c. ¿Qué transformación geométrica de los histogramas se debe realizar para que el valor esperado μ se cambie a la posición $X = 0$? Argumenten su respuesta.

Paso 3. Significado de la distribución normal.
La imagen siguiente muestra los gráficos de una distribución normal de $N(\mu, \sigma)$ con los intervalos $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ para $k = 1, 2{,}3$



a. La probabilidad de un intervalo simétrico al valor esperado μ de $P(|X-\mu| \leq c)$ se estandariza mediante la función Φ en $\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$.
Con $c = k\sigma$ se obtiene $2 \cdot \Phi(\mathrm{k}) - 1$. Determinen las probabilidades que corresponden a los intervalos [μ - 1σ, μ +1σ], [μ - 2σ, μ +2σ] y [μ - 3σ, μ +3σ]
b. ¿Por qué estas probabilidades son válidas para todas las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.
c. ¿Qué ventaja tienen las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.

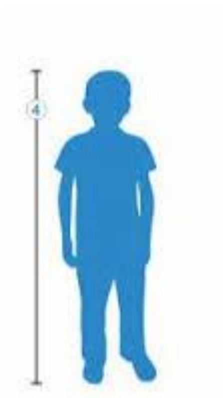
Paso 4. Aproximación de una distribución binomial por la distribución normal estandarizada.

Según el registro electoral de una región, la participación en las últimas elecciones era de aproximadamente 80%.
Para una encuesta telefónica, se eligió al azar una muestra de 400 personas.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, 3° y 4° medio.

a. Determinen los parámetros de μ y σ de la distribución binomial y transfórmenla en la distribución normal estandarizada correspondiente.
b. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra más de 88 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.
c. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra, como máximo 70 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.
d. ¿Es posible de determinar la probabilidad de tener exactamente 88 personas en la muestra que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.

Paso 5. Aplicación de la distribución normal



Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio.

A. Según el estudio antropométrico en párvulos atendidos por el Sistema Educativo Público Chileno para el diseño de mobiliario, publicado en la revista científica Scielo[11], la estatura media de niños en el grupo de 25 a 36 meses es de $\mu = 91{,}30cm$, con una desviación estándar de $\sigma = 4{,}27cm$.
a. ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de $87cm$ como máximo? Argumenten su respuesta.
b. ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de $87cm$ como mínimo y $96cm$ como máximo? Argumenten su respuesta.

[11] https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-95022013000100032

B. La vida útil de los motores de un automóvil de cierta marca se distribuye según una distribución normal con el valor esperado de **μ** = 105 000 km y una desviación estándar de **σ** = 10 000 km.

   a. ¿Qué porcentaje de los motores tiene una vida útil entre 90 000 km y 110 000 km? Argumenten su respuesta.
   b. ¿Qué porcentaje de los motores supera la vida útil de 120 000 km? Argumenten su respuesta.
   c. ¿Qué porcentaje de los motores se desvía del valor esperado en más de 12 000 km? Argumenten su respuesta.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Es posible que los estudiantes ya conozcan la distribución normal de probabilidades. En estas actividades se propone profundizar en los conceptos y cómo llegar a ellos. Por ejemplo, se parte de experimentos que utilizan variables aleatorias continuas, y se sigue con histogramas que representan experimentos binomiales, en los cuales, al aumentar el número de repeticiones "n", la forma del histograma se parece cada vez más a una campana de Gauss.
2. Las actividades propuestas permiten que los jóvenes entiendan, paso a paso, el modelo normal de probabilidades. Además, discuten si es necesario incorporar la distribución normal estándar y cómo determinar las probabilidades que corresponden a los intervalos [μ - 1σ, μ +1σ], [μ - 2σ, μ +2σ] y [μ - 3σ, μ +3σ] e interpretar su significado.
3. Se sugiere proponer ejercicios en contexto en los que tengan que aproximar una distribución binomial a una distribución normal, para que vean la utilidad de esta transformación cuando el número "n" de observaciones es grande.
4. Para finalizar, se recomienda que resuelvan problemas en contexto en que deban aplicar la distribución normal con parámetros μ y σ dados. La idea es que resuelvan cálculos de probabilidad, utilizando la distribución normal estandarizada.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican las principales características de una distribución normal de probabilidades.
   - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Generadores de números aleatorios:
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.generarnumerosaleatorios.com/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.augeweb.com/azar/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://numero-aleatorio.com/generadores/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://pinetools.com/es/generador-numeros-aleatorios
- Cómo usar la fórmula de la distribución binomial en Excel
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=xVwetXD9cis