Actividad 1: Resolver ecuaciones que no tienen solución en los números reales

PROPÓSITO

Los estudiantes dan sentido a la abstracción de la matemática, sin dejar de lado el componente de la aplicabilidad. Se apoyan en sus compañeros y trabajan juntos en la solución de ecuaciones. Comprenden que se considera números a las raíces negativas e imaginarias de una ecuación, y que no representan cantidades, sino más bien movimientos o ubicaciones en el plano. Emplean representaciones manuales o digitales para dar sentido a -1 y $\sqrt{-1}$. También se presenta una de las aplicabilidades más conocidas de los números complejos, relacionada con los circuitos eléctricos.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

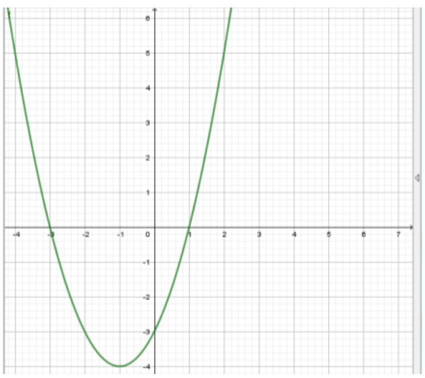
Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

ECUACIONES CUADRÁTICAS Y SU GRÁFICO

1. Observen el gráfico que corresponde a la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$:

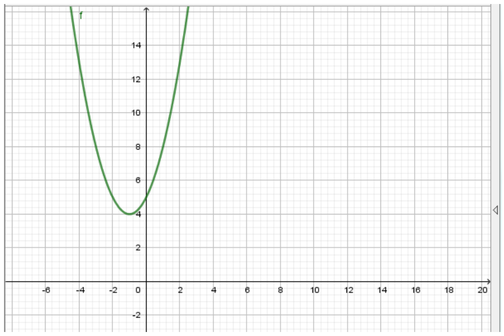


   a. ¿Cuál es la relación entre la expresión $(x + 3)(x - 1) = 0$ y el gráfico?

   b. ¿Qué entienden por “los ceros del gráfico”?

c. Si pueden, usen alguna herramienta digital para hacer el gráfico de la función cuadrática.

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$



d. ¿Cuál es la diferencia entre la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 5$ respecto de la intersección del eje X?

e. ¿Qué tipo de soluciones se obtiene de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 5 = 0$?

f. ¿Es correcto decir que las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 5 = 0$ son $x_1 = \frac{-2+\sqrt{-16}}{2}$ y $x_2 = \frac{-2-\sqrt{-16}}{2}$?

g. Si todas las raíces de una función cuadrática son números imaginarios, ¿qué conjetura se podría plantear respecto de la gráfica de esa función? Justifiquen la respuesta, analizando el valor $d = b^2 - 4ac$ y el desplazamiento de la gráfica.

NÚMEROS COMPLEJOS Y EL PLANO DE ARGAND-GAUSS

1. Representen las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 5 = 0$ en forma vectorial en el plano complejo:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = -1 + 2\sqrt{-1} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} = -1 - 2\sqrt{-1}$$

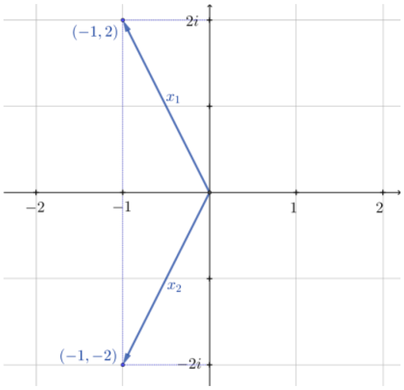


Fig. 4: Representación vectorial de las soluciones complejas de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 5 = 0$.

2. Identifiquen los números imaginarios que muestra la imagen y representen los vectores correspondientes a cada uno de ellos.

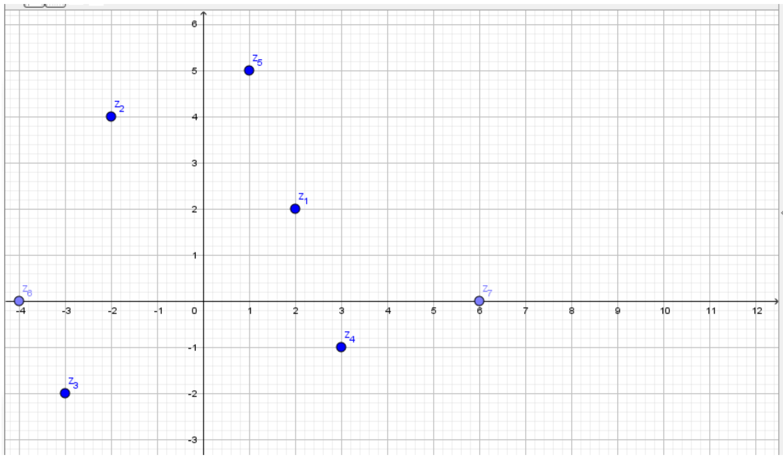


Fig. 4: Gráfica GeoGebra: números imaginarios en el plano complejo.

3. Completen la siguiente tabla y respondan:

Ecuación	Valor de $b^2 - 4ac$	Soluciones	Las soluciones, ¿son reales o imaginarias?
$x^2 - 9 = 0$			
$x^2 + 4 = 0$			
$x^2 + x + 1 = 0$			
$x^2 + 6x - 27 = 0$			
$x^2 - \frac{81}{25} = 0$			

a. ¿Qué pueden concluir de las soluciones cuando $b^2 - 4ac > 0$, cuando $b^2 - 4ac = 0$ y cuando $b^2 - 4ac < 0$, respectivamente?

b. Represente gráficamente cada ecuación y respondan: ¿Qué diferencia hay entre las representaciones gráficas de las soluciones de las ecuaciones de la tabla?

4. Si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, escriban la ecuación cuadrática cuyas soluciones son:

a. i y $-i$

b. $1 + 2i\ y - 2 - 3i$

c. $-5\ y\ 7$

d. $4\ y\ 0$

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda iniciar la actividad con una breve introducción histórica sobre la representación gráfica de números negativos y números imaginarios. Esto implica aclararles cómo ha evolucionado la matemática; por ejemplo: ideas matemáticas que ahora parecen obvias, fueron cuestionadas por la comunidad científica en un tiempo; resultados negativos y complejos requirieron una noción más abstracta de número —independientemente de la noción de cantidad— y de la matemática. En el proceso, fue indispensable para los matemáticos de la época usar representaciones visuales de esos números para poder avanzar en la construcción de esta disciplina.
2. Se sugiere que hagan representaciones manuales de los números complejos y de la operatoria de ellos, dentro de lo posible. Es el momento de que trabajen con precisión y relacionen y diferencien la representación pictórica y simbólica compleja, vectorial y puntual.
3. Es importante que comprendan que se ha graficado la curva de la función cuadrática en el plano real para visualizar sus soluciones y, por otra parte, está el plano de Argand-Gauss, conformado por una parte real y una parte imaginaria, que permite visualizar los números complejos en el plano.
4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan números complejos en el plano, relacionando con vectores e identificando las partes reales e imaginarias.
   - Utilizan los números complejos y sus representaciones pictóricas y simbólicas para encontrar solución a ecuaciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores y estudiantes:

- Plano complejo
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Plano_complejo
- Carl Friedrich Gauss
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm
- Teorema fundamental del álgebra (historia)
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ugr.es/~eaznar/FTA.htm
- Matemáticas visuales
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/complejos/funciones/grado2.html
- Calculadora de números complejos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.symbolab.com/solver/complex-numbers-calculator
- Suma de vectores
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=qvw7j9eKGdg