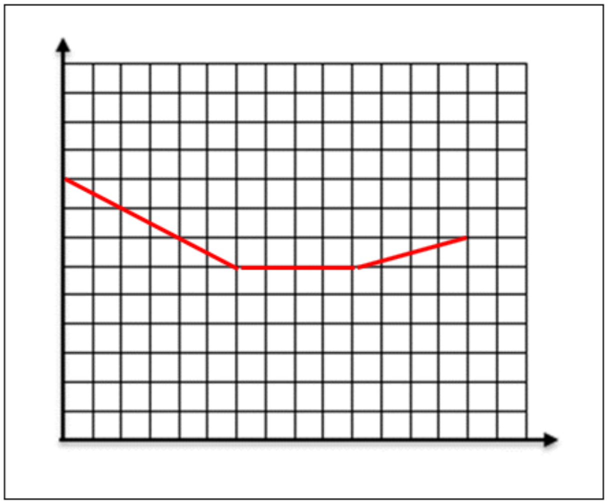
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.	• Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado. • Verifican para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, en el cual la función F es la antiderivada de f. • Determinan antiderivadas F de funciones f para determinar la integral definida, en contextos científicos, económicos y cotidianos. • Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

Duración: 6 horas pedagógicas

A continuación, se muestra algunas actividades que sirven como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas, donde el estudiante trabaje individualmente por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el alumno puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

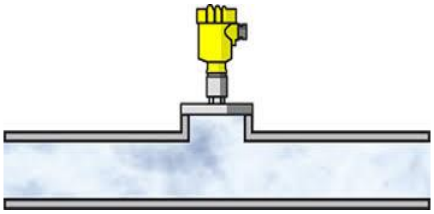
1. La imagen muestra el gráfico de razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ del volumen de un líquido en un recipiente. El eje horizontal representa el tiempo t.



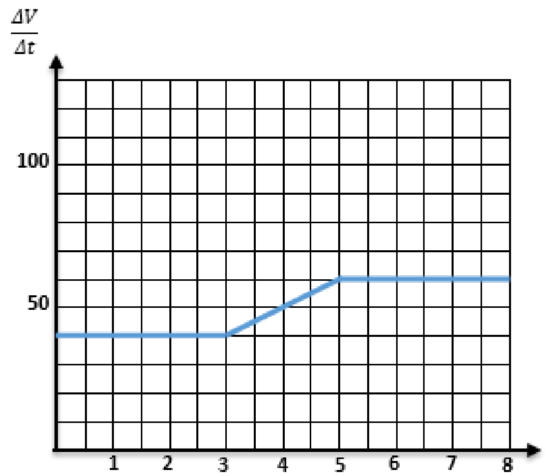
   a. Marca en el gráfico los instantes en los cuales se cambia la razón instantánea del volumen.
   b. ¿En qué intervalos la razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ es invariante, positiva o negativa?
   c. Elabora para cada intervalo, por separado, un gráfico esquemático del volumen V mismo en dependencia del tiempo.
   d. Argumenta acerca del tipo de función que representa el volumen V en dependencia del tiempo.

Recuperar informaciones del cambio a partir de su razón instantánea.

1. El gráfico representa la razón instantánea del volumen de vapor que transporta una tubería.

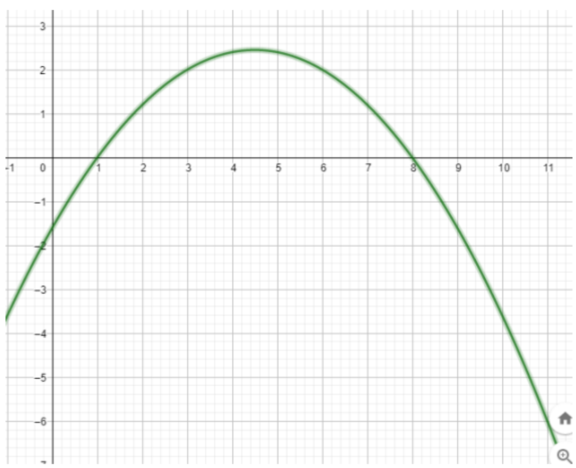


La escala del tiempo es de minutos [min] y la de la razón instantánea es de [$\frac{m^3}{min}$]



a. Describe verbalmente el comportamiento de la razón instantánea del volumen, en el intervalo de tiempo [0 min, 8min].
b. Mediante el gráfico, recupera el volumen total del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
c. Elabora el gráfico del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
d. Compara la función del cambio con la función de la razón instantánea del cambio. ¿Qué tipo de funciones son?

2. El gráfico representa la función f con $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{8}{5}$.

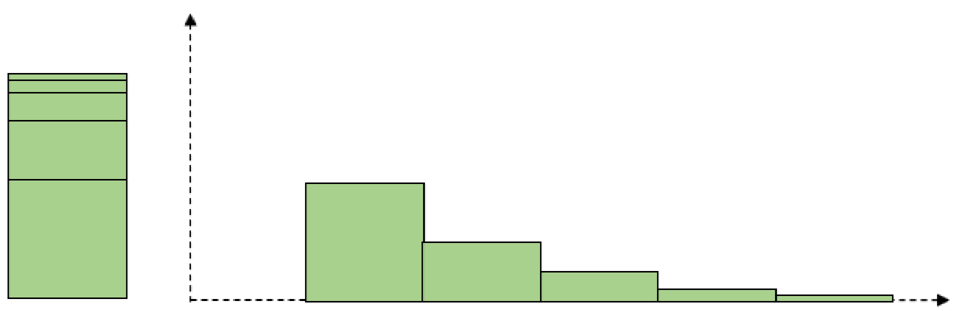


a. Verifica algebraicamente los puntos de intersección con los ejes del sistema de coordenadas.
b. Determina el vértice de la parábola mediante la derivada f' de f, y compáralo con el gráfico.
c. Calcula la integral definida de la función f en los márgenes de $a = 0$ y $b = 12$. $\int_0^{12} f(x)\ dx$

d. Argumenta acerca del resultado numérico.
e. Se quiere pintar el área que se encuentra bajo la curva y el eje X. Determínala en unidades de área contando los cuadraditos del gráfico.
f. Compare este conteo con el resultado obtenido en c.
g. Considere que la función f interpreta la razón momentánea de los ingresos por venta de un producto, obtenidos en dependencia de la cantidad x de unidades vendidas. Determina los ingresos máximos (eje x: una unidad de medida representa 1 000 unidades, eje y: una unidad de medida representa 10 000 UF) ¿qué podría significar el cálculo del área en este contexto?

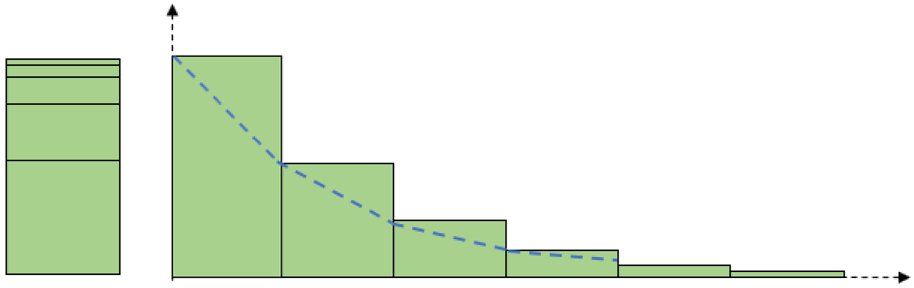
Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $x \to \infty$ o $x \to x_0$.

1. La imagen muestra una pila de rectángulos, todos representan el ancho 1m y las alturas h disminuyen, empezando con 1m, $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{4}$m, …,$\frac{1}{2^{n-1}}$m.
Se coloca los rectángulos de la pila uno al lado del otro, empezando con el más grande, como muestra la figura. Describan a un compañero lo que entienden.



a. Marquen con un punto rojo en cada rectángulo, el vértice en la posición izquierda arriba y junten los vértices marcados, trazando una curva adecuada que represente de mejor forma la disminución de las alturas.
b. Extrapolen la curva hacia la izquierda y marquen aproximadamente el punto de intersección con la línea vertical punteada. ¿Cuál sería la altura del rectángulo que antecede al primer rectángulo representado?
c. La suma infinita de las alturas $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +\ldots$ representa una serie geométrica. Determinen el sumando en la posición n.
d. Determinen el límite de la suma de las alturas para encontrar después el área de la suma infinita de los rectángulos ($\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$, en la cual a_0 es el primer sumando y q, el cociente constante).
e. La curva dibujada en la actividad a. separa todos rectángulos en dos partes. Estimen el contenido de la suma infinita de las áreas que están debajo la curva.

f. Considerando el gráfico de segmentos ¿qué función resulta si se reduce el ancho de todos los rectángulos? Argumenten y expliquen la respuesta.



g. Desarrollen la ecuación de la función f que representa la curva roja dibujada en la actividad a.

h. Apliquen la igualdad entre q^t y $e^{t \cdot lnq}$ para expresar la ecuación de la función exponencial f a la base del número Euler e.

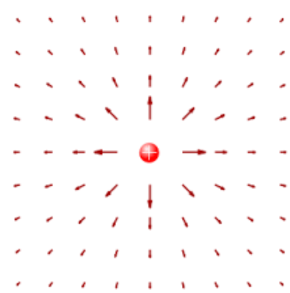
i. Determinen el límite $\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\ dt$ y contrástenlo con el límite estimado.

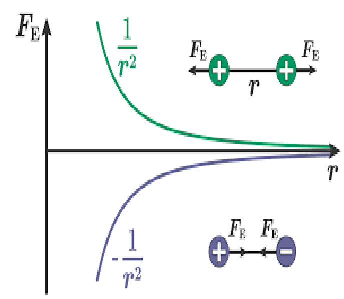
Para la tarea "Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $\boldsymbol{x} \rightarrow \infty$ o $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x_0}$" puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Identifican la invarianza del área de un objeto cuando se descompone en partes.	Describen la descomposición de un rectángulo en partes más pequeñas y lo relacionan con el área de la figura.	Describen la descomposición del rectángulo en partes más pequeñas.	Describen el rectángulo y el gráfico de forma independiente.
Relacionan una partición finita con procesos que se pueden repetir infinitamente.	Determinan la altura del rectángulo, extrapolando (a partir de la información inicial del problema) la altura del triángulo anterior.	Determinan la altura del rectángulo, dibujando la curva de forma aproximada.	Determinan la altura de un rectángulo cualquiera.
Relacionan la serie geométrica con la suma infinita de áreas de los rectángulos.	Determinan el límite de la serie geométrica y lo relacionan con el área de la suma infinita de los rectángulos.	Determinan algún límite y algún área, utilizando sumatorias infinitas y propiedades de límites.	Realizan cálculos que corresponden a la operatoria básica con números.

Relacionan el área bajo la curva con la partición en rectángulos que están sobre y bajo ella.	Comparan las áreas obtenidas por rectángulos que están sobre la curva y bajo ella, usando la noción de límites.	Determinan el área bajo la curva, usando la noción de límites.	Determinan áreas de figuras rectangulares asociadas a otros problemas.
Relacionan el área bajo la función cociente con el logaritmo natural.	Asocian los resultados del área y límites con los valores del logaritmo natural.	Disminuyen la base de los rectángulos utilizando límites, y determinan la función cociente.	Disminuyen la base de los rectángulos, utilizando procedimientos numéricos.

2. El campo eléctrico radial E de una carga eléctrica Q no es homogéneo y aumenta proporcionalmente a $\frac{1}{r^2}$ respecto de la distancia r del centro de la carga. Si una carga de prueba q del mismo signo está frente a la carga Q, actúa una fuerza repelente sobre ambas. Esta fuerza se llama "Fuerza de Coulomb"; se calcula mediante la fórmula $F_E = \mathrm{k} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, en la cual el factor k contiene una constante natural y r es la distancia entre el centro de ambas cargas. Para determinar la energía eléctrica W_{el}, que se obtiene cuando se acerca una carga de prueba q a la carga Q a la distancia r, se debe aplicar la integración, porque la fuerza eléctrica no es constante. Además, se pone el nivel "0" de la energía a una distancia r_∞ infinitamente lejos de la carga Q, porque allá la fuerza F_E es infinitésimamente pequeña.





Así se calcula la energía: $W_{el} = \int_{r_\infty}^{r} F_E \, dr$

a. Elaboren la integral con la cual se determina la energía eléctrica en dependencia de Q, q y r.

b. Determinen el límite $\lim\limits_{r_\infty \to \infty} \int_{r_\infty}^{r} F_E \ dr$, en el cual F_E representa la fuerza "F_E" y no la antiderivada de una función f.

c. Determinen cuánta energía eléctrica acumula una partícula α al acercarse a una distancia de $\mathrm{r} = 10^{-10} m$ del núcleo de un átomo de oro. Busquen las informaciones de la constante k, la carga de partícula α y la carga del núcleo del átomo de oro en la web.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Describen la razón instantánea de cambio por medio de la derivada.			
Usan la integral definida para calcular el volumen.			
Determinan el área bajo la curva, utilizando la integral definida.			
Relacionan el límite de series con la integral definida.			
Describen el área bajo la curva, usando aproximaciones por rectángulos.			
Modelan situaciones, utilizando la integral definida.			