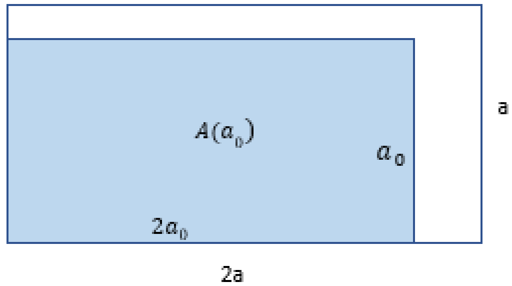
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.	• Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio. • Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio. • Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones. • Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas. • Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión. • Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

Duración: 12 horas pedagógicas.

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas donde el estudiante trabaje de forma personal por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el estudiante puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

1. Para valores de $a > 0$, la función A representa el cambio del área A de un rectángulo en dependencia del lado a. El ancho del rectángulo se representa por a y el largo es el doble del ancho.



   a. Elabora la expresión algebraica $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ de la razón del cambio del área del rectángulo considerado.

   b. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \to a_0)\ \frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ del cambio de A para $a_0 = 2$

   (Si no se logra determinar el resultado, seguir con $\frac{2a^2-8}{a-2}$)

a	1	1,5	1,9	1,99	2	2,01	2,1	2,5	3
$\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$					¿?				

2. Se considera la función f con $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{para } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{para } x < 1 \end{cases}$

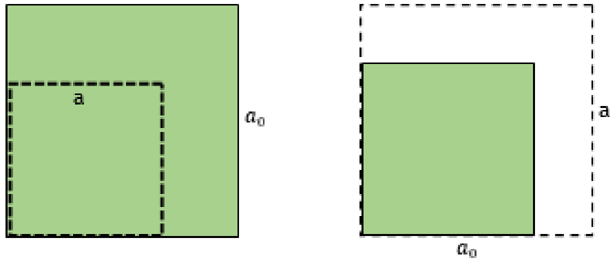
   a. Dibuja el gráfico de f.

   b. Conjetura acerca de la razón instantánea en el lugar $x_0 = 1$.

   c. Verifica la conjetura mediante procedimiento simbólico.

Relacionar la rapidez instantánea del cambio con el cambio mismo

3. Para valores de $a > 0$, la función $A(a) = a^2$ representa el cambio del área A de un cuadrado en dependencia del lado a.



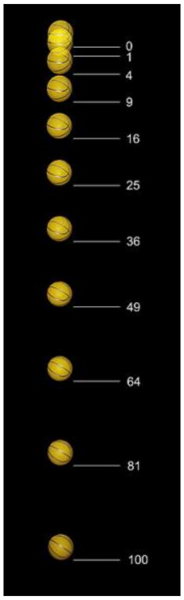
a. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \to a_0)$ $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)} = \frac{a^2-25}{a-5}$ cambio de A para $a_0 = 5$.

A	4	4,5	4,9	4,99	5	5,01	5,1	5,5	6
$\frac{a^2-25}{a-5}$					¿??				

b. Verifica la conjetura mediante la derivada $A´(5)$ del cambio del área del cuadrado.

c. ¿Qué significado geométrico tiene esta razón instantánea?

4. En la foto estroboscópica, se observa la caída “casi” libre de una pelota de basquetbol. Al inicio de la caída, las velocidades no son muy altas y se puede despreciar la resistencia del aire.



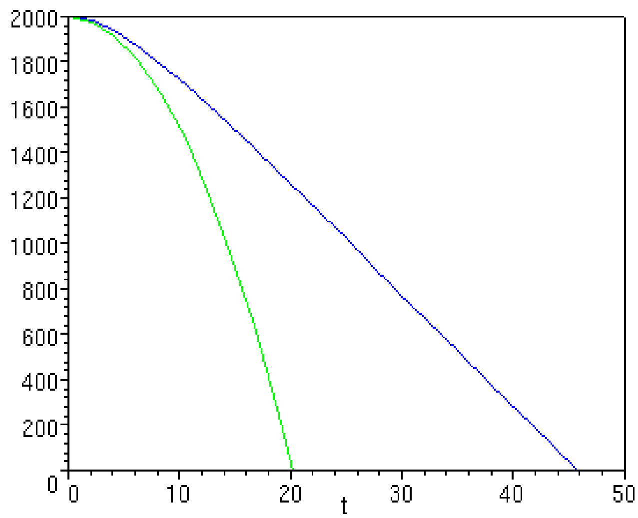
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

La función f que modela el desplazamiento de un cuerpo versus el tiempo durante una caída libre es una función cuadrática del tiempo:

$$f(t) = h - at^2$$

- h es la altura desde la cual cae un cuerpo.
- t representa el tiempo en segundos.
- $a = \frac{g}{2}$ donde g es la constante de gravedad 9,81 y que puede ser considerada con su valor aproximado $g \cong 10$ y por lo tanto se puede considerar $a \cong 5$.

La imagen representa los gráficos de un cuerpo que cae desde una altura de $2\,000\ m$. La línea verde representa una caída libre y la azul representa la caída del mismo cuerpo, considerando la resistencia del aire.



Curva verde: caída libre, curva azul: caída con resistencia del aire

a. Según el gráfico de la caída libre, la altura inicial es $2\,000m$ y en el instante $x = 20s$ es $0m$. Determina la ecuación de la función que representa la caída libre.
b. Determina la rapidez instantánea del cuerpo en el instante $x_0 = 10$, bajo el supuesto de la "caída libre", aplicando la derivada f' de la función f.
c. Determina, mediante el gráfico azul, las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[20,30]$ y $[30,40]$. La función se denomina con la letra r.
d. Considerando los resultados de c, ¿qué se puede concluir? Explica la respuesta.
e. Determina la ecuación de una función g cuyo gráfico también es parábola con el mismo vértice $S(0;\ 2\,000)$, pero con el intercepto $B(46;\ 0)$ con el eje X.
f. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, dibuja ambas parábolas, compáralas con el gráfico azul y conjetura acerca de la validez de ambas funciones para modelar la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.
g. Con los datos del gráfico azul, elabora un gráfico esquemático que represente la rapidez instantánea de la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.

Modelamiento de una situación del ámbito de la economía

5. La editorial de una revista técnica tiene $25\,000$ lectores y por cada lector gana anualmente $\$4\,000$. El directorio decide aumentar las ganancias totales. Para modelar esta situación, se puede considerar dos medidas en la venta de su producto.

   Primero: reducir las ganancias anuales por lector y atraer simultáneamente más lectores. Segundo: subir las ganancias anuales por lector y tomar en cuenta una pérdida de lectores.

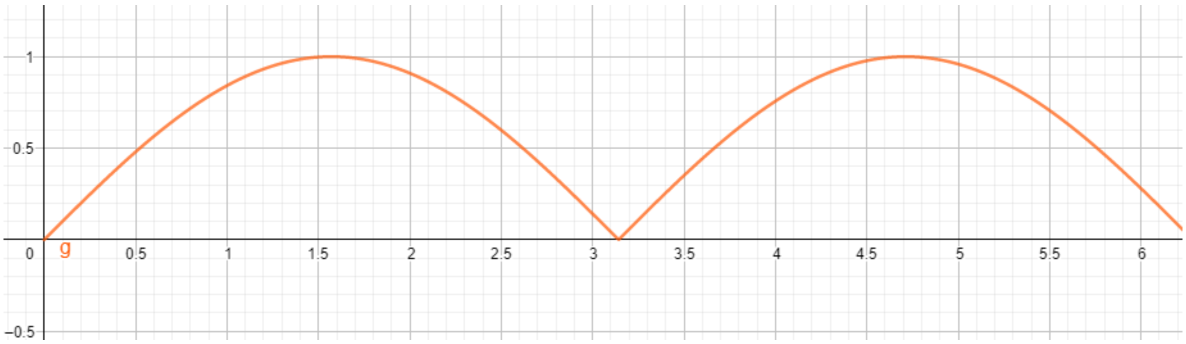
   a. ¿Por qué la primera medida podría ser la más adecuada? Justifica tu respuesta, utilizando valores de una tabla y la ley de Turgot.
   b. Reducir las ganancias por lector significa una pérdida y, por otra parte, que aumenten los lectores, aunque con base en una ganancia menor. ¿Dirías que esto va en dirección opuesta? ¿Qué se puede concluir para la meta de la editorial?
   c. Se asigna a la ganancia total de la empresa la variable f, a la ganancia por lector la variable g y al número de los clientes la variable c. Elabora en general la ecuación que representa la relación entre f, g y c.
   d. Considera los datos iniciales y supón un aumento en 100 lectores, si se rebaja la ganancia por lector en \$1 000; sobre esa base, elabora la ecuación de la función que modela la situación. La variable x representa \$1 000.
      (Resultado intermedio $f(x) = 1\,000\,000 + 15\,000x - 1\,000\,000\mathrm{x}^2$).
   e. Dibuja el gráfico y establece gráficamente la rebaja x_0 para la cual se logra una ganancia máxima total. Determina esta ganancia total.
   f. Determina la derivada f' de la función f para encontrar máximos o mínimos e interpreta según el problema.

Para la tarea "Modelamiento de una situación del ámbito de la economía", puedes usar la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar los dos casos iniciales del problema.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar uno de los dos casos.	Elabora una tabla con valores que corresponden a otra situación.
Utilizan la Ley de Turgot para justificar fenómenos de la economía.	Basado en los valores de la tabla junto con la Ley de Turgot, argumenta para justificar sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una sola justificación sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una justificación que es independiente de la Ley de Turgot o de la tabla de valores.
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante una composición de funciones.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante operaciones diferentes a la composición de funciones.	Describe verbalmente la relación de las variables, sin utilizar una operación matemática.
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión utilizando la derivada de funciones.	Relaciona la derivada con los conceptos de máximo o mínimo de la función.	Determina la derivada de la función.	Aplica procedimientos con la función que son distintos del cálculo de la derivada.
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.	Interpreta la derivada y los valores encontrados según el contexto del problema presentado.	Interpreta la derivada y los valores encontrados respecto de algunas partes del contexto del problema.	Interpreta la derivada y los valores encontrados con información que está fuera del contexto.

Conjeturar acerca de la existencia de la razón instantánea de un cambio como límite de pendientes de secantes

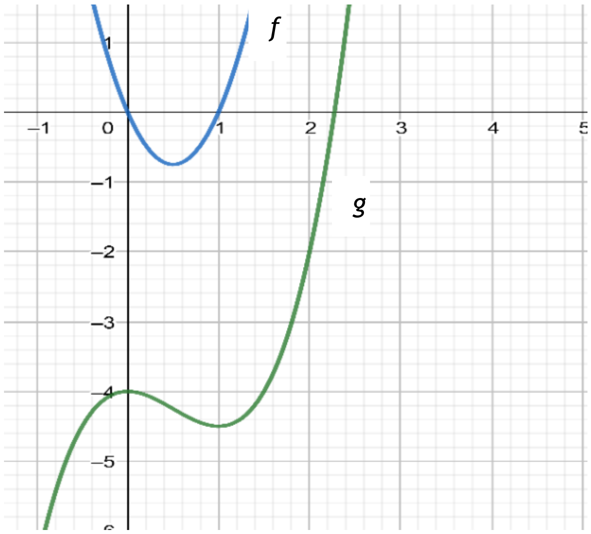
6. Se considera la función f definida por $f\ (x)\ =\ |sen\ x|$, como muestra el gráfico:



a. Mediante el gráfico, determina aproximadamente la razón media del cambio en los intervalos $[2{,}5, \pi]$, $[3, \pi]$, $[\pi, 3{,}3]$, $[\pi, 3{,}78]$.
b. Conjetura acerca de si existe una razón instantánea en el punto $S(\pi, f\,(\pi))$.
c. Elabora la ecuación de la función f sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
d. Elabora la ecuación de la función f' sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
e. Realiza el siguiente procedimiento para límites: $\lim\limits_{h\to 0} f'(\pi - h)$ y $\lim\limits_{h\to 0} f'(\pi + h)$. Con el resultado, verifica o rechaza la conjetura de la actividad b.
f. Dibuja el gráfico de la derivada f' y comenta el comportamiento de f' en el lugar $x_0 = \pi$.

Relacionar funciones con sus derivadas.

7. La imagen muestra el gráfico de dos funciones f y g, una de las cuales es derivada de la otra.
    a. Conjetura: ¿Cuál de las funciones es la derivada de la otra?
    b. Argumenta tu decisión con al menos 4 propiedades entre f y g.



8. Completa la tabla con las informaciones relacionadas entre función y su derivada.

	Ordenada de un punto en el gráfico de f	Recorrido de un movimiento en el instante x	Crecimiento de una magnitud en el instante x	El volumen de una esfera con el radio x	El trabajo físico desde el inicio hasta el desplazamiento x
$f(x)$					
$f`(x)$					

9. Con base en la tabla, elabora en forma esquemática el gráfico de la función g.

$g(x)$	aumentando	aumentando	aumentando	constante	disminuyendo	disminuyendo
$g'(x)$	aumentando	constante	disminuyendo	¿?	disminuyendo	constante

Responde:

a. ¿Cuántas veces se puede derivar una función potencia con exponentes positivos hasta que la derivada no se cambia? Explica la respuesta.

b. Determina pendientes de tangentes en el gráfico de funciones en un punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

10. Se considera una parábola con la ecuación $f(x) = ax^2 + b$. La parábola tiene el punto $P(2; 5)$, y la pendiente de la tangente en el punto $Q(2;\ f(2))$ es $m = 1$.

a. Elabora la ecuación de la parábola.

b. Grafica la parábola en un sistema de coordenadas.

11. Un polinomio de tercer grado tiene la ecuación de $f(x) = x^3 - tx^2 + 1$.

a. Desafío**:** Determina el valor del parámetro t de manera que la tangente en el punto de inflexión pase por el origen $O(0; 0)$ del sistema cartesiano de coordenadas (resultado parcial para seguir con la actividad: $t = 3$).

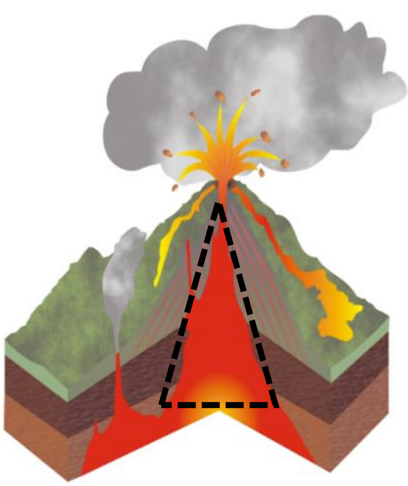
b. Establece los puntos máximos, mínimos y de inflexión para el gráfico de f.

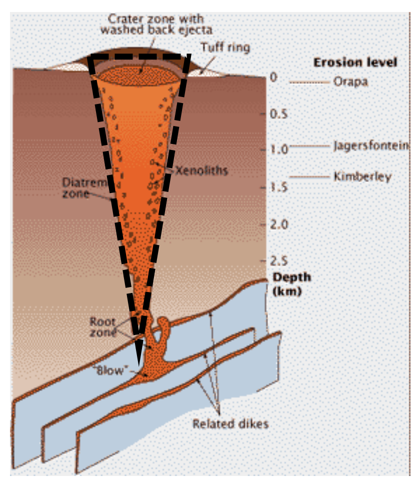
c. Dibuja el gráfico de f sobre el intervalo de $[-3{,}5;\ 1]$

d. Con el valor de $t = 3$, elabora la ecuación de la tangente en el punto de inflexión y verifica que la tangente es una recta que pasa por el origen $O(0; 0)$.

Concepto de la derivada como función que representa la razón instantánea de cambio

12. Las “chimeneas de lava” de los volcanes pueden tener diferentes formas –como tubos, conos o conos invertidos–, dependiendo de las formaciones geológicas.





a. Si se llenan las chimeneas con un caudal constante de lava, ¿cuál de los siguientes gráficos representa la altura de la columna de lava en la chimenea, en dependencia del tiempo? Razona la respuesta.

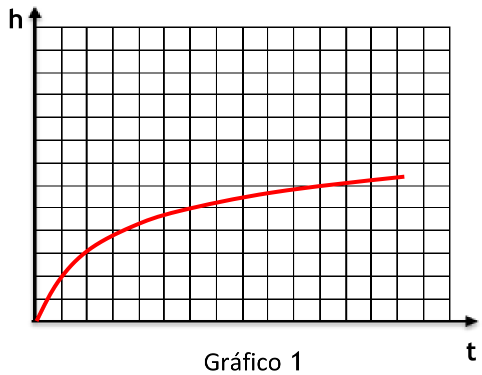


Gráfico 1

Gráfico 2

b. Determina para el volcán tipo "Kimberley" (cuya chimenea parece un cono invertido), la ecuación de la función que representa la altura h en dependencia del tiempo t, si se considera un caudal constante de la lava afluente. Los datos de la "chimenea de lava" son:

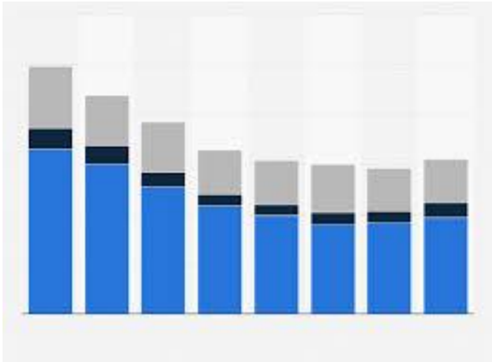
Altura total de la chimenea: $H = 2km$, radio máximo $R = \frac{1}{16}H$ y caudal constante de la lava afluente en unidad u de tiempo $V = 1\,000\,\frac{m^3}{u}$.

c. Elabora el gráfico de la función h.

d. Determina la ecuación de la función h', que representa la razón instantánea del cambio de la altura de lava en la chimenea.

e. Determina la razón instantánea del cambio de la altura en el momento de llegar a la altura H.

Determinar valores extremos e inflexión en contextos de economía



13. El volumen V de ventas del año pasado de una empresa grande del rubro de energía, se puede representar aproximadamente por la siguiente función:

$$V(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 - 200$$

a. La variable x representa el tiempo en meses y los valores numéricos se entregan en miles de millones, es decir multiplicados por \$1 000 000 000.

b. Confecciona el gráfico con herramientas digitales como GeoGebra.

c. Determina gráficamente en qué meses el volumen de ventas está máximo o mínimo, o en cuáles cambia la tendencia de las ventas.

d. Establece algebraicamente, mediante la noción de derivada, los meses con máxima o mínima venta o de cambio de tendencia, y contrástalos con las soluciones gráficas.

e. Si el volumen de ventas siguiese igual, ¿se podría contar con más extremos o cambios de tendencia? Argumenta matemáticamente y comunica la respuesta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Elaboran expresiones algebraicas, utilizando la noción de razón de cambio en situaciones geométricas, científicas y económicas.			
Conjeturan sobre la razón instantánea del cambio en un punto.			
Verifican de forma algebraica la razón instantánea en un punto, basándose en los límites laterales.			
Explican el significado de la razón instantánea para contextos geométricos.			
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.			
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.			
Elaboran modelos, considerando condiciones iniciales diferentes.			
Comparan modelos y eligen el más adecuado para la situación dada.			
Representan la derivada como límites de pendiente de secantes.			
Conjeturan sobre la derivada de una función, utilizando las características de ambas.			
Describen una función y su derivada según sus características de comportamiento.			
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión, utilizando la derivada de funciones.			
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.			