

## Actividad 1: Describiendo el cambio por medio de la derivada

### PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden que la razón instantánea en un punto es el límite de una sucesión de razones medias. Trabajan con funciones y con expresiones indeterminadas (como cero dividido por cero), aprovechando las herramientas disponibles para aprender, visualizar y resolver problemas sobre funciones, y las expresiones relacionadas con el cero y el infinito. Relacionan la inexistencia de una tangente con la inexistencia de una razón instantánea de cambio, e investigan y practican en lo posible el experimento de Galileo Galilei de forma colaborativa.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA3.** Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

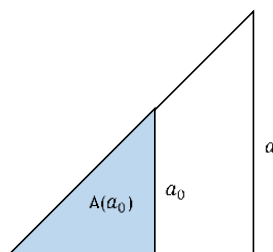
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

**Duración:** 18 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### ¿QUÉ SIGNIFICA LA RAZÓN DE CAMBIO EN UN CONTEXTO GEOMÉTRICO?

1. En la figura, tanto el triángulo sombreado inscrito como el triángulo blanco son triángulos rectángulos isósceles con un vértice común. El triángulo azul crece en dependencia del lado  $\alpha$ .

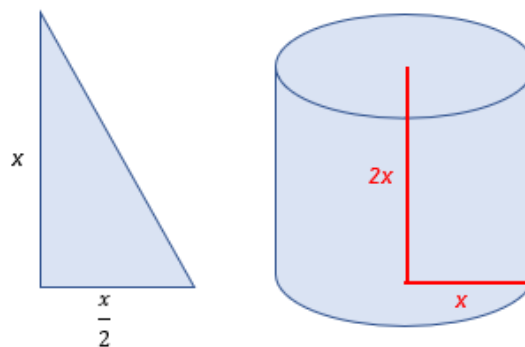


- ¿Qué relación tiene la expresión  $\frac{a^2 - a_0^2}{2(a - a_0)}$  con el triángulo? Describe la expresión  $\frac{a^2}{2}$  y luego las diferencias para terminar con toda la expresión; ¿qué significado le puedes dar a la fracción?
- Si se habla de cambio y de razón instantánea, ¿qué expresión representaría la razón entre el área del triángulo sombreado y el lado  $a$ ? Descríbela con tus propias palabras a un compañero.
- Se considera la razón instantánea en el instante  $a_0 = 2$ , ¿por qué no se la puede determinar valorando con  $a_0 = 2$  en la expresión algebraica?
- Completa la siguiente tabla para determinar la razón instantánea en el instante  $a_0 = 2$ .

$a$	1	1,5	1,9	1,99		2,01	2,1	2,5	3
$\frac{a^2 - 4}{2a - 4}$									

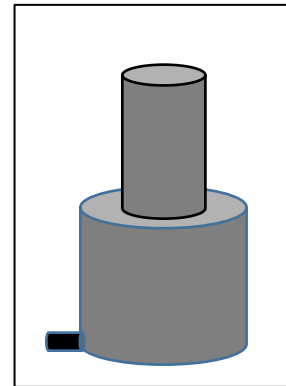
- ¿Qué ocurre con el límite en el punto  $a_0 = 2$ ? Argumenta tu respuesta utilizando cálculos, sin olvidar el contexto geométrico.
- ¿Qué significado tiene el límite en este contexto?

2. La imagen muestra un triángulo rectángulo y un cilindro recto.



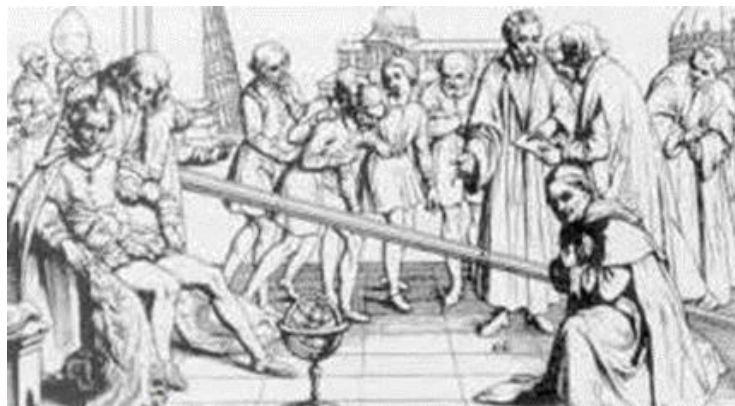
- Determina la expresión algebraica del área del triángulo rectángulo.
- Determina la expresión algebraica del volumen del cilindro recto y forma la función con respecto a la altura.
- Crea tu propio problema de razón de cambio para el caso de un cilindro; sombrea si es necesario.
- Elabora una tabla de datos donde tú mismo des los valores. Crea una lista de tus observaciones y compara con el ejercicio anterior.

3. La figura muestra dos recipientes cilíndricos compuestos, de los cuales el recipiente inferior tiene el doble del diámetro del recipiente superior. Se llena la combinación de los dos recipientes con un caudal constante de  $c = 314 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$ .
- Elabora la ecuación de la altura  $h$  de la superficie del agua en dependencia del tiempo  $t$  durante el proceso de llenado.
  - Conjetura acerca de la razón instantánea de la altura  $h$  en el momento  $t_0$  en el cual se empieza a llenar el recipiente superior.
  - Verifica o rechaza la conjetura mediante un procedimiento algebraico.
  - ¿Existe una tangente en el gráfico de la función de la altura  $h$  en el momento  $t_0$ ? Explica tu respuesta a un compañero.



### ¿CUÁL ES LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO Y EL DESPLAZAMIENTO DE UN OBJETO?

La imagen muestra la ilustración del famoso experimento de Galileo Galilei (1564-1642), en el que Galileo descubrió la relación entre el tiempo y el recorrido en el movimiento de una bola deslizándose hacia abajo en una viga inclinada.



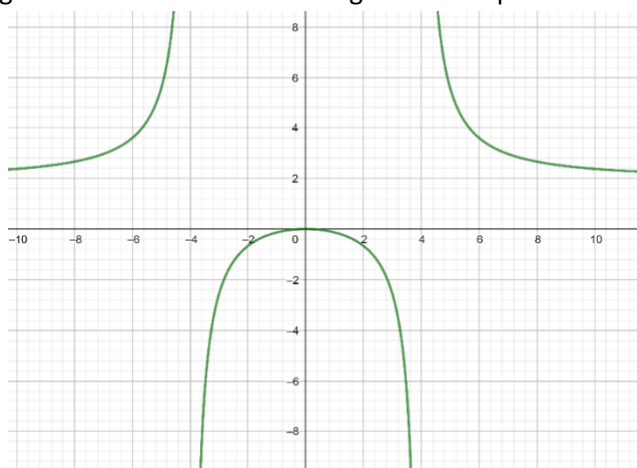
- Observa la imagen y descríbesele a un compañero.
  - ¿Qué piensas que están haciendo?
  - ¿Qué objetos están en juego?
  - ¿Qué relación podría tener con el tema de trabajo?
  - ¿Observas algún cambio? ¿Qué relación tiene con el experimento?
  - ¿Por qué la dependencia entre el recorrido  $d$  y el tiempo  $t$  se puede modelar con una función cuadrática?
  - Determina, con base en los resultados del experimento histórico, el parámetro  $k$  en la ecuación  $d(t) = k \cdot t^2$ .

2. Utilizando una calculadora y basándote en los resultados “ideales” con  $t$  y  $D$ , elabora una sucesión de velocidades promedio para los intervalos de tiempo  $[3,9; 4]$ ,  $[3,99; 4]$ ,  $[3,999; 4]$ ,  $[3,9999; 4]$  y  $[3,99999; 4]$ , acercándose al instante  $t = 4$  desde la izquierda. ¿A qué valor se acercan las velocidades medias?
3. Repite el procedimiento para las velocidades promedio en  $[4; 4,1]$ ,  $[4; 4,01]$ ,  $[4; 4,001]$ ,  $[4; 4,0001]$  y  $[4; 4,00001]$ , acercándose al instante desde la derecha. Comparando ambas sucesiones de las velocidades medias, ¿cuál sería el límite de ambas sucesiones?
4. Con el mismo procedimiento de aproximar la velocidad media con sucesiones de velocidades promedio, se obtiene para  $t = 2$  la velocidad instantánea de  $v(2) = 132 \left[ \frac{p}{u} \right]$ . Para  $t = 8$  se obtiene  $v(8) = 528 \left[ \frac{p}{u} \right]$ . ¿Con qué tipo de función, en dependencia de  $t$ , se puede modelar la velocidad instantánea de la bola?
  - a. Elabora una tabla con velocidades promedio y después, la ecuación de la función de la velocidad instantánea.
  - b. Comparando las ecuaciones de  $d(t)$  y de  $v(t)$ , ¿qué llama la atención, si se compara los exponentes y el parámetro  $k$  con factor proporcional de la velocidad instantánea?
  - c. Elabora el gráfico de la función del desplazamiento  $d$ . ¿Qué se representa gráficamente mediante las velocidades promedio y la velocidad instantánea?
  - d. ¿Qué representa gráficamente la función  $v$  de la velocidad instantánea?

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
ciudadanía.**  
OA c, d, 3° y 4° medio

### ¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE LA RAZÓN INSTANTÁNEA DE CAMBIO?

La imagen muestra el gráfico del cambio de una magnitud  $M$  dependiente del tiempo  $t$ .



- a. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es positiva.
- b. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es negativa.

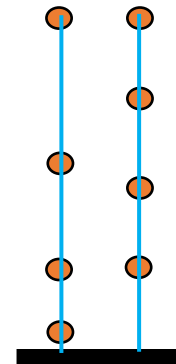
- c. ¿En qué instante la razón instantánea del cambio es 0?
- d. ¿En qué instante no existe una razón instantánea del cambio?
- e. ¿A qué valor se acerca la razón instantánea del cambio para  $t \rightarrow \infty$  o para  $t \rightarrow -\infty$ ?

### ¿TODOS LOS OBJETOS CAEN AL MISMO TIEMPO?

Si es posible, realiza este experimento con tu grupo de trabajo; para ello, lee las ideas de Galileo y consigue los materiales. Galileo consideró que su experimento con la viga inclinada se puede transformar en un experimento de la caída libre para el cual el ángulo de la inclinación de la viga se elevaría a  $90^\circ$ .

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
ciudadanía.**  
OA g, 3° y 4° medio

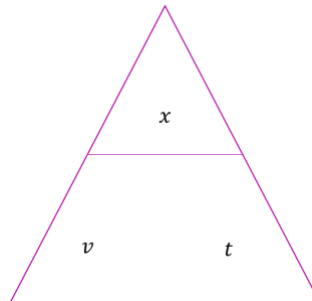
En el experimento se fijan cuatro tuercas en un hilo. Se sujeta el hilo sobre un molde de lata como suelo, de manera que el extremo libre del hilo toque el molde. En el primer hilo se fijan las tuercas a las siguientes distancias sobre el molde: 5cm, 20cm, 45cm y 80cm. En el segundo hilo se fijan las tuercas en forma equidistante de 20cm entre ellas.



- a. Conjetura sobre la ley que resulta con la viga en  $90^\circ$ . ¿Piensas que será la misma que en el caso de la viga inclinada? ¿Por qué?
- b. Para comenzar con el experimento, elabora una lista de materiales y organízate con tu grupo para distribuirse las tareas.
- c. Se suelta el primer hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?
- d. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.
- e. Se suelta el segundo hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?
- f. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre la velocidad. Algunos ejercicios pueden ser:
  - Describe la fórmula de la velocidad y explícale a tu compañero las variables que están involucradas.
  - ¿Cuál de las siguientes alternativas describe mejor la velocidad?
    - Mientras mayor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
    - Mientras menor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
    - Mientras mayor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
    - Mientras menor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
  - ¿Piensas que la velocidad es directa o inversamente proporcional al tiempo? ¿Qué relación hay entre la distancia y la velocidad?
  - Para resolver los ejercicios a continuación, utiliza el siguiente esquema (si quieres encontrar una de las variables, debes tapanla con tu mano y veras la operación que se debe realizar; por ejemplo: si deseas encontrar la distancia  $x$ , la tapas con tu mano y debajo queda la multiplicación de la velocidad por el tiempo  $v \cdot t$ ):



- Alondra anda en bicicleta una ruta de 5,2 km en 12 minutos. Para la misma ruta, Pablo necesita 14 minutos. Determina la velocidad promedio de Alondra y Pablo.
  - El señor Ovalle maneja de Curicó a San Fernando (68,8 km) con una velocidad promedio de  $65 \frac{km}{h}$ ; en cambio, el señor Bulnes lo hace con una velocidad promedio de  $82 \frac{km}{h}$ . ¿Cuánto tiempo necesitan ambos para recorrer la distancia entre ambas ciudades?
  - ¿Qué distancia puede recorrer Ana en 5 minutos si camina a una velocidad de  $12,7 \frac{km}{h}$ ?  
¿Qué velocidad puede lograr Emilio en 30 minutos si anda con su bicicleta a velocidad promedio de  $30 \frac{km}{h}$ ?
- ¿Qué entiendes por velocidad promedio? ¿Qué diferencias hay con la velocidad constante?
  - Da ejemplos de tu vida donde esté involucrada la velocidad y descríbelos a tu compañero lo mejor posible.

2. Se recomienda incluir una reflexión acerca de expresiones indeterminadas del tipo  $\frac{0}{0}$  para que constaten que hay que determinar la razón instantánea mediante un procedimiento infinitesimal de acercamiento. Para esto, se puede plantear ejercicios como:
  - a. Factorizar  $\frac{2x^2-2}{3x+3}$  y simplificarlo a la forma más reducida.
  - b. ¿Para qué valor de  $x$  se indefine la expresión algebraica  $\frac{x^3-x^2}{x^3+x^2}$ ?
3. Se sugiere hacer el experimento en clases y dejar que los estudiantes tomen sus propios datos. A partir de su experimento, pueden elaborar conjeturas y luego comparar con lo ocurrido históricamente. Para lograrlo, tienen que hacer un registro tabular de muchos datos y de repeticiones del experimento, y elaborar gráficos y ecuaciones de forma algebraica.
4. En la última actividad, hay que destacar que las mediciones de tiempo de precisión del siglo XVI no eran tan sofisticadas como hoy, así que cualquier indicio o ayuda tecnológica que los jóvenes puedan ofrecer y que sea de fácil acceso, beneficiará la medición del experimento.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio.
  - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
  - Identifican el cociente de la razón de cambio cuando es igual a cero, con un cambio en la función.
  - Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Artículo sobre el plano inclinado  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.br/pdf/rbef/v34n2/v34n2a08.pdf>
- Información sobre Galileo y el péndulo  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://cuantozombi.com/tag/plano-inclinado/>