Actividad 4: Comparación de la distribución binomial y la distribución normal

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden cómo se desarrolla la distribución binomial a partir de una representación esquemática como árbol de probabilidades, tabla de Galton y paseos al azar. Reconocen el significado de cada parte de la fórmula de Bernoulli y las diferencias entre la distribución binomial y la normal. Deben ser perseverantes y proactivos para encontrar explicaciones y fundamentar sus respuestas, ya sea formulando nuevos esquemas o evaluando las representaciones dadas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. Considera que la variable aleatoria es $X = k$ (sellos). Las siguientes representaciones muestran que hay solamente 1 camino para los extremos $X = 0$ y $X = 4$. Para $X = 1$ y $X = 3$ hay 4 caminos y para $X = 2$ hay 6 caminos.

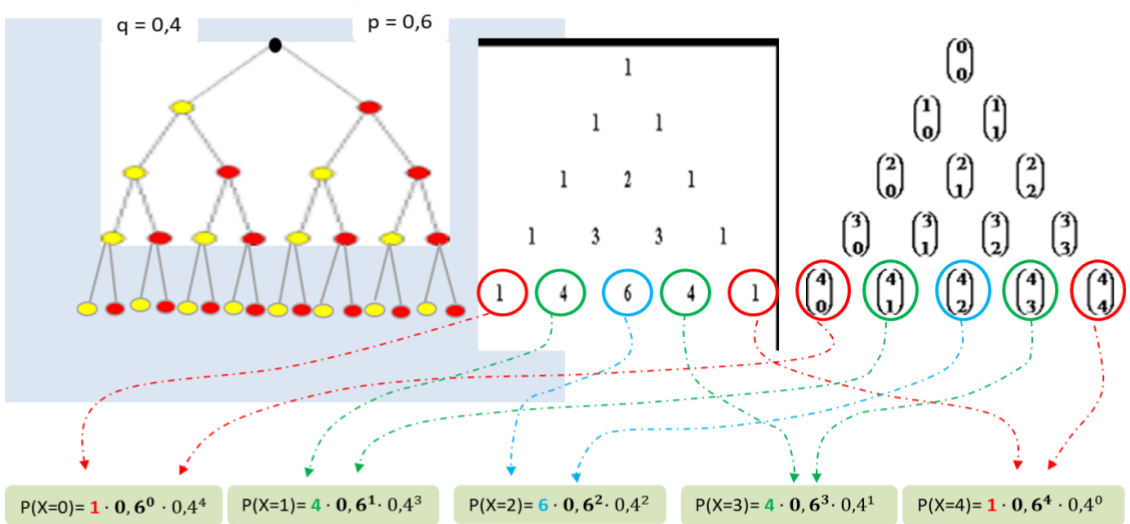

Fig. 1: Representaciones de una situación binomial con paseo al azar, triángulo de Pascal y coeficientes binomiales.

En general, las situaciones que se representa son con n repeticiones y se elige k, que puede ser caras -sellos, derecha -izquierda, éxitos-fracasos, sí-no u otras posibilidades binomiales.

a. Determina el número de caminos en los tres casos.
b. Identifica similitudes y diferencias en la forma de escribir las representaciones.
c. Comenta las tres representaciones con un compañero y explica cada una de ellas.
d. Explica la forma de encontrar $P(X = 3)$

2. Dicta a tu compañero la fórmula de Bernouilli: Para n repeticiones, con valor de la variable aleatoria $X = k$ y $q = 1 - p$, se determina como $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

a. Explica cada parte de la fórmula: $\binom{n}{k}$ (elección); p^k (posición); $(1-p)^{n-k}$(complemento).
b. ¿Qué pasa si consideras $p = 0{,}5$? ¿En qué casos se recomienda utilizar este valor?
c. Con $p = 0{,}5$, determina $P(X = k)$ para valores de n y k que elijas, y explica tu elección y experimento a tu compañero.

3. El siguiente esquema muestra cómo se puede aplicar la fórmula de Bernoulli en situaciones diarias o del ámbito laboral mediante las distribuciones normales.

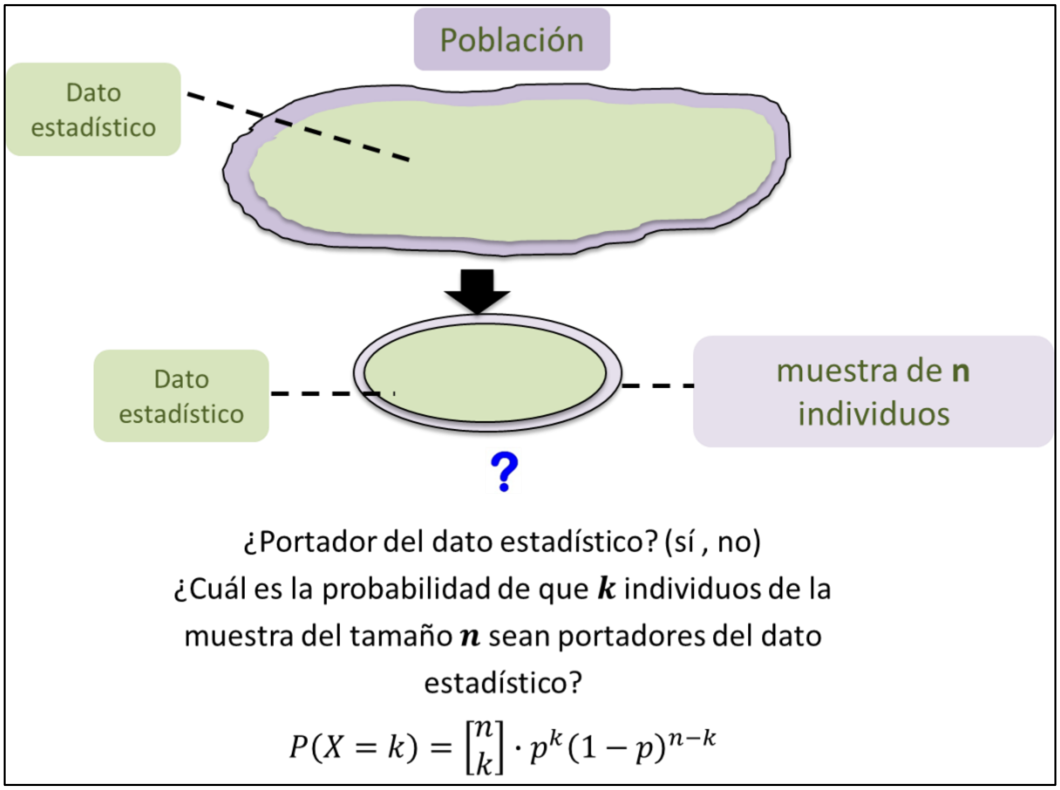

Fig. 2: Principio de situación de incerteza.

a. Explica a tu compañero lo que entiendes de este esquema.
b. Crea un ejemplo de pregunta que puedas responder utilizando este esquema, sin aplicar la fórmula.
c. Si es posible, encuentra datos confiables en la web, sobre la situación que propusiste para aplicar una vez la fórmula de Bernouilli y responder a una pregunta.

4. Discute con tus compañeros sobre las siguientes alternativas para la pregunta: ¿Cuál de los cinco histogramas corresponde a una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}5$?

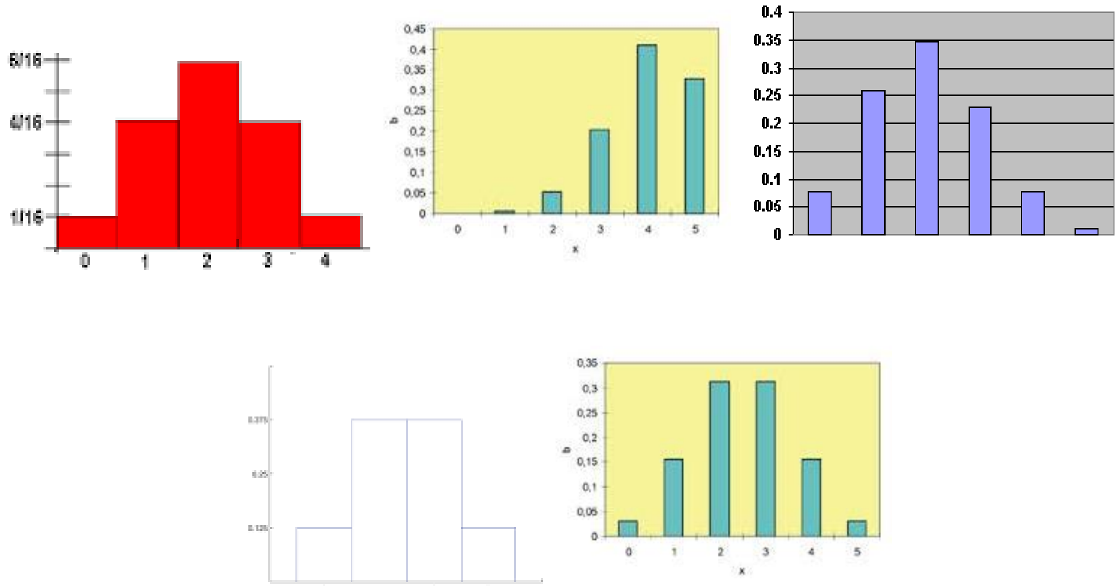

Fig. 3: Histogramas de distribuciones binomiales.

5. La siguiente es una situación binomial creada para efectos educativos: En el tranque de un piscicultor, el 40% de los peces no tiene la medida adecuada para venderlos. Con una red se puede sacar 6 peces. Se define una variable aleatoria X que representa el número de los peces que no tienen la medida adecuada. El histograma muestra la distribución de la variable aleatoria X.

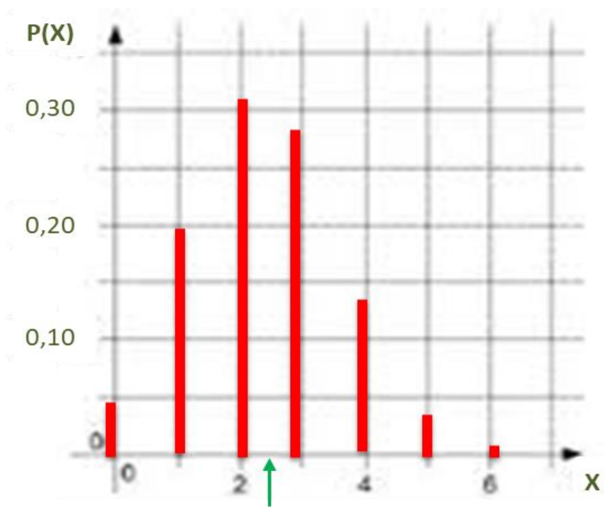

Fig. 4: Histograma del piscicultor

a. Explica cada uno de los siguientes cálculos:
   - $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4 = \mu$
   - $V(X) = n \cdot p \cdot q = 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1{,}44$
   - $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

b. Ubica en la flecha verde el valor que corresponde, ¿te imaginas que es una balanza? ¿Qué significa esa flecha/valor para los resultados?
c. Construye esquemas que te permitan responder las siguientes preguntas:
   – ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que $X = 4$?
   – ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que $X \leq 2$?
   – ¿Cómo te ayudó la fórmula de Bernouilli en este problema?
d. ¿Cómo interpretas estos resultados según el contexto del problema?
e. ¿Qué consejos le darías a un compañero para que pudiera comprender mejor tus soluciones?

6. Escribe un listado de las palabras clave que te permiten describir la distribución binomial.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. Clasifica las siguientes situaciones en variables continuas y discretas: número de días nublados, peso de recién nacidos, lluvia caída anualmente en una región, cantidad de portadores de daltonismo, números formados por un programa, la temperatura de agua en un lago.
   a. ¿Cómo identificas las variables continuas?
   b. Explica qué es una variable discreta a tu compañero, con un ejemplo diferente a los mostrados anteriormente.
   c. Identifica si las situaciones binomiales vistas antes son discretas o continuas y explica por qué lo son.

2. Observa las siguientes distribuciones binomiales.

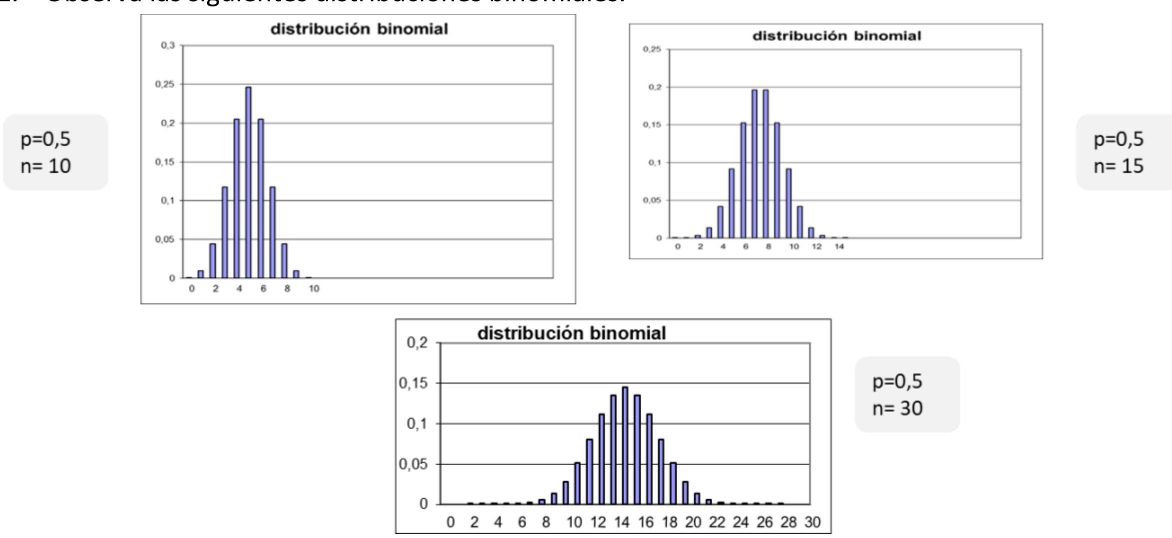

Fig. 5: Secuencia de histogramas binomiales simétricos que muestran el traslado de μ y el cambio de las alturas.

   a. ¿Qué sucede con el histograma cuando el n crece? Anota tu explicación en tu cuaderno y compara con lo que propone tu compañero.
   b. ¿Puedes hacer una relación entre la variable aleatoria y la discreta? ¿De qué forma?
   c. ¿Qué relación crees que hay entre el valor esperado, la desviación estándar y el promedio? Argumenta.

3. La siguiente situación considera datos reales, pero se creó con fines educativos. La estatura de párvulos de una generación está distribuida normalmente con el valor esperado $\mu = 90cm$ y la desviación estándar $\sigma = 8\ cm$. Responde las siguientes preguntas: ¿Cuál es el porcentaje de los párvulos que tienen una estatura de 87 cm como máximo? ¿Cuál es el porcentaje de los que tienen una estatura de 86 cm como mínimo y 96 cm como máximo?
   a. ¿Puedes responder estas preguntas con lo que aprendiste? Explica a tu compañero cómo se pueden contestar.
   b. ¿Qué conocimientos o fórmulas te sirven para responder?
   c. Explica cómo proceder en estos casos.
   d. ¿Por qué es tan importante hablar de máximos o mínimos?

4. Crea un listado con tus conocimientos sobre la distribución normal y compara con la distribución binomial.
5. En grupos, creen un afiche con gráficos y situaciones que muestren las diferencias entre la distribución normal y la binomial.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Imaginar que el valor esperado es justamente el valor que está en el centro de la balanza, permite estructurar los datos y hacer una relación esquemática con la desviación estándar como la que se muestra en la imagen:

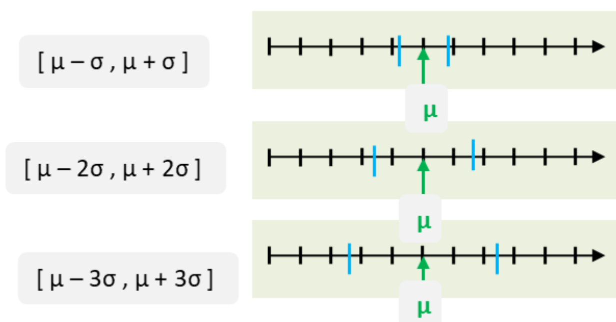

Fig. 6: Representación de los intervalos simétricos alrededor de μ con 1σ, 2σ y 3σ.

2. Se sugiere explicar el esquema de la Figura 2 junto con los jóvenes y mencionar que una situación binomial en la cual se conocen los datos poblacionales, se puede reflejar en una muestra de n individuos. Además, se puede saber cuál es la probabilidad de que k individuos dentro de esa muestra sean portadores del dato preguntado.
3. Se puede interpretar las representaciones de n repeticiones de un experimento aleatorio del tipo Bernoulli, como un paseo al azar con n bifurcaciones.
4. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Evalúan la pertinencia de usar modelos binomial o normal para interpretar situaciones de incerteza.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Modelo de balanza para el valor esperado
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://unamatematicaseltigre.blogspot.com/2012/10/que-es-un-valor-esperado-y-como-se.html