Actividad 3: El conjugado de un número complejo

PROPÓSITO

Se pretende introducir a los estudiantes al concepto de conjugado de un número complejo desde un punto de vista analítico y geométrico, comenzado desde el teorema de Pitágoras. Aplicarán adición, sustracción y multiplicación de números complejos, y los conceptos de conjugación de un número complejo y distancia en el plano euclidiano.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

DETERMINAR DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO

1. Dado el triángulo rectángulo *ABC*, cuyos catetos tienen longitud a y b, respectivamente, e hipotenusa c, entonces se cumple que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Busca un applet del teorema de Pitágoras que te permita analizar propiedades que se cumplen en un triángulo rectángulo cualquiera *ABC*.

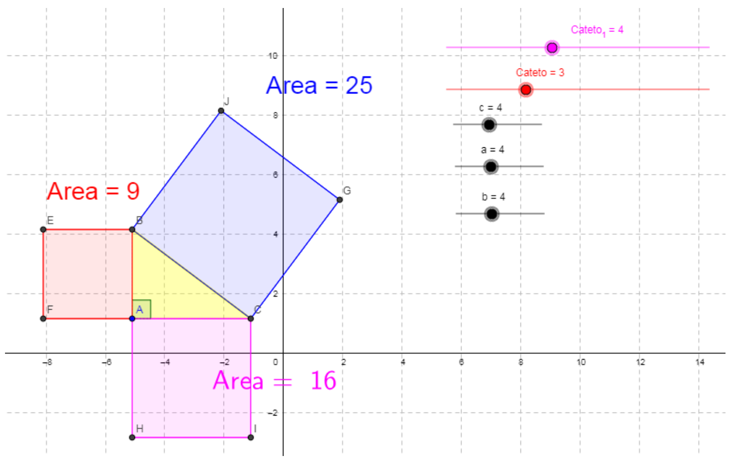

Fig. 1: Comprobación del teorema de Pitágoras.

¿Es correcto señalar que la suma del área de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa? Explica tu respuesta a un compañero, reconoce palabras similares cuando te expliquen y anota las diferencias con tu propia explicación.

2. Recurre a una herramienta digital que te permita aprender a calcular la distancia entre dos puntos en el plano y establecer la relación con el módulo de un número imaginario.

   a. Considera los puntos $P_1 = (0; 0)$ y $P_2 = (x; y)$ representados, ¿cómo podrías determinar la distancia del punto P_2 al origen el plano?

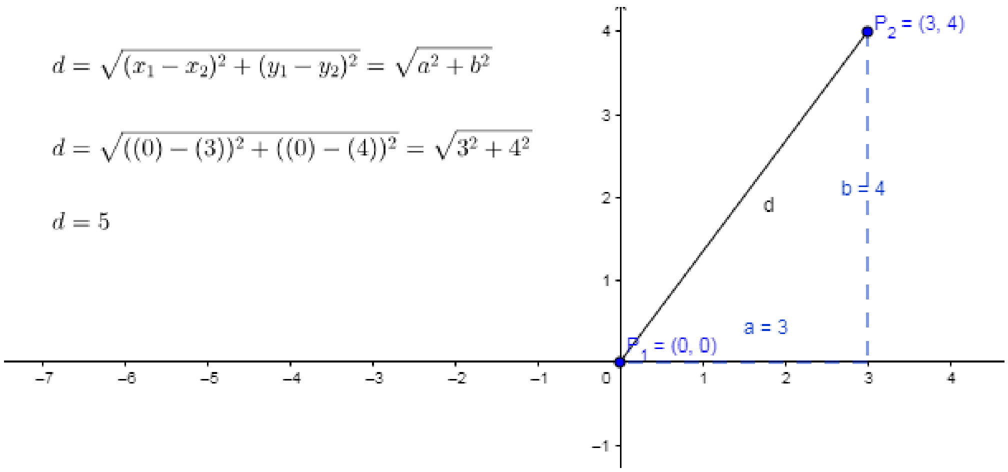

Fig. 2: Distancia de un punto al origen.

b. ¿Es correcto afirmar que el teorema de Pitágoras permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano?

c. Utiliza la fórmula presentada antes y reemplaza con los mismos valores que tu compañero, ¿ambos llegan a la misma solución? Compara y revisa dónde podrían estar las diferencias.

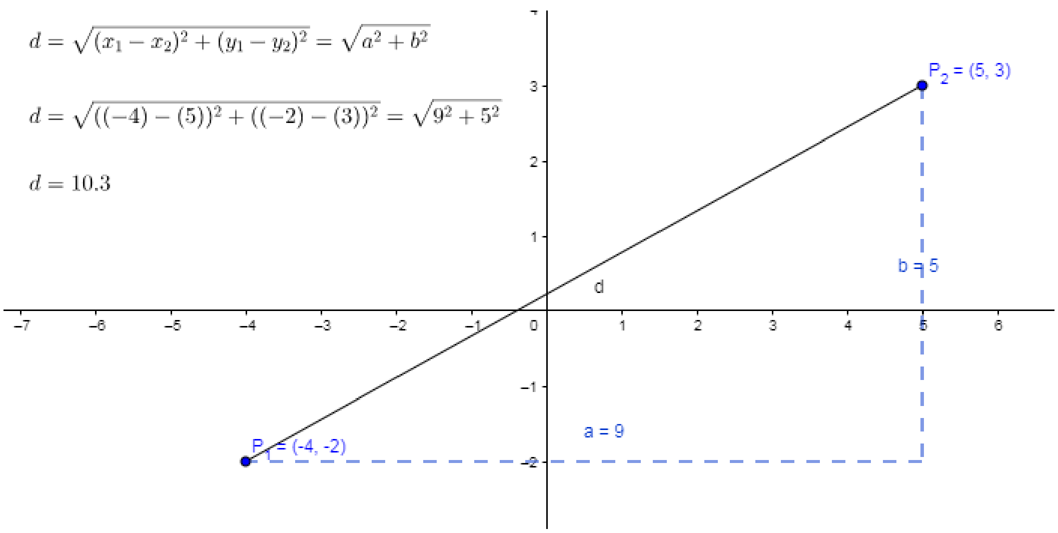

Fig. 3: Distancia entre dos puntos cualesquiera.

d. Si se aplica la distancia entre dos puntos cualesquiera para determinar el módulo de un vector (distancia de un punto cualesquiera al punto (0,0) en el plano), ¿es correcto afirmar que el módulo de un vector z corresponde a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$?

e. ¿Qué relación hay entre $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la multiplicación de z y $\bar{z}$? Justifica tu respuesta con el simulador GeoGebra.

MÓDULO DE NÚMEROS COMPLEJOS Y SUS PROPIEDADES

1. Sabiendo que para todo número complejo $z = (a,b)$, su módulo es $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$, ¿existe un número complejo cuyo módulo sea un número negativo o igual a cero? Justifica.
2. Sean $\boldsymbol{z_1 = 5 - 3i}$ y $\boldsymbol{z_2 = -4 + i}$. Determina $|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}|$ y también $|\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_2}|$, prueba con otros números complejos y plantea conjeturas con los resultados obtenidos. ¿Qué otras propiedades se podría establecer?
3. Sea $\boldsymbol{z = -8 + 6i}$.
   a. Represéntalo en el plano complejo.
   b. Si consideramos el eje *Y* y hacemos una reflexión del punto z, ¿a qué punto corresponde la reflexión axial del punto z?
   c. ¿Cuál es el conjugado de z?
   d. ¿Coincide con la reflexión axial anterior?
   e. ¿Toda reflexión axial con respecto al eje *X* lleva un número complejo en su conjugado?
   f. En el caso anterior, ¿qué sucede si el número se sitúa en el eje *Y*?
   g. ¿Cuántos números complejos hay que tengan el mismo módulo que z?

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. Elige un número complejo $z_1 = (a + bi)$ y multiplícalo por un número racional c. El número complejo resultante será $z_2 = (a + bi) \cdot c$. Por ejemplo: $z_1 = 2 + 3ic = 5z_2 = (2 + 3i) \cdot 5$.
   a. Representa el vector original z_1 y el vector resultante z_2 en el plano, utilizando GeoGebra.
   b. ¿Qué sucedió con el vector z_1 y con su módulo al ser multiplicado por $c = 5$?
   c. ¿Qué cambios sufrirá el vector de z_1 y su módulo al ser multiplicado por $c = -5$?
   d. ¿Qué valor de c deberías considerar para que el vector z_2 se contraiga en la misma dirección del vector original?
   e. ¿Qué valor de c deberías considerar para que el vector z_2 se contraiga en la dirección contraria al vector original?
   f. Plantea conjeturas al multiplicar el vector z_1 por distintos números racionales y verifícalas de forma manual o digital.
2. Dado el número complejo $\boldsymbol{z = a + bi}$ y su conjugado $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a - bi}$, representa en el plano complejo $\boldsymbol{z}$ y $\overline{\boldsymbol{z}}$; además, verifica (utilizando GeoGebra) que enviar $\boldsymbol{z}$ en $\overline{\boldsymbol{z}}$ equivale a hacer una reflexión respecto del eje *X*, y que enviar $\boldsymbol{z}$ en $\overline{\overline{\boldsymbol{z}}}$ representa una doble reflexión respecto del eje $\boldsymbol{X}$ y equivale a la función identidad.

3. Accede a un recurso applet que te permita tener dos números imaginarios z y w cualesquiera. Comprueba las siguientes propiedades de forma geométrica y luego de forma algebraica:

   a. $z \cdot w = w \cdot z$

   b. $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$

   c. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w}$

   d. $|z| = |\bar{z}|$

4. Se sabe que $|z| = |w|$ y que $z + w = 15$. Representa gráficamente la situación e indica la mayor información posible sobre los vectores z y w.

5. Accede al simulador GeoGebra, conjetura respecto de los siguientes casos de división de números imaginarios y justifica tus respuestas.

   a. ¿Qué resultado se obtiene al dividir un número complejo cualquiera por su conjugado?
   b. ¿Qué resultado se obtiene al dividir un número complejo cualquiera por un número real?
   c. ¿Qué resultado se obtiene al dividir un número complejo cualquiera por la unidad imaginaria?
   d. ¿Qué condiciones deben cumplir *a, b, c, d* para que, respectivamente:

      - $\frac{\boldsymbol{a+bi}}{\boldsymbol{c+di}}$ sea un número imaginario puro?
      - $\frac{\boldsymbol{a+bi}}{\boldsymbol{c+di}}$ sea un número real?

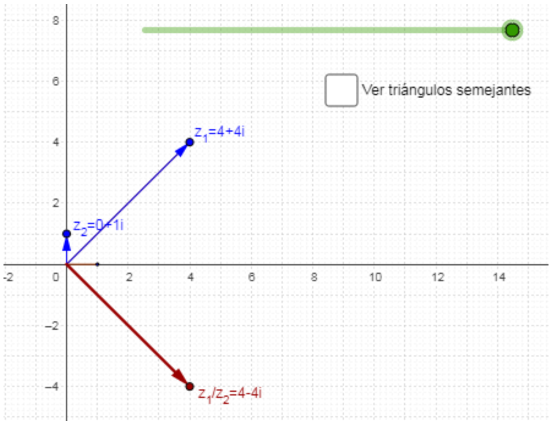

Fig. 4: División de números imaginarios.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Con las primeras actividades, se busca que los jóvenes asocien el teorema de Pitágoras con la definición de la distancia euclidiana y el módulo de un vector. A partir del módulo del vector, se espera que sigan explorando a un nivel de aritmética de números imaginarios.
2. Cuando realicen la actividad del conjugado de un número imaginario, deberían vincular la representación simbólica y la representación geométrica de la operatoria con números imaginarios.
3. Si multiplicamos los números imaginarios $z = x + yi$ y $w = x - yi$, se tiene:

$$z \cdot w = (x + yi)(x - yi) = x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2$$

Ya que $i^2 = -1$, el resultado de la multiplicación anterior es

$$z \cdot w = (x + yi)(x - yi)$$
$$= x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2.$$

4. Por ejemplo: para el complejo $12 + 5i$, su conjugado es $12 - 5i$. Gráficamente, se encuentran a lados opuestos del eje *X*.

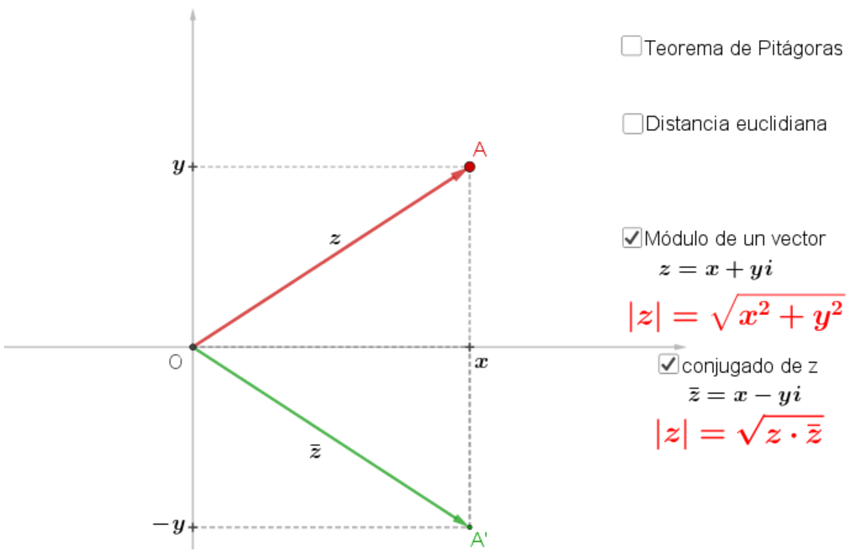

Fig. 4: Conjugado del número complejo *z*.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Determinan la distancia de números complejos de forma simbólica y pictórica.
   - Representan números complejos en el plano, relacionando con vectores e identificando las partes reales e imaginarias.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores y estudiantes:

- Multiplicación de números complejos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.wolframalpha.com/input/?i=complex+number+multiplication
- Applet de números complejos, opuesto y conjugado
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/Dj4Vvc2n
- Applet de multiplicación y división de números complejos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/PWufCgwF