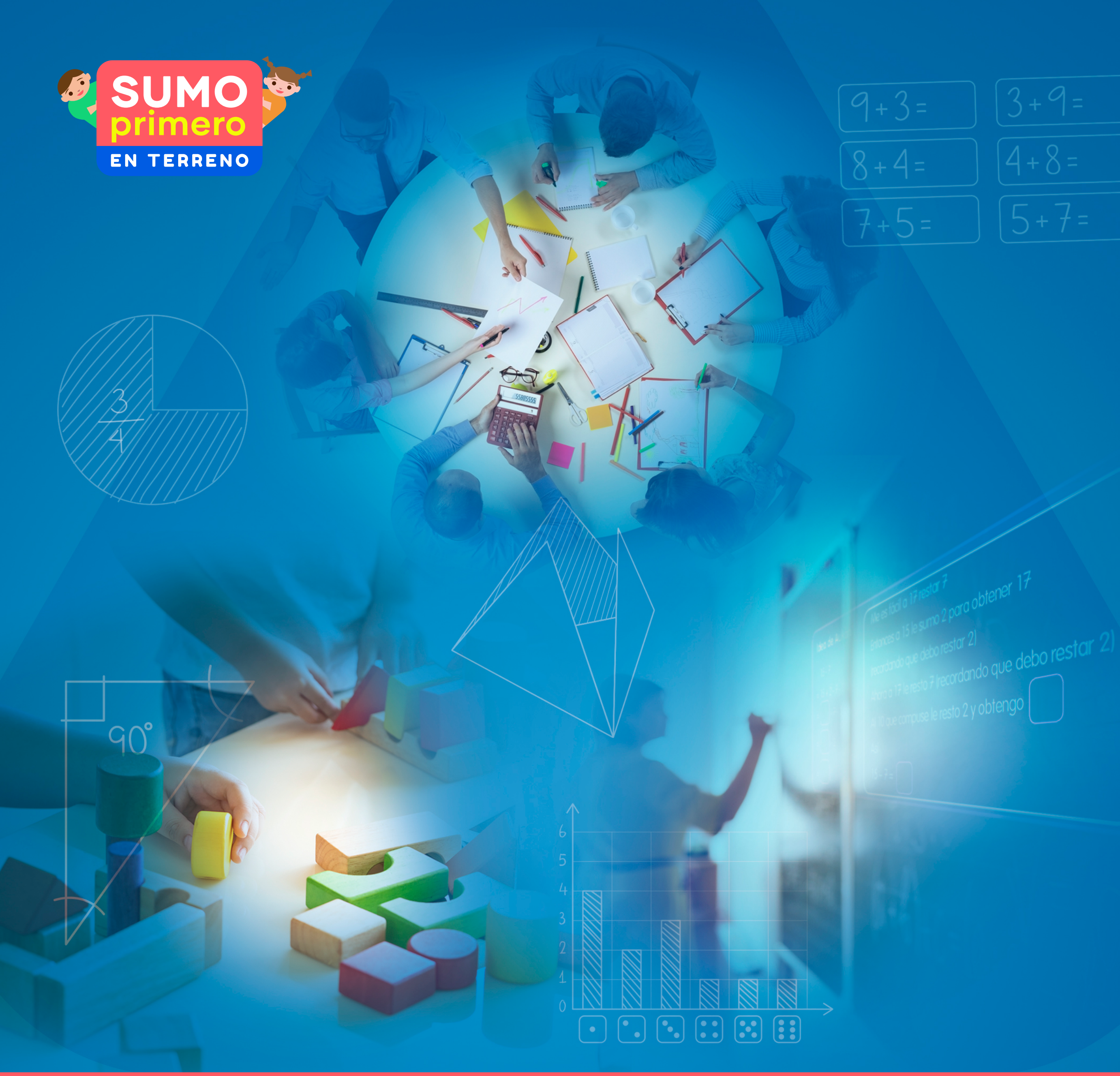
SUMO primero EN TERRENO



DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA:

UN APORTE A LA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES

TOMO I

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA: UN APORTE A LA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES
TOMO I

ANDREA PIZARRO-CANALES
CARLOS CAAMAÑO-ESPINOZA
Mª CAROLINA BRIEBA-BRIEBA
EDITORES

EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

AUTORES
Andrea Pizarro-Canales, Carlos Caamaño-Espinoza y Mª Carolina Brieba-Brieba (editores): Daniela Bonilla-Barraza, Carlos Caamaño-Espinoza, Cinthia Iglesias-Mancini, Sergio Morales, Rodolfo Morales-Merino, Andrea Pizarro-Canales, Nielka Rojas, Pedro Vidal-Szabó, 2021.

COMITÉ CIENTÍFICO INTERNACIONAL
Los capítulos del presente libro han sido evaluados por:
Vicenc Font – Universidad de Barcelona, España
Joaquim Giménez – Universidad de Barcelona, España
Joan Gómez – Universidad Politécnica de Cataluña, España
Alain Kuzniak – Universidad de Paris, Francia
Catherine Taveau – Universidad de Bordeaux, Francia

CORRECCIÓN DE ESCRITURA Y ESTILO
María Luz Morillo-Quesen

DISEÑO GRÁFICO
Carlos González y Rodrigo Ruiz

Colección: Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica
Directora de la Colección: Andrea Pizarro-Canales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

1ª Edición Digital: 2021
Registro de Propiedad Intelectual: 2021-A-6938
ISBN: 978-956-17-0949-2

Referenciar cada capítulo como:
Apellido, N., y Apellido, N. (2021). Nombre del capítulo. En A. Pizarro-Canales, C. Caamaño-Espinoza y M. C. Brieba-Brieba (Eds.), *Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Aportes a la Formación Continua de Profesores, Tomo I* (pp. señalar números de páginas). Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
https://www.euv.cl/archivos_pdf/DDM_1.pdf

Este libro se realizó en el marco del Programa Sumo Primero en Terreno, que es un proyecto financiado por el Ministerio de Educación de Chile en colaboración con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Ediciones Universitarias de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Calle 12 de Febrero 21, Valparaíso, Chile
Tel. (56-32) 227 3902
e-mail: euvsa@pucv.cl
www.euv.cl

HECHO EN CHILE

ÍNDICE

Presentación
Raimundo Larraín.......................................6

Prólogo
Michèle Artigue.......................................8

Capítulo I LA IMPORTANCIA DE LA TAREA MATEMÁTICA Y SU GESTIÓN EN EL AULA
Pedro Vidal-Szabó y Andrea Pizarro-Canales.......................................10

Capítulo II LA COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN ADITIVA: ESTRATEGIA DE CÁLCULO PARA LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN
Rodolfo Morales-Merino y Sergio Morales.......................................30

Capítulo III LA MULTIPLICACIÓN: PERSPECTIVAS DE ENSEÑANZA
Daniela Bonilla-Barraza y Nielka Rojas.......................................58

Capítulo IV LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN CENTRADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Daniela Bonilla-Barraza y Nielka Rojas.......................................80

Capítulo V LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS FORMAS 3D, DESDE PRIMERO A CUARTO BÁSICO, DESARROLLANDO HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN
Cinthia Iglesias-Mancini y Andrea Pizarro-Canales.......................................102

Capítulo VI ENSEÑAR Y APRENDER ESTADÍSTICA DESDE LOS PRIMEROS AÑOS DE ESCOLARIDAD
Pedro Vidal-Szabó.......................................130

Capítulo VII PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES DE UN PASO
Carlos Caamaño-Espinoza.......................................156

PRESENTACIÓN

En el marco del fortalecimiento de la educación pública chilena, el Ministerio de Educación busca promover la mejora de los aprendizajes escolares de los estudiantes, a través de diversas iniciativas y proyectos tendientes a desarrollar las capacidades docentes y directivas, que beneficien la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para la educación básica. Para ello, la División de Educación General de este Ministerio impulsó el desarrollo del programa Sumo Primero en Terreno en convenio con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Este Programa se inició en julio del año 2019, y brindó apoyo sistémico a establecimientos de todo el país, fortalecimiento las capacidades profesionales de sus docentes para la enseñanza de la matemática y ofreciendo oportunidades de aprendizaje matemático a 29.000 niños y niñas de primero a cuarto año básico.

Una de las actividades desarrolladas, fueron los talleres docentes, que se focalizaron en generar espacios profesionalizantes, aportando al desarrollo de capacidades docentes desde una mirada didáctica-matemática orientada el diseño y gestión de procesos de enseñanza y de aprendizaje efectivos. A partir de las reflexiones críticas y fundamentadas acerca de la enseñanza y el aprendizaje que surgieron de estos talleres, nacieron dos libros.

Estos libros tienen como propósito promover, desde la Didáctica de la Matemática, las capacidades requeridas en docentes del Primer Ciclo de Educación Básica, para planificar y gestionar los procesos de enseñanza y de aprendizaje adaptadas a las necesidades propias de la etapa inicial y orientar el desarrollo de las habilidades focalizadas en la resolución de tareas matemáticas por parte de los estudiantes.

Este primer libro de Didáctica de la Matemática que presentamos, se centra en el propósito formativo de la asignatura de matemática, que es "enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar" (MINEDUC, 2012, p. 86).

Junto con agradecer el compromiso y profesionalismo del equipo de especialistas en Didáctica de la Matemática que participaron en la elaboración de estos libros y a los destacados expertos internacionales que evaluaron su calidad y aporte a la formación inicial y continua de docentes, es un agrado para la División General de Educación del Ministerio de Educación poner a disposición de todos ustedes el Tomo I del libro Didáctica de la Matemática para Primer ciclo de Educación Básica: un aporte a la formación continua de profesores.

Esperamos que este recurso, fortalezca el desarrollo de la Didáctica de la Matemática en los docentes que se desempeñan en Primer Ciclo de Educación Básica, para mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Raimundo Larraín H.
Jefe de la División de Educación General
Ministerio de Educación de Chile

PRÓLOGO

Con gran placer e interés leí el primer volumen de los dos libros "Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Un aporte a la Formación Continua de Profesores". Durante mi estadía en Chile en marzo de 2020, justo antes de que nuestras sociedades y nuestros sistemas educativos se hayan visto alterados por la pandemia de Covid-19, Andrea Pizarro Canales me habló ampliamente sobre el Programa Sumo Primero en Terreno, en el cual ella se había comprometido. Me impresionó el alcance de este proyecto y los recursos invertidos para apoyar a profesores que trabajaban con estudiantes pertenecientes a las escuelas públicas de Chile, así como la energía desplegada por sus actores, y lo que ya habían logrado hasta esa época.

En un momento en el que todos estamos particularmente preocupados por el aumento de desigualdades educativas generadas por la pandemia, el anuncio de la publicación de estos dos libros me hizo muy feliz, porque se demostraba que la pandemia no había detenido el impulso de un programa, que ahora es incluso más necesario que en el momento en que comenzó.

Este libro, está dirigido a docentes de los primeros cuatro años de la escuela básica. Estos primeros años son fundamentales para el aprendizaje de los alumnos porque allí se asienta su relación con los números, la numeración y el cálculo, las conexiones entre conocimiento espacial y geométrico. Además, porque en ese período se puede iniciar el desarrollo de los pensamientos algebraico, funcional y estocástico, tan importantes hoy para poner las matemáticas al servicio de la comprensión del mundo y de la acción. En todos estos campos, la investigación didáctica no cesa de desarrollarse, trayendo conocimiento innegable. Desafortunadamente, todavía nutre insuficientemente la formación inicial y el desarrollo profesional de los docentes. Tornar útiles los conocimientos generados por la investigación por los profesores en su quehacer diario no es de ninguna manera fácil, y no es casualidad que acaba de crearse una nueva revista llamada *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*. Esta es, en particular, la ambición de estas dos obras, las cuales se apoyan en la experiencia adquirida durante los primeros 15 talleres realizados en las 198 escuelas participantes en este programa. El primer volumen consta de un primer capítulo que pone énfasis en la importancia de la elección de las tareas matemáticas y su gestión para el aprendizaje. Luego, seis capítulos son dedicados a un tema en particular: composición y descomposición aditiva y su función en el aprendizaje de la adición y sustracción, multiplicación, división y resolución de problemas, formas 3D y visualización, estadística y, finalmente, pensamiento algebraico en relación con la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Para cada uno de estos temas, los coautores han puesto énfasis sobre algunos puntos esenciales y los ilustran con tareas bien elegidas, la mayoría de las veces seleccionadas de los textos escolares. Estos puntos esenciales están relacionados con las progresiones curriculares y los conocimientos didácticos que los fundan son explicados claramente de una forma muy accesible a los docentes. En cada capítulo, se ofrece igualmente una sección que se ocupa particularmente de los principales errores y dificultades de los alumnos, los cuales han sido identificados por la investigación didáctica. Por tanto, cumple bien con las expectativas del desafío abordado.

No tengo ninguna duda de que el segundo volumen completará de manera útil los aportes del primero, y espero que estos libros logren la difusión que ameritan. Sabemos que una formación inicial del profesorado de alta calidad, junto a una formación continua que le permita, a lo largo de su vida profesional, aprovechar en sus prácticas los avances del conocimiento didáctico, son condiciones necesarias para mejorar la enseñanza y combatir las desigualdades educativas. Libros como este son especialmente útiles para lograr estos fines.

Michèle Artigue
Profesora Emérita
Université de Paris

La importancia de la tarea matemática y su gestión en el aula

PEDRO VIDAL-SZABÓ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

ANDREA PIZARRO-CANALES
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

El término didáctica hace referencia, no necesariamente a algo lúdico, sino más bien a una ciencia que estudia interacciones entre los componentes que son parte de un sistema didáctico, el cual es posible situar, por ejemplo, en una clase de matemática, cuya composición está dada por tres subsistemas: (1) el saber matemático, (2) personas en un rol de estudiante y (3) personas en un rol de docente.

Guy Brousseau —investigador, matemático y profesor francés— es uno de los impulsores de la Didáctica de la Matemática (DM) y fundador de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986, 1997, 2000, 2007; Brousseau y Warfield, 2014), trabajo que fue reconocido el año 2003 con la importante Medalla Félix Klein. Este investigador define DM como la ciencia de las condiciones específicas para la difusión del conocimiento matemático necesarias para las ocupaciones de los seres humanos.

En otras palabras, la DM estudia sistemas didácticos en los que se organiza la difusión del conocimiento matemático, siendo el aula un sistema didáctico estándar. Por tanto, las tareas son primordiales, no solo porque son parte del proceso de enseñar para aprender como actividad humana, sino también las tareas son importantes en el trabajo investigativo, pues otorgan fundamentos y evidencias de cómo pueden ir organizadas en una enseñanza para aprender ciertos fragmentos matemáticos específicos y funcionales en sociedad.

El presente capítulo aborda algunas ideas claves de la DM y se discuten análisis de tareas matemáticas y cómo estas pueden ser gestionadas en el aula.

FENÓMENOS DIDÁCTICOS

En el dominio de la DM, un fenómeno didáctico siempre tiene involucrados, al menos, el saber matemático, el que enseña y el que aprende, cada cual actuando como un subsistema en un cierto sistema que les engloba, por ejemplo, una clase de matemática contiene un contenido matemático específico que es el tratado por un enseñante para un conjunto de aprendices.

Existen fenómenos didácticos variados y tematizados. Por ejemplo, la Figura 1 muestra la típica fórmula para calcular el perímetro de un triángulo que, en ocasiones se enuncia que a, b y c representan números naturales no-nulos. No obstante, como a, b y c corresponden a las medidas de los lados de un triángulo, tienen condiciones para que efectivamente conformen un triángulo, esto es, la suma de las medidas de dos lados del triángulo debe ser mayor a la medida del tercer lado (propiedad conocida como desigualdad triangular). Lo anterior ilustra un fenómeno didáctico, el cual genera posibles pérdidas conceptuales de los objetos geométricos y sus representaciones dada una desvirtuación hacia objetos algebraicos, en el ejemplo de la Figura 1, pareciera que la obtención del perímetro como medida del contorno del triángulo se desvirtúa al cálculo de la suma **a + b + c**, relacionado con una algebrización de la geometría.

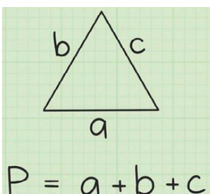


Figura 1. Fórmula del perímetro de un triángulo

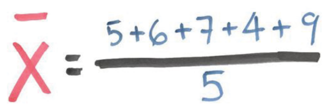


Figura 2. Procedimiento matemático para calcular el promedio

La Figura 2 muestra otro ejemplo en que se da un fenómeno didáctico conocido como aritmetización de la estadística, pues el cálculo de la media (o promedio) como medida de tendencia central de los datos se desvirtúa a la aplicación algorítmica de sumar cinco números (5+6+7+4+9) y luego dividir por cinco. Cabe preguntarse, ¿Los datos son números abstractos sin contexto? ¿Cómo interpretar la media de un conjunto de datos? ¿Dicha medida es representativa del conjunto de datos?, ¿Cuál es la unidad de medida de la media calculada? Estas preguntas dejan entrever, como sugiere Hawkins (1996) citado por Pfannkuch y Wild (2004), que una persona educada matemáticamente puede ser estadísticamente analfabeta.

Algunos fenómenos didácticos persisten desde el origen de un conocimiento matemático particular o transversal, los cuales se pueden manifestar en el aula como errores o dificultades (en la enseñanza y/o en el aprendizaje). Por ejemplo, en el ámbito numérico es habitual encontrar:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Esto da cuenta de que la suma de fracciones no es concebida como tal, sino que el resolutor trata de aplicar la suma de números naturales haciendo del resultado una suma errada de fracciones que aplica sumando numeradores (a+c) y denominadores (b+d). Esto fue estudiado por Brousseau (1983) como parte de un obstáculo mayor que guarda relación con la extensión de los sistemas numéricos, reportando que no siempre los errores son el producto de la ignorancia o de la inexactitud, marcando un precedente importante para la investigación en DM como se puede ver con detalles en Schneider (2014).

Reconocer fenómenos didácticos como los anteriores, puede permitir a los docentes tener mayores oportunidades para anticiparse durante el diseño de enseñanza a posibles dificultades, errores u obstáculos durante el aprendizaje de algún contenido matemático o estadístico, ante lo cual se podrían diseñar e implementar algunas estrategias para ayudar a los estudiantes a superarlos, ya que, a veces, son persistentes durante el proceso formativo.

Notar que también pueden existir fenómenos didácticos singulares en que, por ejemplo, dada una construcción cognitiva original e innovadora de algún concepto matemático en una persona, resulte ser facilitadora para el aprendizaje y, por ende, puede convertirse en un modelo de enseñanza para tratar ese mismo concepto matemático con personas que lo aprenden, dando más acceso a su adquisición.

LA TAREA MATEMÁTICA

En el contexto de la DM, Sierpinska (2004) revisa la noción de tarea matemática, definiéndola de la siguiente manera:

> En un sentido amplio del término, [la tarea matemática es usada] para referirse a cualquier problema de matemática que tenga las hipótesis y preguntas claramente formuladas, y que los estudiantes pueden resolver en un tiempo que se puede prever (Sierpinska, 2004, p. 10).

Nechache (2017) y Pizarro (2018), adaptan teóricamente dicha definición e indican que la tarea matemática es todo ejercicio, problema o pregunta realizada en un tiempo limitado en un contexto dado, siendo expresada de manera oral o escrita y que se configura a través de un verbo que señala el trabajo matemático a realizar, dicho verbo en el sentido de Chevallard (1999) es el género de tareas, por ejemplo, calcular, sumar, promediar, transformar, construir, medir, entre otros.

Es fundamental la tarea tanto en la DM como en la enseñanza porque permite poner en funcionamiento el trabajo matemático de los estudiantes en un espacio organizado e intencionado, bajo cierto contexto educativo. Una enseñanza puede traducirse como un conjunto de tareas que centran a los estudiantes en un tema matemático determinado y que pueden abarcar desde ejercicios rutinarios hasta problemas desafiantes. A veces pueden hallarse tareas matemáticas que son algorítmicas[1], en el sentido que el aprendizaje pasa por la memorización repetitiva de un conjunto de procedimientos que se convierten, inclusive, en una concepción exclusiva de enseñanza de la matemática, siendo esto contraproducente para una educación matemática del siglo presente.

No obstante, varios estudios respaldan el aprendizaje matemático como un proceso de participación activa por parte del estudiante, con el fin de construir su propio conocimiento matemático anclado a sus experiencias personales, retroalimentaciones por parte de sus pares y docentes, de otras personas en general y de sí mismos, vía autorreflexión y/o metacognición de los procesos relacionados al aprender matemática[2].

1 El término algoritmo posiblemente proviene del nombre de Al-Juarismi, matemático árabe que describió cómo resolver ecuaciones en su publicación Compendio de Cálculo por Reintegración y Comparación en el año 825 de la era común aproximadamente y se define algoritmo como un conjunto de instrucciones paso a paso en orden lógico que permite realizar una tarea determinada (Thomas, 2014).

2 Ver tanto estudios del ámbito de la educación matemática (p.e., Donovan y Bransford, 2005; Lester, 2007) como investigaciones del área de las ciencias de la cognición (p.e., Mayer, 1992, 2002).

Existe una tipología de tareas matemáticas que particionan el conjunto de tareas en simples, estándares y robustas (Nechache, 2017), a saber:

Las tareas simples. Poseen un nivel de exigencia débil, su resolución exige en el enunciado de la tarea explícitamente el uso de conocimientos y procedimientos ya memorizados por el sujeto resolutor.

Las tareas estándares. Son de un nivel de exigencia medio, su resolución requiere identificar y aplicar conocimientos o técnicas conocidas y útiles, que están indicadas implícitamente en el enunciado.

Las tareas robustas. Son de alto nivel de exigencia, su resolución requiere de conocimientos y técnicas de resolución que no necesariamente están aprendidas y que no están disponibles en una enseñanza ni en una persona particular.

Hay que tener en consideración que no todas las tareas matemáticas ofrecen las mismas oportunidades de aprendizaje y desarrollo del razonamiento matemático. Con ello, no se concluye que las tareas simples deben evitarse, por el contrario, deben potenciarse, aunque se espera que no solo sean de este tipo, sino que también sean consideradas las tareas estándares, inclusive, las tareas robustas porque estas últimas son poco comunes y ofrecen oportunidades de aprendizaje que contemplan el desarrollo de habilidades matemáticas de orden superior.

Las tareas provocan una alta o baja demanda cognitiva por parte de quien resuelve, lo que repercute en el desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, Stigler y Hiebert (2004) reportan que en la medida que las exigencias cognitivas son altas para una tarea matemática, generalmente resulta complicada su implementación correcta, lo cual produce que los docentes conviertan dichas tareas en otras similares y con menos exigencia durante la enseñanza que lleva a cabo.

Las caracterizaciones de tareas, según niveles de demanda cognitiva (o bien, niveles de exigencia para quien resuelve), fueron determinados por Smith y Stein (1998) citados por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2015); más adelante, NCTM (siglas en inglés, The **N**ational **C**ouncil of **T**eachers of **M**athematics). A continuación, se abordan sus definiciones y se ejemplifica.

TAREAS DE MEMORIZACIÓN QUE INVOLUCRAN EXIGENCIAS DE BAJO NIVEL

Incluyen la reproducción memorística de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. Además, no se pueden resolver mediante procedimientos, ya que no existen o porque el tiempo asignado para completar la tarea es muy breve para realizarlo. Son tareas matemáticas precisas e involucran la réplica exacta de lo visto con antelación, donde aquello que se ha de imitar se establece con claridad y de manera directa. Por otro lado, no se entabla relación con los conceptos o el significado subyacente a hechos, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Un ejemplo típico es preguntar como tarea simple: ¿Cómo compruebas que la sustracción que hiciste está correcta? Para la cual, se espera que los estudiantes digan memorísticamente que se suma el sustraendo con la diferencia (resultado de la resta) y si es igual al minuendo, entonces la resta está bien hecha. Análogamente, para comprobar que un resultado a partir de la adición es correcto, se esperaría que el estudiante señale: al resultado de la adición, le resto uno de los dos sumados y debe dar como resultado el otro sumando.

TAREAS DE PROCEDIMIENTOS SIN CONEXIONES QUE INVOLUCRAN EXIGENCIAS DE BAJO NIVEL

Estas son algorítmicas, pues usan el procedimiento que se requiere de manera específica o que es evidente a partir de instrucciones, de experiencias o de la asignación de tareas previamente establecidas. Asimismo, requieren una exigencia cognitiva limitada para su exitosa consumación y hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita llevar a cabo y sobre cómo hacerlas. Son tareas matemáticas que se enfocan en generar respuestas correctas, en lugar de desarrollar la comprensión matemática y no requieren explicaciones o éstas se centran solamente en la descripción del procedimiento utilizado.

Por ejemplo, la Figura 3 considera una tarea matemática con procedimientos sin conexiones, pues remite a que los estudiantes calculen adiciones y sustracciones posiblemente a través de algoritmos aprendidos con anterioridad. Esta tarea puede ser simple o estándar, dependiendo de la experiencia formativa de los estudiantes.

3 Calcula las adiciones y sustracciones

1 502 + 205	2 189 + 442	3 422 + 91	4 215 + 485
5 768 - 534	6 329 - 173	7 363 - 114	8 510 - 176

Figura 3. Tarea matemática de procedimientos sin conexiones (Isoda y estrella, 2020, p. 12)

TAREAS DE PROCEDIMIENTOS CON CONEXIONES QUE INVOLUCRAN EXIGENCIAS DE ALTO NIVEL

Estas tareas matemáticas se enfocan en procedimientos con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas. Sugiere seguir caminos implícitos o explícitos, procedimientos muy generales que tienen estrechas relaciones con ideas conceptuales subyacentes, en contraposición con los limitados algoritmos que son poco claros, respecto de los conceptos subyacentes. Estas tareas matemáticas suelen representarse de varias maneras (por ejemplo, diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados) para llevar a cabo conexiones que permiten desarrollar significado entre los significantes (representaciones), por lo que necesitan cierto grado de esfuerzo cognitivo por parte de los estudiantes, aunque pueden seguir procedimientos generales, pero de manera reflexiva. Los estudiantes requieren involucrarse con ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos con el objeto de finalizar la tarea con éxito y desarrollar su comprensión.

Por ejemplo, en la Figura 4 se tiene una tarea matemática que involucra procedimientos con conexiones porque mediante la comparación de problemas, se pretende que el estudiante conecte la adición con la sustracción, en tanto poseen una relación de reversibilidad. Esta tarea se considera más estándar que robusta, aunque depende de la experiencia formativa de los estudiantes.

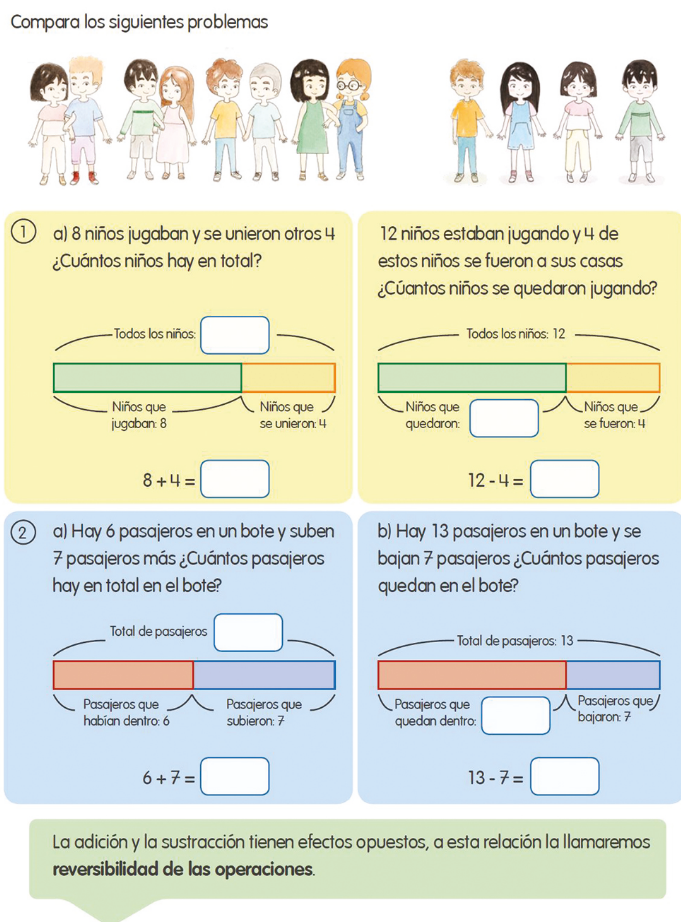


Figura 4. Tarea matemática de procedimientos con conexiones (Isoda y Estrella, 2020b, p. 25)

TAREAS DE CONSTRUCCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS QUE INVOLUCRAN EXIGENCIAS DE ALTO NIVEL

Estas requieren un pensamiento complejo y no algorítmico porque la tarea, en tanto instrucciones o un ejemplo resuelto, no sugieren en forma explícita un enfoque o camino predecible. Estas tareas demandan que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como los procesos o relaciones que subyacen. También, requieren la autoverificación o la autorregulación de los procesos cognitivos de los propios estudiantes. Estas tareas necesitan que los estudiantes tengan acceso al conocimiento o experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de ambas al estar trabajando en la tarea. Exigen que los estudiantes analicen la tarea y examinen de manera activa las restricciones que pudieran limitar las posibles estrategias de solución y las mismas soluciones. Por último, estas tareas matemáticas requieren un esfuerzo cognitivo significativo y pudieran entrañar un nivel de ansiedad para los estudiantes, debido a la naturaleza impredecible de los procesos de solución necesarios.

Un ejemplo de tarea matemática que se puede dar, en este último nivel, es pensar cómo predecir la siguiente situación temporal como tarea matemática: si hoy es martes, ¿Qué día será en 25 días más? Como los estudiantes tienen experiencia, respecto a lo cíclico de los días de la semana —esto es, que cada 7 días se vuelve a repetir el día de hoy— puede ser útil para construir matemática, en tanto, los estudiantes pueden examinar sus estrategias y limitaciones representacionales y/o argumentativas por medio de la exploración del concepto matemático en cuestión (noción de división). Por ejemplo, en la situación presentada, si pasan 7, 14 o 21 días vuelve a ser martes (vuelve al día de hoy, el día 0), y los días que restan que son 4, entonces será sábado desde el martes. Relacionar la cantidad de días, en un ciclo de 7, permite que los estudiantes puedan matematizar y, además, inventar en este contexto problemas similares pensando más hacia el futuro, o bien, incluso hacia el pasado sabiendo que día es hoy como información inicial necesaria.

En general, las tareas de baja demanda cognitiva (memorísticas y de procedimientos sin conexiones) pueden ser *tareas simples o estándares*, mientras que las tareas de alta demanda cognitiva (de procedimientos con conexiones y las de construcción matemática) pueden ser *tareas estándares o robustas*, cuya distinción radica y es relativa a la experiencia formativa de los estudiantes.

ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

A pesar que existen varias recomendaciones para implementar enseñanzas más eficaces para un aprendizaje matemático pertinente al siglo XXI; muchas madres, padres y apoderados, incluso, algunos docentes creen que deben enseñar como a ellos le enseñaron. Por ejemplo, a través de memorizar hechos, fórmulas y procedimientos sin conexiones con el fin de practicar estas habilidades una y otra vez. Tal como lo reportan Sam y Ernest (2000), un público adulto consideró que la matemática era un tema difícil mayormente, pero también desafiante, o bien, aburrido. Es más, dentro de sus resultados destacan que la mayoría de las respuestas dadas reflejaron sentimientos y actitudes hacia la matemática, lo cual sugiere que el término "matemática" desencadenó una reacción afectiva que posiblemente se explica por un estrecho vínculo entre la matemática aprendida y sus propias experiencias de aprendizaje con la matemática, como se puede visualizar en la nube de términos en la Figura 5.

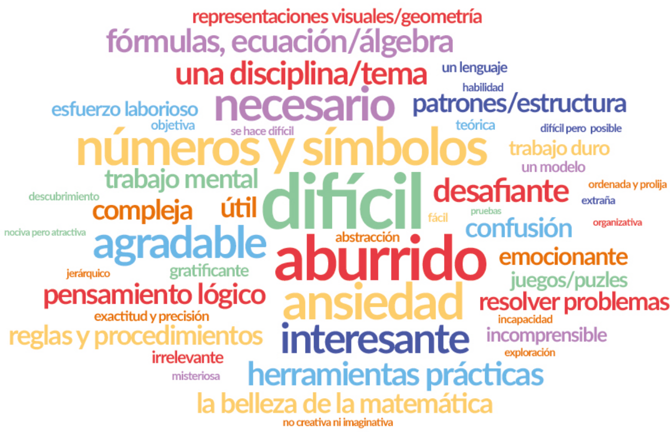


Figura 5. Imágenes sobre la matemática, basado en Sam y Ernest (2000, p. 202).

Las creencias que se desprenden de las imágenes sobre la matemática, en algunos casos, hace que los aspectos tradicionales de una clase de matemática persistan inalterados de cierto modo, dando énfasis a las actividades de repaso, reproducción de procedimientos y presentación de algunas demostraciones (Weiss y Pasley, 2004), lo cual es posible relacionar al contrato didáctico[3] referidos a los roles que han de cumplir tanto el docente como el estudiante en el ideario social de una clase de matemática, bajo algún modelo de enseñanza (esperable) para el aprendizaje de la matemática escolar.

3 Para más detalles sobre el contrato didáctico, consultar Brousseau, Sarrazy y Novotná (2014).

ASPECTOS A CONSIDERAR PARA UNA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EFECTIVA

Una práctica de enseñanza matemática eficaz debe considerar que los estudiantes se sientan involucrados en la resolución de tareas matemáticas para dar cabida al razonamiento en virtud de múltiples formas de abordaje de un problema y diversas estrategias para revolver. Dado ello, una de las funciones del docente que enseña matemática es dar acceso al discurso matemático por medio de diálogos entre estudiantes para que el curso (comunidad que aprende) se impulse hacia una comprensión común en la medida que se progresa, tomando errores y dificultades como oportunidades de aprendizaje que pueden llegar a ser significativos.

En tanto, los estudiantes al resolver con sentido las tareas matemáticas propuestas por el docente, se espera que utilicen diversas estrategias y representaciones, que emerjan soluciones justificadas, que se entablen conexiones en contextos cercanos para los estudiantes, teniendo en cuenta conocimientos previos y razonamientos de los demás integrantes de la clase para refutar o reforzar los propios razonamientos.

Por su parte, las nociones matemáticas son vistas en la escuela como contenidos que se organizan en objetivos de aprendizaje, denominados OA (Ministerio de Educación de Chile, 2012). De esta manera, los aprendizajes esperados en los distintos tramos de la trayectoria escolar de niñas y niños que aprenden formalmente, dependerán en gran medida de los contextos institucionales que le permean sistémicamente. Aunque también los aprendizajes esperados pueden desarrollarse o llevarse a cabo en otros contextos educativos no-formales, por ejemplo, instancias de juego entre pares, momentos e historias familiares, experiencias personales en un viaje, entre otros. Por lo tanto, realizar una enseñanza efectiva de la matemática requiere de diseño, adaptación o selección de alguna tarea matemática, por parte del docente, para generar las condiciones de una clase con altos logros de la meta[4] propuesta. La gestión y regulación de la tarea son aspectos claves para tal propósito, y para lo cual se hace imprescindible traer los contextos de interés de los estudiantes vinculados a algún fragmento matemático como objeto del saber a enseñar y transformarlo en un objeto del saber enseñado para llegar a ser un objeto del saber aprendido de niñas y niños.

El currículo para la asignatura de matemática en educación básica entrega orientaciones para la enseñanza a través de los programas de estudio, en que los objetivos propuestos suponen aprendizajes a lograr que se organizan y se pretenden alcanzar por año escolar, acompañado de indicadores de logro que permiten evaluar dichos aprendizajes.

4 El término “meta” se referirá al objetivo de la clase en particular, para efectos de este capítulo.

De este modo, es función del docente realizar una adaptación pertinente a la realidad educativa donde trabaja desde el contenido matemático prescrito en el currículo (objetos del saber a enseñar) hacia el conocimiento matemático que promueve con una o más tareas matemáticas (objetos del saber enseñado) y que finalmente devienen en un conocimiento aprendido por parte de los estudiantes partícipes de la enseñanza (objetos del saber aprendido), lo cual es parte del proceso de transposición didáctica en el sentido de Chevallard y Bosh (2014). Dicha transformación requiere de un análisis que responda al qué y al cómo se enseñará un contenido para que un curso determinado aprenda, salvaguardando sus características etarias, socioculturales y otros factores que atañen al momento de diseñar e implementar secuencias que se componen de una concatenación de tareas matemáticas, progresivas en su nivel de complejidad y coherentes entre sí de acuerdo con el concepto matemático que abordan, activando espacios de trabajo para aprender de forma significativa. Este espacio puede estar dado bajo un proyecto organizado para hacer que los estudiantes se apropien de alguna pieza de conocimiento matemático de referencia, lo que se rotula como situación didáctica según Brousseau y Warfield (2014).

La Teoría de Situaciones Didácticas tiene como hipótesis de trabajo que todo concepto matemático es la solución de, al menos, un sistema específico de condiciones matemáticas que, a su vez, puede ser interpretado por, al menos, una situación (Brousseau y Warfield, 2014). En consecuencia, la tarea matemática es fundamental porque permite poner en acción el trabajo matemático de las personas en un espacio determinado. En otras palabras, crear una instancia de aprendizaje en que el estudiante ponga en juego sus conocimientos, habilidades y actitudes en función de un problema matemático que toma la responsabilidad de resolver.

Notar que también el análisis de una tarea matemática es doble para un docente, porque se debe tomar en cuenta las exigencias propias de la matemática relacionadas con el diseño de la tarea y también se debe considerar la respectiva resolución con distintos niveles de experticia, inclusive, posibles errores o dificultades que pueden darse, con el propósito formativo de anticiparse durante la enseñanza y generar devoluciones adecuadas a los estudiantes. Una devolución es una situación que contiene al proceso por el cual el docente se las arregla en una situación didáctica para disponer al estudiante nuevamente en la situación matemática, haciendo que vuelva a interactuar con el medio didáctico por el cual aprende de forma intencional que involucra materiales de aprendizaje, conjeturas e ideas que permiten formular o validar una resolución, entre otros aspectos. Así, se debe lograr que el estudiante produzca y justifique sólo por los requerimientos del medio didáctico y sus propios conocimientos, evitando la influencia de la interpretación de los procedimientos didácticos del docente.

Para el docente la devolución considera: (1) proponer al estudiante una situación que debe dar cabida a una actividad no acordada y (2) hacer que el estudiante se sienta, por un lado, responsable de la obtención del resultado propuesto (pero no es culpable en caso de fracaso) y, por otro lado, que acepte la idea de que la solución depende únicamente del ejercicio de los conocimientos que ya posee (Brousseau, 1986, 1997, 2000, 2007). Las dos intervenciones didácticas del docente sobre la interacción "estudiante-medio-conocimiento", son de vital importancia para generar aprendizajes y así institucionalizarlos como saber matemático a partir de los conocimientos emergentes durante la situación didáctica.

El análisis de la tarea matemática es relevante, ya que necesita que el docente tome conciencia del rol que tiene durante la selección y/o diseño de secuencias coherentes de tareas matemáticas para el logro de metas de clases y, además, pueda anticiparse y revisar reflexivamente los aprendizajes que se obtienen con cada tarea que se implementa. Esta gestión está en el centro del quehacer docente e involucra, al menos, una tarea que potencialmente desarrolle habilidades matemáticas y que efectivamente asegure lograr los aprendizajes comprometidos.

GESTIÓN DE LA TAREA MATEMÁTICA

Para realizar una enseñanza matemática efectiva y acrecentar las oportunidades de aprendizaje, uno de los factores es el diseño, adaptación o selección de tareas matemáticas que puede realizar el docente para así responder al logro de la meta de una clase, vinculada a cierto(s) OA de las Bases Curriculares (MINEDUC, 2012). No obstante, hay tres escenarios de aprendizaje posibles producto de la enseñanza, según Mayer (2000):

El no-aprendizaje. Es el resultado de una (no-)enseñanza que puede ser esencialmente caracterizado como uno sin aprendizajes, dado que el estudiante no posee ni es capaz de usar el conocimiento pertinente frente a una situación que involucra matemática, tampoco es capaz de recordar la mayoría de los términos claves ni significados propios del tema matemático en cuestión.

El aprendizaje de memoria. Es el resultado de una enseñanza que se basa en el repaso de materiales e información, la cual potencia memorizar términos claves y significados de cierto tema matemático, esto es, el estudiante ha captado información importante, mas no ha entendido, en consecuencia, no puede utilizarle. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le solicita utilizar la información para resolver problemas, este no es capaz, pues solo memorizó conocimientos relevantes y no tiene la habilidad desarrollada de transferir dicho conocimiento a una nueva situación.

El aprendizaje significativo. Es el resultado de una enseñanza que no sólo promueve que los estudiantes adquieran un conocimiento relevante, sino que también puedan utilizarlo para resolver problemas cotidianos y puedan estar preparados para entender nuevos conceptos. Los estudiantes, producto de este tipo de enseñanza, pueden transferir sus conocimientos a nuevos problemas y situaciones para continuar aprendiendo.

Ocurre un aprendizaje significativo cuando los estudiantes pueden construir el conocimiento y los procesos cognitivos necesarios para la resolución exitosa de problemas (Mayer, 2000). Así, para fomentar un pensamiento matemático de alto nivel, los docentes deben procurar seleccionar, adaptar, diseñar e implementar tareas que activen el razonamiento matemático al resolver problemas. Esto incluirá fomentar tanto el uso de diversas representaciones y herramientas como relevar la diversificación de distintas estrategias de resolución como lo reportan Smith y Stein (1998).

Asimismo, los docentes que disciernen la manera de cómo integrar contextos, culturas y lenguajes cercanos en la invención de diseños de tareas matemáticas y además trayendo el conocimiento previo del estudiante con sus experiencias personales, son considerados docentes eficaces, según Moschkovich (2011). Ello refuerza la motivación de los estudiantes en el compromiso que adquieren para resolver la tarea, haciéndoles partícipes activos de la clase.[5]

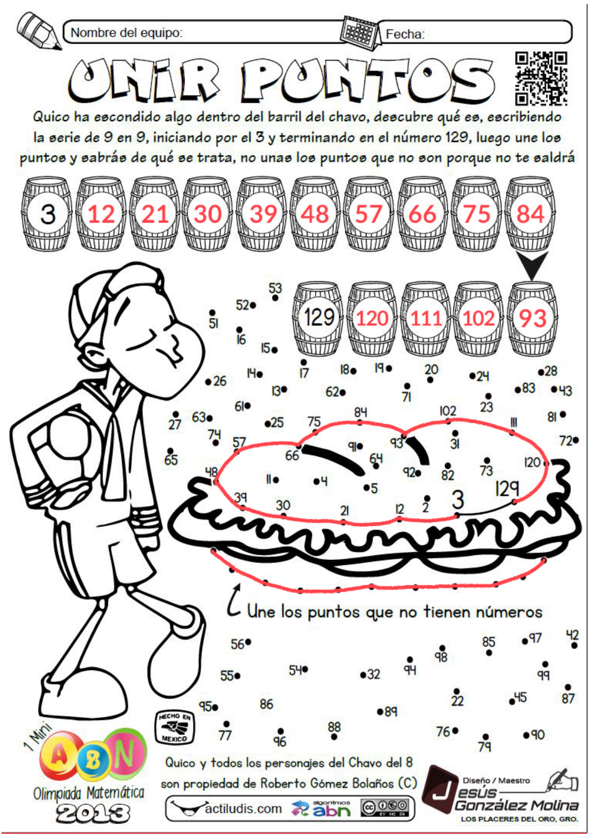


Figura 6. Actividad que involucra dos tareas matemáticas[5].

A continuación, se ejemplifica a través de una actividad (con resolución correcta en rojo, ver Figura 6), una gestión posible para promover una enseñanza eficaz que provoque aprendizajes

5 Fuente: https://www.actiludis.com/2013/10/06/contar-de-dos-en-dos/

significativos relacionados con el OA-01 en tercer año básico que especifica que los estudiantes deben contar números del 0 al 1000 de 5 en 5, de 10 en 10, de 100 en 100. Empezando por cualquier número menor que 1000, de 3 en 3, de 4 en 4, ..., empezando por cualquier múltiplo del número correspondiente (MINEDUC, 2012). En la actividad de la Figura 6 se pueden observar dos tareas matemáticas diferentes que se rotulan como TM-1 y TM-2 a continuación.

La TM-1, solicita encontrar los números que se han escondido dentro del barril. Esta tarea matemática corresponde a un conteo de 9 en 9 comenzando desde 3 hasta 129. Por tanto, matemáticamente el estudiante desarrolla el procedimiento que permite ir diciendo los números de la serie, que desde el punto de vista matemático corresponde a la expresión simbólica 9n+3 siendo la variable n igual a 0, 1, 2, ...,13 y 14. Alternativamente, es posible que algunos estudiantes partan del número 129 y restando cada vez 9, lleguen al número 3 en la secuencia propuesta. Mientras que la TM-2, requiere que los estudiantes tracen líneas entre los puntos que están etiquetados por números siguiendo la secuencia que enuncia la tarea matemática. Esto busca que los estudiantes realicen una secuencia aditiva creciente de 9 en 9 partiendo de 3 y terminando en 129.

Es importante notar que los estudiantes pueden partir desde la TM-1 y luego hacer la TM-2, aunque para otros resulta más atractivo descubrir qué dibujo queda a partir de las líneas que trazan entre los puntos dando inicio con la TM-2 para luego continuar con la TM-1, inclusive, algunos pueden ir resolviendo en forma paralela tanto la TM-1 como la TM-2. Estas diferencias en el proceder es un factor que puede tomarse en cuenta a la hora de gestionar esta actividad durante la enseñanza.

Cada vez que el docente presenta una tarea matemática se sugiere, idealmente, hacer un análisis previo a la clase. El rol que desempeña el docente frente a ciertas dificultades o errores por parte de los estudiantes de forma anticipada es crucial porque ello puede influir positivamente en la gestión de la tarea matemática.

Por ejemplo, el docente respecto a la actividad puede encontrar lo siguiente:

- Se observa que las instrucciones no son específicas ni claras, lo que podría impedir una comprensión adecuada a la tarea matemática, por lo que puede ser rediseñada la consigna de trabajo.
- En TM-1, el estudiante puede sumar o restar nueve erradamente en algún paso de la secuencia (barriles), lo que podría generar una propagación del error en toda la secuencia que sigue completando.

- Que la forma de continuidad de los barriles en la TM-1 afecte la secuencia, ya que, primeramente, parte de izquierda a derecha y después cambia de sentido de derecha a izquierda, lo que podría confundir a los estudiantes en el orden que deben seguir para registrar los números, incluso, cambiar la operación desde la adición a la sustracción porque se interpreta que se retrocede como metáfora de la resta.
- En la TM-2, si el estudiante no tiene la noción de orden aprendida, puede saltarse números, con lo cual la tarea quedaría interrumpida, incompleta o su resolución sería incorrecta.
- Se observa que para completar la "torta de jamón" (sándwich) hay puntos no numerados que pueden obviar los estudiantes durante la realización de la tarea.

Para la Ingeniería Didáctica, impulsada por Michèle Artigue, un análisis a priori contempla las funciones de describir y predecir posibles estrategias de resolución —correctas o no, tomando en cuenta errores y/o dificultades— que podrían llevar a cabo los estudiantes que se enfrentan a una tarea matemática pensada como una situación matemática, que tiene por virtud ciertas variables que son controlables y regulables durante la enseñanza. En general, basado en Artigue, Douady y Moreno (1995), un análisis a priori puede implicar para la enseñanza un dispositivo que abarca:

- La descripción de la intencionalidad educativa, en tanto conocimientos previos y objetivos de aprendizaje que se desean alcanzar mediante las características propias de la situación didáctica (o bien, el conjunto de tareas matemáticas) que se desprenden y vinculan.
- La realización de un análisis que contemple lo que podría estar en juego en la situación matemática (tarea) para un estudiante, en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone dicho estudiante, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del docente.
- La anticipación de los campos de comportamientos posibles y la demostración de cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje.

El presente capítulo se enfoca en la introducción de algunos elementos de la gestión de la tarea matemática y en los siguientes capítulos se ofrecen más ejemplos sobre este proceso.

REFLEXIONES FINALES

El docente enfrenta varios retos al momento de diseñar un espacio de trabajo matemático provisto de tareas matemáticas coherentes y concatenadas para cierto fin educativo. Un desafío primordial es obtener altos niveles de logro de los objetivos de aprendizaje (OA), los cuales se llevan a la práctica mediante tareas apropiadas. Sin embargo, una de las mayores dificultades que enfrenta el docente cada vez que diseña una clase es la elaboración de una meta de aprendizaje coherente con el OA propuesto en el currículo vigente.

El diseño de enseñanzas que promueven aprendizajes significativos puede contener tareas variadas, en tanto sean cognitivamente desafiantes y/o funcionales para niñas y niños, lo cual permitiría disminuir la probabilidad de solo abordar estrategias superficiales de afrontamiento y tareas solamente algorítmicas, sin conceptualización previa.

Como se pudo apreciar en el presente capítulo, la tarea matemática involucra variados aspectos, tales como el saber matemático, la búsqueda y examinación de contextos reales para proceder, considerar modelos alternativos de resolución, o bien, decidir sobre la precisión requerida del resultado que se tiene. Lo anterior queda de manifiesto en la tipología de tareas (simple, estándar y robusta) y en los niveles de demanda cognitiva que se relaciona al estudiante en el rol de resolutor. A modo de síntesis y basado en el NCTM (2015), los docentes pueden proveer a los estudiantes experiencias educativas que les permitan:

- Adquirir compromisos en la resolución de tareas matemáticas desafiantes que involucren un aprendizaje significativo y funcional a sus vidas;
- Articular aprendizajes nuevos con los previos y con el razonamiento informal en vías de afianzarse, además de contrarrestar errores y dificultades comunes durante el proceso de trabajo matemático;
- Equilibrar conocimientos procedimentales con los conceptuales para favorecer una organización significativa de su interrelación, adaptarse al nuevo conocimiento y activar esquemas de pensamiento, al enfrentar nuevas situaciones susceptibles de ser resueltas por niñas y niños;
- Promover el discurso, la actividad y la interacción, a partir de problemas significativos en el marco de la construcción social del conocimiento matemático;
- Retroalimentar de manera oportuna el trabajo matemático de niñas y niños, en un espacio que permita una comprensión más profunda de lo procedimental y/o conceptual del contenido matemático;
- Dar tiempo suficiente y espacios de interacción para el desarrollo metacognitivo

de niñas y niños en su rol de estudiantes, para que puedan repensar sus propias soluciones y supervisar su desempeño, alcanzando un conocimiento personal de las estrategias que ha llevado a cabo, susceptibles a ser también autoevaluadas.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=41

Bransford, J., Brown, A., y Cocking, R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* Washington, D.C.: National Academy Press. Recuperado de https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1986_num_76_1_2401_t1_0089_0000_1

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2/document

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115. Recuperado de http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1462973817_Fundamentos%20de%20Brousseau.pdf

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. En M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland y V. Warfield (Eds. y Trad.) *Didactique des mathématiques 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de https://www.springer.com/gp/book/9780792345268

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, *12*(1), 5-38. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_46

Brousseau, G., Sarrazy, B., y Novotná, J. (2014). Didactic Contract in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 153-159). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_47

Brousseau, G., y Warfield, V. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163-169). Netherlands: Springer.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/118315/mod_resource/content/1/articulo_chevallard_TAD_1999.pdf

Chevallard, Y., y Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170-174). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_48

Donovan, M., y Bransford, J. (2005). *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom.* Washington, D.C.: National Academies Press. https://doi.org/10.17226/10126

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Lester, F. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston, VA.: NCTM.

Mayer, R. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: Freeman.

Mayer, R. (2000). Rote versus Meaningful Learning. *Theory into Practice, 41*(4), 226-232. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_4

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica.* Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/

Moschkovich, J. (2011). Supporting Mathematical Reasoning and Sense Making for English Learners. En Marilyn E. Strutchens y Judith Reed Quander, *Focus in High School Mathematics: Fostering Reasoning and Sense Making for All Students* (pp. 17-36). Reston, Va.: NCTM. Recuperado de https://people.ucsc.edu/~jmoschko/Moschkovich%20Book%20Chapters/Moschko%202011%20Supporting%20Math%20Reasoning%20NCTM.PDF

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Estados Unidos. Recuperado de https://www.nctm.org/PtA/

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (22), 67-90. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_22/adsc-2017_003.pdf

Pfannkuch, M., y Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 17-46). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

Pizarro-Canales, A. (2018). *El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos.* Tesis doctoral, Universidad Paris Diderôt. Francia. Recuperado de http://www.theses.fr/2018USPCC336

Sam, L., y Ernest, P. (2000). A Survey of Public Images of Mathematics. *Research in Mathematics Education, 2*(1), 193-206. https://doi.org/10.1080/14794800008520076

Schneider, M. (2014). Epistemological Obstacles in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 214-217). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_57

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics, 24*(2), 7-15. Recuperado de https://flm-journal.org/Articles/51AB9D0E4247C5E9883E32091E242.pdf

Simon, H., y Newell, A. (1971). Human problem solving: the state of the art in 1970. *American Psychologist, 26*, 145-159. Recuperado de http://digitalcollections.library.cmu.edu/awweb/awarchive?type=file&yitem=356869

Stigler, J., y Hiebert, J. (2004). Improving Mathematics Teaching. *Educational Leadership, 61*(5), 12-16. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/228731157_Improving_mathematics_teaching

Thomas, M. (2014). Algorithms. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, 1*, 36-37. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_8

Weiss, I., y Pasley, J. (2004). What Is High-Quality Instruction? *Educational Leadership, 61*(5), 24-28. Recuperado de http://www.ascd.org/publications/educational_leadership/feb04/vol61/num05/What_Is_High-Quality_Instruction%C2%A2.aspx

La Composición y Descomposición aditiva: Estrategia de cálculo para la adición y sustracción

RODOLFO MORALES-MERINO
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

SERGIO MORALES
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

La estructura aditiva es uno de los elementos clave en la enseñanza de la Matemática en Educación Básica. Por un lado, su aprendizaje abre ante los estudiantes la posibilidad de resolver un gran número de problemas aditivos que se enfrentan a diario, sean estos de naturaleza social, científica, personal, o comercial. Por otro lado, define las bases para el aprendizaje de la multiplicación y algunos de sus significados.

La enseñanza de la estructura aditiva ha sido motivo de discusión durante años, por parte de expertos en didáctica de la Matemática, con énfasis en las características de las estrategias y técnicas de cálculos asociadas a ella. Actualmente, se busca que los estudiantes puedan resolver adiciones y sustracciones con sentido, es decir, que hagan uso comprensivo de técnicas y algoritmos que emplean, más que aplicarlos de una manera mecánica con foco exclusivo en la obtención de una respuesta. Es en este contexto, que adquiere real importancia tanto la comprensión como el dominio de la composición y descomposición aditiva como estrategia de cálculo.

Resolver tareas de composición y descomposición aditiva desde los primeros niveles educativos, promueve en los estudiantes la construcción del concepto de número, y les ayuda a descubrir de manera intuitiva aquellas técnicas de cálculo relativos a la adición y sustracción, favoreciendo el cálculo con sentido y el uso de destrezas de cálculo mental eficaces (Isoda y Cedillo, 2012a; 2012b; Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2020). Además, el estudio de la composición y descomposición de números, promueve de manera natural el aprendizaje de las propiedades de la adición como, por ejemplo, la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa, ambas propiedades claves para el desarrollo de estrategias de cálculo más avanzadas.

Este capítulo se centra en mostrar cómo la composición y descomposición aditiva promueve el cálculo de la adición y sustracción de una manera eficiente y cómo orienta un aprendizaje de los algoritmos estándar con significado para el estudiante. Específicamente, se abordan los temas siguientes: el significado y las representaciones de la estructura aditiva; qué se entiende por adición y sustracción como operaciones aritméticas; tópicos esenciales de enseñanza para el aprendizaje tal como, la representación parte-todo, la composición y descomposición aditiva, aspectos sobre la adición y sustracción en el currículum nacional y algunos ejemplos de estrategias didácticas específicas para abordar la adición y sustracción desde primero a cuarto básico. Finalmente, se discuten errores y/o dificultades en el algoritmo de la estructura aditiva.

Se espera que el contenido que se presenta en este capítulo sea un sustento para los docentes, permitiéndoles profundizar sus conocimientos sobre la adición y sustracción, y sus estrategias didácticas específicas. Se pretende que los docentes amplíen la mirada de cómo abordar las técnicas de cálculo, con base en la composición y descomposición aditiva, contribuyendo así a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

ESTRUCTURA ADITIVA

A continuación, se caracteriza la estructura aditiva con base en su significado y sus representaciones.

SIGNIFICADO

Basta con dar una lectura a textos escolares, recursos digitales o enciclopedias de Matemática para notar que existen distintas definiciones y significados, asociados a las estructuras aditivas, particularmente en relación con la adición y sustracción. Por ejemplo, algunos términos asociados frecuentemente a la adición, y utilizados en la enseñanza de la Matemática, son: acumular, ampliar, añadir, aumentar, avanzar, dar, juntar, regalar, sumar y unir. Mientras que para la sustracción encontramos términos como: comparar, igualar, quitar, retroceder, reducir y sustraer.

El uso de los términos empleados para referirse a la adición y sustracción, en un contexto de enseñanza, debe ser analizado con detención (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2011). Por ejemplo, las autoras antes citadas sugieren que el término "quitar" empleado frecuentemente en una tarea de sustracción, también puede ser entendido como una adición, como se observa en la siguiente tarea matemática (TM, y en plural TMs, de aquí en adelante):

> De un canasto he quitado tres naranjas. Posteriormente he quitado otras 5 naranjas ¿Cuántas naranjas he quitado en total?

La situación anterior se puede representar aditivamente como "3 + 5", que corresponde a la representación simbólica de la idea de suma y que evoca la pregunta planteada, esto a pesar de que la pregunta incluye explícitamente la frase "he quitado".

Existen diversas concepciones asociadas a la estructura aditiva; las cuales, promueven la comprensión acerca de la relación entre la adición, la sustracción y las propiedades básicas de la estructura aditiva, preparando así a los estudiantes para el aprendizaje de técnicas y algoritmos (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004).

Entre las concepciones relativas a la adición, se da cuenta de dos de ellas. Por un lado, una concepción unitaria de la adición, y por otro, una concepción binaria. Ambas concepciones involucran tres componentes, dos denominadas sumandos y uno denominado resultado o suma. Análogamente, para el caso de las concepciones asociadas a la sustracción, se aborda dos de ellas, una concepción unitaria y una concepción binaria de la sustracción. Tal como en el caso de la adición, estas concepciones de sustracción involucran tres componentes, en este caso denominados, minuendo, el cual se refiere la cantidad inicial; el sustraendo, que se refiere a la cantidad que se quita al minuendo; mientras que el último componente se refiere a la cantidad resultante, que es denominada diferencia o resta.

A continuación, se describe cada una de estas concepciones con base en las ideas de Cañadas y Castro-Rodríguez (2011).

CONCEPCIÓN UNITARIA DE LA ADICIÓN

Se refiere a una situación, en la cual, hay una cantidad inicial que cambia luego de agregar una segunda cantidad. El resultado se entiende como el incremento de la segunda cantidad sobre la primera. Un ejemplo de ello se observa en la situación siguiente:

> Ricardo tiene 5 bolitas y su abuelo le regaló otras 4 bolitas ¿cuántas tiene ahora?

Al analizar la situación, es posible identificar que la acción que genera el cambio en la cantidad inicial está asociada a las 4 bolitas que recibe Ricardo por parte de su abuelo. Por ello, se tiene que la cantidad inicial que correspondiente a 5 bolitas, se transforma en 9, como respuesta a la acción provocada por el abuelo de Ricardo.

La situación anterior se modela mediante la representación simbólica “5 + 4 = 9” y pictóricamente como se muestra en la Figura 1.

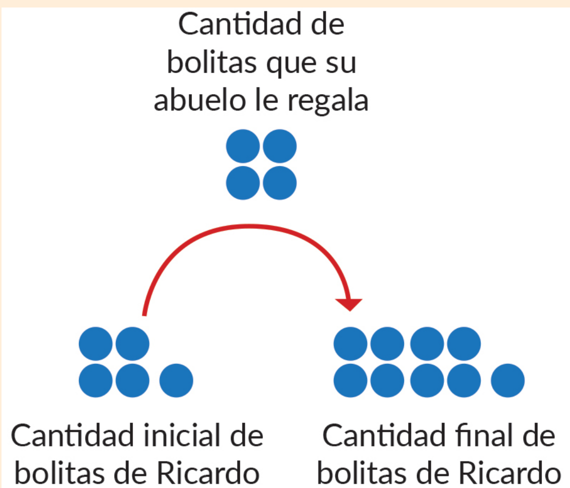


Figura 1. Concepción unitaria de la adición

CONCEPCIÓN BINARIA DE LA ADICIÓN

Esta concepción se manifiesta en situaciones donde hay dos cantidades independientes que se relacionan entre sí, mediante una unión o combinación, permitiendo de esta manera obtener la suma (resultado). Se observa la siguiente situación:

Ricardo tiene en el bolsillo derecho de su pantalón 4 bolitas y en el bolsillo izquierdo 5 bolitas ¿Cuántas tiene en total?

Para responder a esta pregunta basta con combinar (o unir) ambos conjuntos. En la Figura 2 se muestra la representación pictórica de esta concepción y su representación simbólica es "4 + 5 = 9".

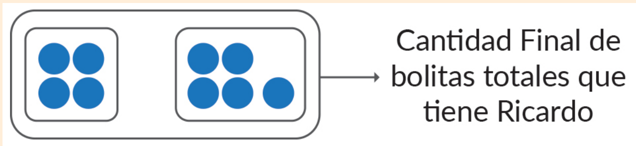


Figura 2. Concepción binaria de la adición

CONCEPCIÓN UNITARIA DE LA SUSTRACCIÓN

Esta concepción es análoga a la concepción unitaria de la adición, es decir, que se manifiesta en situaciones donde hay una acción que actúa sobre una cantidad inicial. Por ejemplo, como en el caso que se observa a continuación:

Ricardo tiene 4 bolitas y pierde 1 ¿Cuántas tiene ahora?

La situación muestra una acción que actúa sobre la cantidad inicial. Esto quiere decir, que se debe quitar una cantidad específica, 1 bolita, a la cantidad inicial, 5 bolitas, generando con ello una disminución de la cantidad inicial. Por ende, la resta se obtiene mediante la cantidad inicial disminuida en la segunda cantidad. Simbólicamente lo anterior se puede representar como: "4 – 1 = 3". La Figura 3, muestra la representación pictórica del caso anterior.

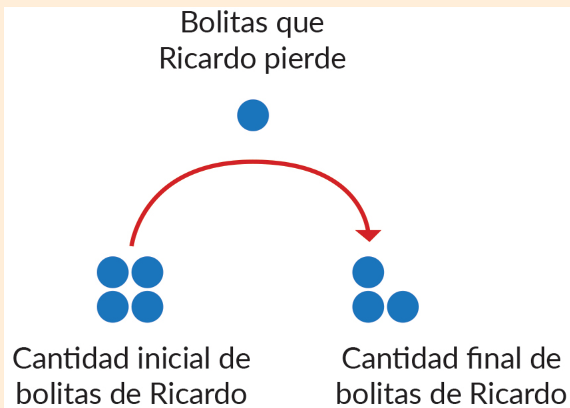


Figura 3. Representación concepción unitaria de la sustracción

CONCEPCIÓN BINARIA DE LA SUSTRACCIÓN

La concepción binaria de la sustracción es aquella donde hay dos cantidades asociadas a la misma variable, es decir, se manifiesta en situaciones donde está presente el todo y una de sus partes, lo que permite conocer las partes que restan (complemento). Se analiza la siguiente situación:

> Ricardo tiene 5 bolitas en total y 4 de ellas en uno de sus dos bolsillos ¿cuántas bolitas hay en el otro bolsillo?

Esta situación se representa simbólicamente como 5 – 4 = 1 y de manera pictórica como se muestra en la Figura 4.

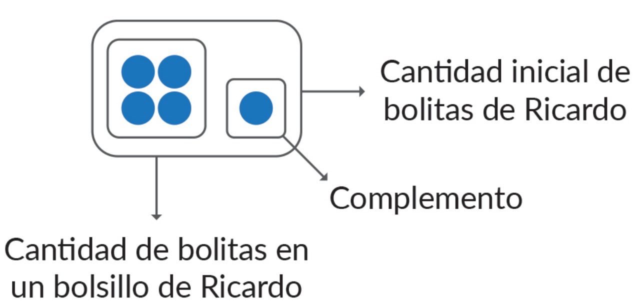


Figura 4. Concepción binaria de la sustracción

Las concepciones anteriores desprenden acciones que se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Concepciones y tipos de acciones asociadas a la adición y a la sustracción

Operación	Concepción unitaria	Concepción binaria
Adición	Aumentar / añadir	Unir / combinar
Sustracción	Disminuir	Comparar / igualar

Nota: Extraída de Cañadas y Castro-Rodríguez (2011).

REPRESENTACIÓN DE LA ESTRUCTURA ADITIVA

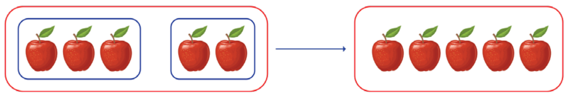
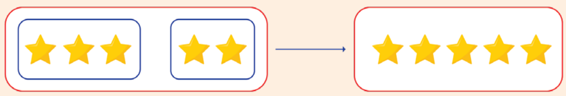
Esta sección aborda el estudio de los símbolos (ver Tabla 2) y representaciones (ver Tabla 3) que intervienen en la adición y sustracción.

Tabla 2. Simbología de la adición y sustracción

Símbolo	Significado	Lectura
+	Adición	Más
-	Sustracción	Menos
=	Igualdad	Igual

Con respecto a las representaciones empleadas en el estudio de la adición y sustracción, se consideran representaciones concretas (manipulativas), pictóricas, simbólicas y verbales, ver Tabla 3.

Tabla 3. Representación de la adición

Tipo de representación	Representación
Concreta	
Pictórica	
Simbólica	3 + 2 = 5
Verbal	Tres más dos es igual a cinco

Las representaciones concretas requieren de la manipulación para poner en juego las relaciones matemáticas, por ello, existen materiales estructurados y diseñados exclusivamente para abordar el estudio de la estructura aditiva. Un ejemplo de ello, son las regletas de Cuisenaire (ver imagen izquierda, Figura 5), que consisten en un material compuesto por bloques de madera con distintas longitudes y colores de acuerdo a un número del 1 al 10. En la imagen derecha de la Figura 5 se muestra la representación manipulativa-concreta de la adición 3 + 2 = 5.

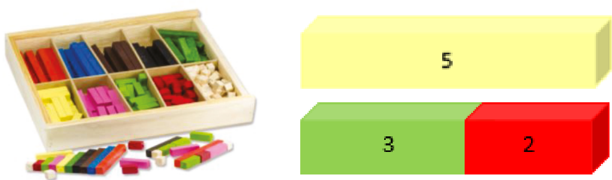


Figura 5. Representación concreta-manipulativa: regletas (o barritas) Cuisenaire (Nava, Rodríguez, Romero y Vargas, 2010).

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN COMO OPERACIONES ARITMÉTICAS

Por lo general, la adición es comprendida como una operación aritmética que consiste en aumentar una cantidad o juntar, reunir o combinar varias cantidades en una sola. Mientras que la sustracción se refiere a aquella operación aritmética que consiste en comparar, sacar, quitar o disminuir una cantidad de otra para averiguar la diferencia entre las dos. Para Maza (2001), ambas operaciones se pueden definir a partir de la unión y diferencia de conjuntos.

De esta manera se tiene la siguiente definición para la adición: "La adición de dos números naturales a y b se define por a + b = cardinal (A U B), donde a = cardinal(A)[6] y b = cardinal(B), con los conjuntos A y B disjuntos" (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2014, p. 81).

Para el caso de la sustracción, se tiene la siguiente definición: "Sean dos números a y b con a ≥ b, se define su diferencia, c = a – b, como aquel número que sumado con b da como resultado a" (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2014, p. 81).

De lo anterior se desprende la reversibilidad de la adición. Es decir, la sustracción se considera como la operación inversa de la adición. Esto quiere decir que si dados dos números naturales a y b se cumplirá a - b = c cuando exista un número natural c tal que se cumpla que b + c = a (Maza, 2001).

ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE DE LA ESTRUCTURA ADITIVA

La enseñanza para el aprendizaje de la estructura aditiva implica procesos diversos. Entre ellos, se hallan, por un lado, el abordaje del esquema parte todo como un paso previo a la estructura aditiva y, por otro lado, estrategias diversas de cálculo entre las que se destaca la composición y descomposición aditiva.

REPRESENTACIÓN PARTE-TODO

Un aspecto clave que los estudiantes deben dominar en los primeros cursos educativos para la comprensión de la estructura aditiva, es la representación parte-todo. Esta representación está ligada a la composición y descomposición de números que a su vez son una aproximación a los procedimientos de cálculo de la adición y sustracción (Castro y Castro-Rodríguez, 2013; Zúñiga, 2014).

6 Para representar el cardinal de un conjunto se suele representar con el símbolo #. Por ejemplo, el cardinal del conjunto A, se representa como #A.

La representación parte-todo implica que los estudiantes comprendan que un total se compone de partes más pequeñas. Es decir, que hay un total que se descompone en partes pequeñas, o en su defecto, a partir de sus partes se compone el total. Este es uno de los motivos por los cuales se considera la adición como una operación reversible, lo que implica, por un lado, que los sumandos se reúnen para formar un todo y, por otro, que el todo se considera constante (invariante) con independencia de las diversas particiones que puedan efectuarse (Zúñiga, 2014).

En la Figura 6 se muestra pictóricamente la representación parte-todo. El rectángulo más grande representa el todo y cada uno de los cuadrados que lo conforman son sus partes. Por consiguiente, si se representa simbólicamente (número natural) el número tres, se obtiene que este número está constituido por tres partes unidas entre sí por una relación aditiva: 1 + 1 + 1.

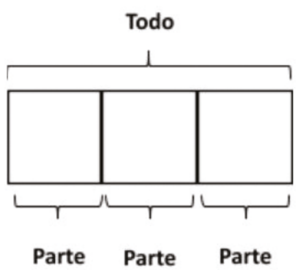


Figura 6. Representación parte todo pictóricamente

La representación parte-todo también puede deberse a diferentes situaciones, es decir, un todo puede ser el resultado de dos partes que se suman (por ejemplo: 7= 2+5), y también, puede ser descompuesto en tres 3 (o más) partes (por ejemplo: 7= 2+2+3).

LA COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN ADITIVA

La composición y descomposición aditiva es una base potente para desarrollar los cálculos de adición y sustracción. Como se ha visto, ambos procesos se sustentan sobre la base de la relación parte-todo. De esta manera, se tiene que el número está compuesto por otros números, de tal modo que, en un número mayor que 1, en los números naturales, puede dividirse en partes, de modo que la suma de las partes es igual al todo (Bermejo, 2004). La descomposición aditiva se asocia a la ruptura del número en sus diferentes partes y su vinculación con el todo, por eso su nombre (Zúñiga, 2014). Con la descomposición aditiva se pretende ampliar la mirada del número, por ello, al estudiar descomposiciones del número 7, tales como 7= 6 + 1; 5 + 2; 4 + 3, lo que se espera es que el estudiante conozca el número 7 desde otro ángulo, y que, a su vez mediante la composición del mismo número, se alcance una mirada más integral y dinámica del número, yendo más allá de la mera comprensión del número como una situación estática (Castro, Rico y Castro, 1995).

En la actualidad, la composición y descomposición aditiva han tomado un rol protagónico en la enseñanza de las operaciones de adición y sustracción en los primeros niveles educativos, lo que, en parte, se debe a que:

- Amplía la concepción del número
- Genera una base sólida para el proceder de los algoritmos de la adición y sustracción,
- Promueve la reversibilidad de la adición y
- Genera una base sólida para el abordaje del algoritmo de la multiplicación.
- Promueve el cálculo mental

Con respecto a este último punto, un aspecto importante que el profesor debe promover en sus estudiantes, es la memorización de composiciones (o adiciones) elementales, como, por ejemplo, aquellas asociadas al 10, pues, como indica Garnet (1992) la memorización está relacionada con la fluidez de los estudiantes en el cálculo mental. A su vez, la memorización de adiciones elementales resulta crucial para el desarrollo de habilidades superiores que requieren que las respuestas sean obtenidas de forma instantánea (Crawford, 2003).

ESTRUCTURA ADITIVA EN EL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICA

A continuación, se presenta brevemente, cómo desde los objetivos declarados en el currículum nacional chileno, es presentada la composición y descomposición aditiva, y a su vez, se describe la manera en que ambos conceptos se relacionan con los objetivos curriculares asociados a la adición y sustracción.

En primero básico se sugiere como objetivo de aprendizaje que los estudiantes compongan y descompongan números del 0 al 20 de forma concreta, pictórica y simbólica (MINEDUC, 2013a). Se observa que este aprendizaje es primordial para que los estudiantes aborden el objetivo de aprendizaje relativo a comprender la adición (dos sumandos) y la sustracción de números de 0 a 20 (MINEDUC, 2013a). Los estudiantes podrían asociar que sumar es componer números o descomponer es buscar aquellos números que sumados entre sí da ese número que se ha descompuesto. En la Figura 7, muestra de qué manera un ejemplo de composición y descomposición aditiva (imagen izquierda y central) del número nueve ayuda a la comprensión de la adición (imagen derecha).

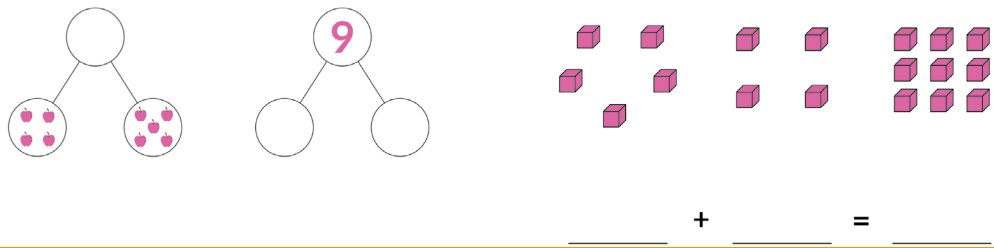


Figura 7. Composición, descomposición y adición, con el número 9
(Modificada de MINEDUC, 2013a)

En segundo básico el currículum nacional también da énfasis al trabajo con la composición y descomposición aditiva, ampliando el ámbito numérico de 0 al 100 (MINEDUC, 2013b). El estudio de estos conceptos permite atender al objetivo curricular que exige a los estudiantes demostrar que comprende la adición y la sustracción en el ámbito del 0 al 100, aplicando el algoritmo de la adición sin reserva. Aquí es fundamental la composición canónica[7] y la composición no canónica como se verá en las próximas secciones. En cursos posteriores, tercero y cuarto básico, el currículum da énfasis al cálculo de adiciones y sustracciones de números hasta 1000 incluyendo el uso de situaciones con reserva (MINEDUC, 2013c; 2013d).

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO: ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE PRIMERO A CUARTO BÁSICO

PRIMERO BÁSICO

Como se ha visto en secciones anteriores, es fundamental abordar la composición y descomposición de números para efectuar adiciones y sustracciones, pues con ello se construirá una base importante para el aprendizaje posterior del cálculo numérico (incluyendo los algoritmos) y el cálculo mental (Zúñiga, 2014).

La enseñanza de la composición y descomposición se inicia en primero básico con los números del 1 al 10. Con ello, los estudiantes irán sentando los fundamentos para la comprensión de la estructura aditiva y los algoritmos correspondientes que se trabajarán en cursos posteriores. En este sentido, deberán centrar su atención en buscar diferentes composiciones y descomposiciones de números. Una estrategia didáctica específica para abordar este tema es comenzar hallando todas las formas posibles de descomposición de un número, haciendo uso de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas y promoviendo el tránsito entre ellas. Según Isoda y Estrella (2020a), en primero básico se sugiere hacer uso de una caja que separe un conjunto de objetos en dos partes, ver imagen izquierda Figura 8. Aquí se descompone

7 Es aquella descomposición de un número que se realiza donde al menos uno de los números que forman la descomposición, es múltiplo de 10.

el número 6 por medio del tránsito de la representación concreta a la representación simbólica. Por su parte, cada número está representado por su correspondiente representación pictórica como se observa en los puntos pequeños de cada tarjeta.

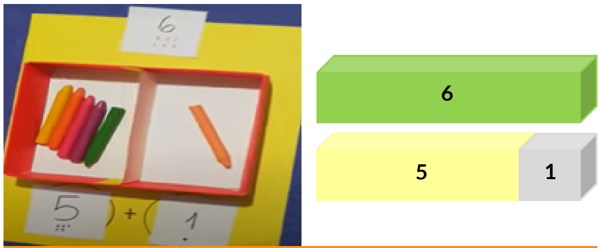


Figura 8. Caja con dos compartimentos y regletas Cuisenaire

Se representa el número 6 (representación simbólica) con 6 lápices (representación concreta). Posteriormente se descomponen esos 6 lápices en 5 lápices y 1 lápiz, los cuales son colocados en cada compartimento de la caja. Finalmente, la cantidad de lápices ubicados en los compartimentos son representados simbólicamente. Por su parte, en este tipo de actividad es aconsejable usar el material estructurado de las regletas Cuisenaire para representar, y que los estudiantes visualicen, el todo y sus partes (o viceversa) tal como se muestra en la imagen derecha de la Figura 8.

Este planteamiento también es útil para abordar la descomposición de otros números.

Durante la gestión de la actividad es importante que el profesor centre la atención de los estudiantes en el conjunto de objetos y en las partes que forman el todo; así como también en su proceso inverso, es decir, el todo constituido por las partes: 5 y 1 hacen 6" y "6 es 5 y 1".

Como se mencionó anteriormente, es fundamental que los estudiantes puedan abordar todas las composiciones y descomposiciones posibles de los números del 1 al 10, tal como se observa en los ejemplos de TMs del 5 y el 10 de la Figura 9, donde, además, se promueve el tránsito desde la representación pictórica a la simbólica. Este tipo de TMs también favorece la reversibilidad de la adición, dado que los estudiantes deben hallar aquel número faltante de la descomposición realizada. Si bien, estas TMs están representadas pictóricamente, es aconsejable proponerla con material concreto (p. ej., conchitas o fichas) o hacer uso de las regletas Cuisenaire como se ha visto anteriormente.

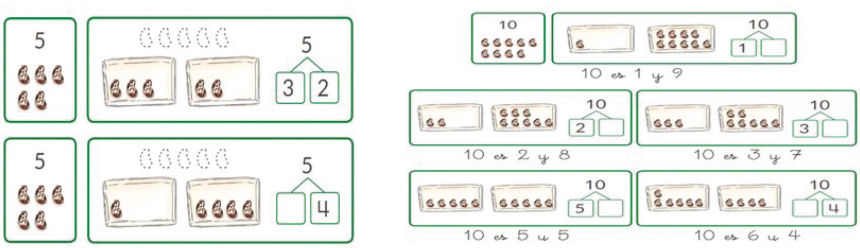


Figura 9. TMs composición y descomposición de números (Isoda y Estrella, 2020a, p. 18)

La composición y descomposición del número 10, es uno de los aspectos clave en el estudio de la estructura aditiva, pues permitirá a los estudiantes trabajar estrategias de cálculo más complejas, y con ámbitos numéricos aún mayores que 10. La Figura 10, muestra una TM de adición y estrategias de resolución que evidencian como de manera simultánea, se manifiesta la composición y descomposición del diez.

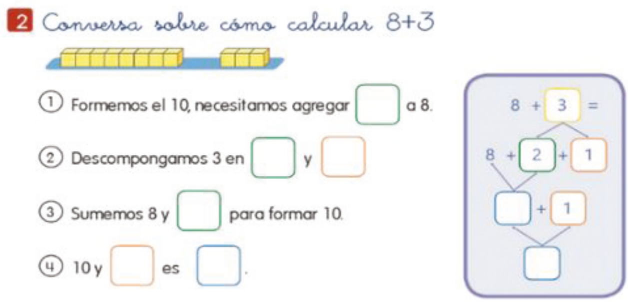


Figura 10. Estrategia de componer el 10
(Isoda y Estrella, 2020a, p. 45)

Para desarrollar la TM de la Figura 10, el estudiante, al observar 8+3, reconoce que para obtener la respuesta conviene componer 8 con 2 para formar 10. Por lo tanto, debe descomponer el 3 del segundo sumando en 2 y 1 para así conseguir el término que, compuesto con 8, da 10. Posteriormente, luego de componer 10, la adición inicial se transforma en una adición elemental que es 10+1.

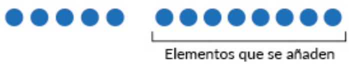
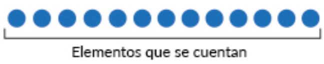
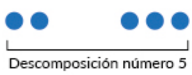
El recuadro de la derecha (Figura 10) muestra una representación idónea de la técnica de componer 10. Las flechas hacia abajo o hacia arriba orientan la realización de una descomposición o una composición, respectivamente. La interiorización de esta técnica es un aspecto clave al que el docente debe prestar atención, pues jugará un rol protagónico, tanto en la formación de otros números, tales como los múltiplos de 10, como en la realización de operaciones que involucren ámbitos numéricos mayores. Por ejemplo, en TMs como 27+8 donde mediante el uso de la técnica de composición y descomposición es posible formar 30+5.

Una vez que los estudiantes han aprendido la composición y descomposición aditiva de los números del 1 al 10, el siguiente paso corresponde al aprendizaje de la operatoria de la adición y sustracción. Para tal efecto, deberán iniciar el trabajo poniendo en juego estrategias diversas relativas al conteo. Para tales estrategias, los estudiantes se apoyan en sus dedos o material concreto suministrado por el profesor. Posteriormente, estas estrategias evolucionan, transformándose en estrategias sofisticadas que no requieren de material concreto, pues, dichas estrategias se automatizan a través de la memorización de las adiciones o sustracciones elementales y por la composición y descomposición del diez. Se muestran a continuación estrategias relativas al conteo, en el contexto de la adición, y estrategias relativas a la sustracción.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO PARA EL CONTEO (ADICIÓN)

La Tabla 4 muestra un conjunto de estrategias de conteo desarrolladas en el contexto de la adición, y organizadas desde la más simple a la más sofisticada. Estas estrategias se relacionan con posibles producciones de estudiantes de primero básico, de acuerdo a Flores, Castro-Rodríguez y Fernández (2015). Se considera como ejemplo la adición de 5 + 8.

Tabla 4. Descripción estrategias de conteo (aditivo) relacionados con 8+5

REPRESENTACIÓN CONCRETA / PICTÓRICA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	DESCRIPCIÓN ACCIÓN DEL ESTUDIANTE
Estrategia de conteo total		
	A) 1, 2, 3, 4, 5	Acción A: representa concreta o pictóricamente uno de los sumados. Por ejemplo: el 5.
	B) 1, 2, 3, 4, 5 B) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	Acción B: añade 8 objetos el otro sumando, a los 5.
	C) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10, 11, 12, 13	Acción C: cuenta todos los objetos y responde con el último cardinal del conjunto "13".
Estrategia sobre conteo		
	A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	Acción A: representa el primer sumando el 8 (aplica la propiedad conmutativa de manera intuitiva).
	B) 9, 10, 11, 12, 13	Acción B: el estudiante cuenta a partir del 8 (a medida que levanta cada uno de los cinco dedos o indica al material concreto empleado) llegando a 13.
Estrategia de composición / descomposición y sobre-conteo		
	A) 5 = 3 + 2	Acción A: el estudiante descompone el primer sumando 5, en 3 y 2.
	B) 8 + 2	Acción B: el estudiante suma 8 + 2 para obtener 10.
	C) 10 + 3 = 13	Acción C: el estudiante suma 10 + 3, obteniendo así 13 (puede usar el conteo de uno en uno a partir del 10 o realizar la adición de manera inmediata).

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO PARA EL CONTEO (SUSTRACCIÓN)

En la Tabla 5 se observan estrategias de sustracción que, según Flores, Castro-Rodríguez y Fernández (2015), pueden emplear estudiantes de primero básico. Se considera como ejemplo la sustracción 9 - 5.

Tabla 5. Descripción de estrategias para la sustracción 9 - 5

REPRESENTACIÓN CONCRETA / PICTÓRICA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	DESCRIPCIÓN ACCIÓN DEL ESTUDIANTE
Quitar al sustraendo		
	A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Acción A: representa concreta o pictóricamente el minuendo: 9.
	B) 1, 2, 3, 4, 5	Acción B: selecciona y quita aquellos elementos relativos al sustraendo: 5.
	C) 1, 2, 3, 4	Acción C: cuenta los objetos sin seleccionar y responde con el último cardinal del conjunto: "4".
Sumando al sustraendo		
	A) 1, 2, 3, 4	Acción A: representa el primer sumando el 8 (aplica la propiedad conmutativa de manera intuitiva).
	B) 5, 6, 7, 8, 9	Acción B: añade objetos de uno en uno y a su vez cuenta hasta llegar al minuendo: cuenta 4 objetos.
Emparejamiento del minuendo y sustraendo		
	A) 1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5; 6, 7, 8, 9	Acción A: ubica en dos filas paralelas la cantidad de objetos del minuendo (9) y sustraendo (5), y empareja.
	B) 1, 2, 3, 4	Acción B: cuenta los objetos que no están emparejados y responde con el último cardinal del conjunto "4".

Otro aspecto de interés posible de abordar de manera intuitiva, mediante la estrategia de emparejamiento, es la relación de orden entre números naturales. Dado que el estudiante debe comparar los números representados (concreta o pictórica) determinando cuál es mayor. Esta estrategia, también ayuda a comprender que, para abordar la sustracción en los números naturales, es necesario que el sustraendo sea menor que el minuendo. Se recomienda orientar a los estudiantes mediante preguntas tales como ¿Dónde hay más? ¿Cuánto más? ¿Qué hay más? Tal como se muestra en la TM de la Figura 11.

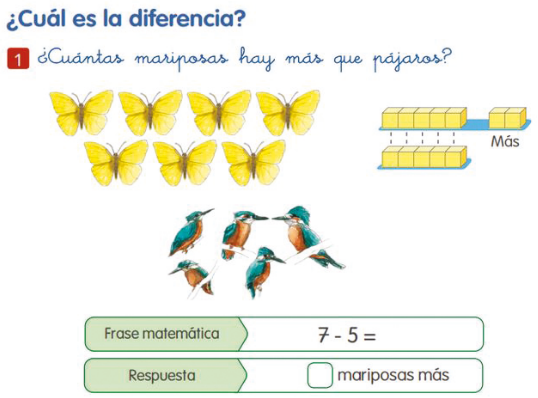


Figura 11. Comparar números buscando la diferencia (Isoda y Estrella, 2020b, p. 32)

SEGUNDO BÁSICO

En este curso, se recomienda dar continuidad al estudio de la composición y descomposición aditiva, previo al estudio de operatoria de adición y sustracción más complejas. Para tal efecto, a continuación, se comparten distintas representaciones (concreto-pictórico-simbólico) en miras a los algoritmos estándar. Para abordar este trabajo es posible emplear material concreto estructurado, como por ejemplo, los bloques base 10 o multibase (Figura 12), recomendado para el estudio de la adición y sustracción desde primero a cuarto básico. En lo que sigue se mostrará pictóricamente cómo este material es fundamental para que los estudiantes representen y comprendan los algoritmos de la adición y sustracción.

Figura 12. Bloques base 10 (o multibase)

Para dar inicio al estudio de la operatoria aditiva en segundo básico, es adecuado que los estudiantes logren dominar la composición y descomposición de números del 1 al 10, en especial las del número 10, así como también distintos conteos, por ejemplo de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, diez en diez, entre otros. En otras palabras, que dominen distintos repertorios y que reconozcan, en el caso del conteo de uno en uno, que sumar uno a cualquier número permite obtener el siguiente (Isoda y Estrella, 2020b).

Si bien existe una amplia variedad de estrategias asociadas a TMs de adición y sustracción, se quiere insistir, en la composición y descomposición canónica, pues define una base sólida para el dominio del cálculo de operaciones aritméticas. A continuación, se comparte sugerencias acerca de estrategias de cálculo de adiciones y sustracciones que pueden ser utilizadas en segundo básico.

ADICIÓN

En segundo básico, el estudio de la adición amplía el ámbito numérico de 0 al 100, y plantea situaciones tal como:

"¿cuánto es 12 + 23?"

A continuación, se presenta un proceso de actuación hipotética por parte de un estudiante en la resolución de 12 + 23, desde la estrategia de composición y descomposición aditiva, haciendo uso de distintas representaciones.

Acción 1: El estudiante descompone canónicamente entre decenas y unidades, cada uno de los sumandos: 12 en 10 + 2 y el 23 en 10 + 10 + 3, empleando la representación concreta /pictórica y simbólica, como se muestra en la Figura 13.

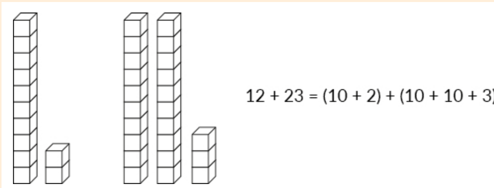


Figura 13. Descomposición de sumandos y representación concreta/pictórica y simbólica

Acción 2: El estudiante agrupa las decenas entre sí y análogamente las unidades. Posteriormente suma los elementos agrupados, es decir 2 decenas más 1 decena (20 + 10 = 30) y 2 unidades y 3 unidades (2 + 3 = 5), y responde 35. (ver Figura 14).

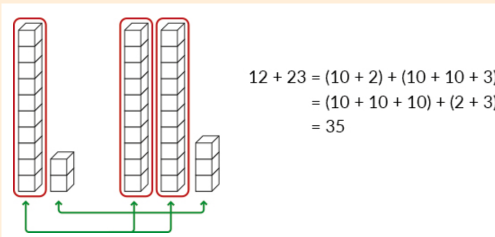


Figura 14. Suma de decenas y unidades agrupados

Otra estrategia que se sugiere abordar en este curso, consiste en descomponer cada sumando en unidades, posteriormente agrupar las unidades en decenas. Luego, sumar las decenas y agregar las unidades restantes. De esta manera se establece 10 + 10 + 10 + 2 + 3 = 35, como se observa en la Figura 15 para la adición de 12 + 23.

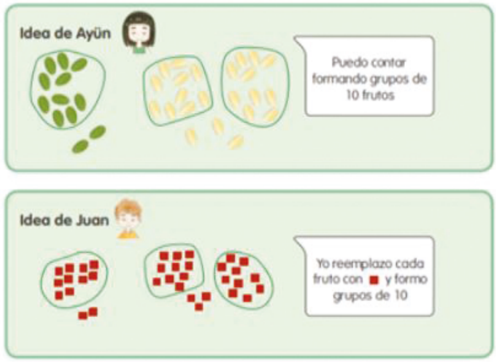


Figura 15. Estrategia de formar decenas, previa descomposición de los sumandos en unidades (Isoda y Estrella, 2020b, p. 12)

Como se ha mencionado en apartados anteriores, el estudio de la adición, a través de la composición y descomposición canónica, permite construir con significado el algoritmo estándar. Por medio de esta estrategia, es posible hacer notar la conveniencia de alinear las decenas y las unidades de ambos sumandos respectivamente, esto en contraste con la representación simbólica construida paralelamente a dicho proceso, dando paso así al algoritmo estándar de la adición (ver Figura 16).

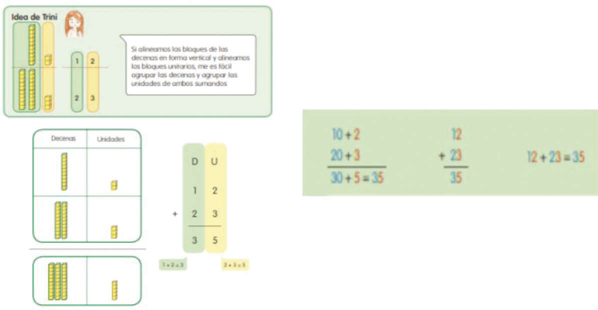


Figura 16. Construcción del algoritmo de la adición, desde la composición y descomposición, para el caso de 12 + 23 (Isoda y Estrella, 2020b, p. 13)

SUSTRACCIÓN

Un aspecto importante a tener en cuenta, es que, en segundo básico, el estudio de la sustracción no considera la reserva. Por ello se abordan TMs, como:

¿Cuánto es 25 – 13?

Para abordar la situación anterior se sugiere emplear estrategias basadas en la descomposición canónica del minuendo o sustraendo (o ambos) dado que esta práctica ayudará a formalizar comprensivamente el algoritmo estándar de la sustracción. A continuación, se detalla la actuación de un estudiante en el proceso de resolución de la TM planteada:

Acción 1: El estudiante descompone el minuendo y sustraendo canónicamente: 25 en 20 + 5 y el 13 en 10 + 3, empleando la representación concreta/ pictórica y simbólica, como se muestra en la Figura 17.

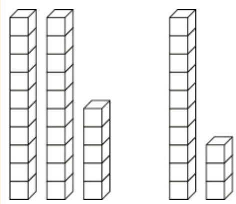


Figura 17. Descomposición canónica del minuendo y sustraendo

Acción 2: El estudiante asocia y resta las decenas y unidades del minuendo y sustraendo respectivamente (ver Figura 18).

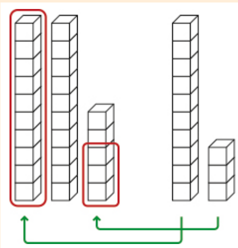
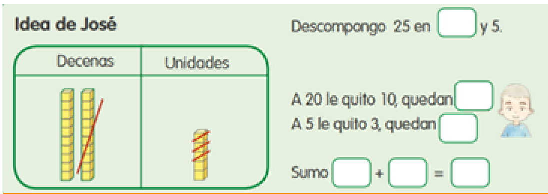


Figura 18. Emparejamiento de decenas con decenas y unidades con unidades

Acción 3: El estudiante considera aquellos elementos no emparejados, es decir una decena y dos unidades, llegando así a 12 como respuesta a 25 – 13.

Una estrategia similar a la anterior, consiste en descomponer el minuendo y sustraendo, y posteriormente quitar las decenas del sustraendo a las decenas del minuendo y las unidades del sustraendo a las unidades del minuendo, para finalizar con la suma de las decenas y las unidades restantes, tal como se muestra en la Figura 19.



$$\begin{aligned}25 - 13 &= (20 + 5) - (10 + 3)\\ &= (20 - 10) + (5 - 3)\\ &= 10 + 2\\ &= 12\end{aligned}$$

Figura 19. Sustracción con descomposición aditiva (Isoda y Estrella, 2020b, p. 18)

Al abordar la sustracción a través de la composición y descomposición canónica como se ha presentado, se trabaja de manera comprensiva. Por ello, el estudiante da sentido al hecho de alinear según el valor posicional dando así la oportunidad de introducir desde estas ideas el algoritmo de la sustracción (ver Figura 20).

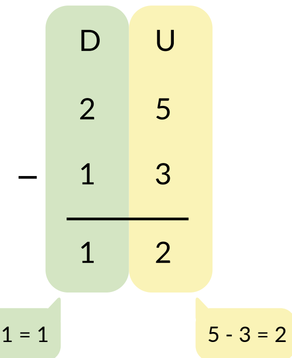


Figura 20. Algoritmo estándar sustracción sin reserva

Tercero y Cuarto Básico

En tercero y cuarto básico se inicia el estudio de la adición y sustracción con reserva, el cual, también se aborda mediante el uso de la composición y descomposición aditiva.

A continuación, se profundiza en las estrategias de cálculo empleadas en estos niveles para el estudio de la adición y sustracción.

ADICIÓN

Se considera la siguiente situación extraída de un texto escolar empleado por escuelas chilenas durante 2020 (Isoda y Estrella, 2020c, p. 12):

Hay 38 cactus de copao y 27 cactus de quisco en el cerro. ¿Cuántos cactus hay en total?

Para abordar esta TM desde la composición y descomposición el estudiante puede emplear dos estrategias, la primera de ellas alude a quitar unidades de uno de los sumandos para aproximar a la decena más cercana del otro sumando; mientras que la segunda estrategia alude a la descomposición canónica propiamente tal.

A continuación, se comparte el proceso de desarrollo de la situación anterior.

Acción 1: El estudiante descompone canónicamente los números 38 y 27, y posteriormente, compone el 40, como se ve en la Figura 21.

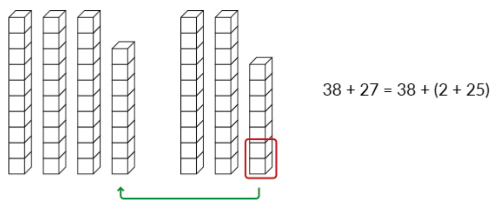


Figura 21. Descomponer sumandos para componer múltiplos de 10.

Acción 2: Producto del paso anterior, el estudiante tiene la siguiente adición 40 + 25 y por agrupación, compone los múltiplos de diez 40 y 20, y compone la suma con las 5 unidades restantes, 60 + 5, obteniendo así 65 (ver Figura 22).

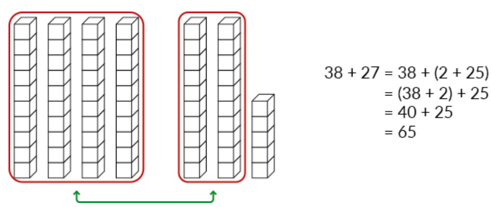


Figura 22. Agrupa decenas con decenas y las suma con las unidades restantes

La estrategia anterior, contribuye a la justificación del algoritmo estándar que se muestra a continuación (ver Figura 23).

$$\begin{array}{r} 38\\ +27\\ \hline 40\\ +25\\ \hline 65\end{array}$$

Figura 23. Algoritmo estándar de la adición

Con respecto a la estrategia de descomposición canónica, a continuación, se describe la actuación de un estudiante que realiza la adición 38 + 27.

Acción 1: El estudiante descompone canónicamente los números 38 y 27 como se ve en la Figura 24.

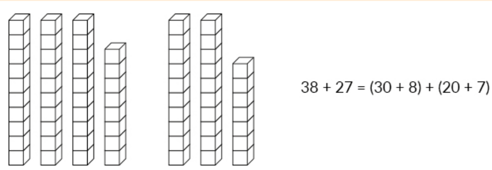


Figura 24. Descomposición canónica de los números 28 y 27

Acción 2: Dadas las siguientes adiciones 30+20 y 8+7, por agrupación, compone 50 con 30 y 20 y 15 con 8+7 (ver Figura 25).

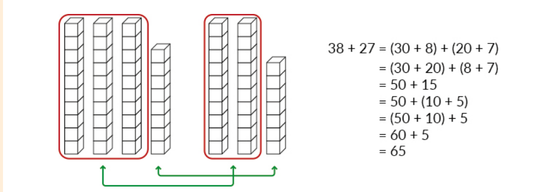


Figura 25. Adición de decenas con decenas y unidades con unidades

Acción 3: Posteriormente, el estudiante para sumar 8 + 7 extrae un 2 del número 7 mediante la descomposición, para componer el 10 con 8 y 2. Posteriormente, suma esos 10 con los 50 que tenían anteriormente, llegando así a 60. Finalmente, los 60 se suma con 5, y obtiene la respuesta “65” (ver Figura 26).

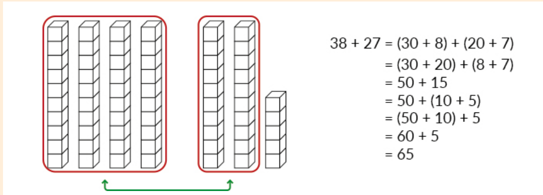


Figura 26. Suma de las decenas y decenas más las unidades restantes

La estrategia anterior permite justificar y comprender el algoritmo estándar vertical de la adición, Figura 27.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 38 \\ +\,\underline{27} \\ 65 \end{array}$$

Figura 27. Algoritmo estándar de la adición con reserva

Con base en lo anterior se puede establecer como regularidad que esta decena adicional que se ha formado, luego de obtener 8 + 7 = 15 al sumar los dígitos de la columna de la derecha, se llama “reserva”. Por tanto, el 5 de las unidades que se obtiene en la suma se deja en la columna de las unidades, mientras que la decena de la suma, recibe el nombre de reserva y se registra como “1” en la parte superior de la columna de las decenas. Este proceso se repite hasta la última columna de la izquierda, y con ello se obtiene la suma esperada, 65.

SUSTRACCIÓN

Consideremos la siguiente situación extraída de Isoda y Estrella (2020c)

> "Los niños cosecharon 45 vainas de algarrobo y se comieron 27 de ellas ¿Cuántas vainas les quedaron?

Para abordar este problema desde la estrategia de composición y descomposición, es importante acompañar a los estudiantes en la ejecución de las siguientes acciones.

Acción 1: El estudiante descompone el minuendo canónicamente en 40 y 5 como se muestra en la Figura 28.

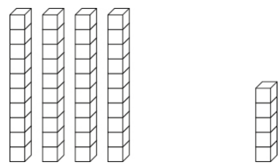


Figura 28. Descomposición canónica del minuendo

Acción 2: El estudiante comienza con la sustracción con las unidades y posteriormente con los números de dos dígitos. Sin embargo, en este punto es importante que ellos noten que la sustracción no es posible de realizar cuando el minuendo es menor que el sustraendo, como ocurre en el caso de 5 y 7. De esta manera, surge la necesidad de descomponer el 40 del minuendo para extraer 10 (se desagrupa 1 decena) y agregárselos al 5 del minuendo, obteniendo así 15. Esta acción permitirá realizar la sustracción, ya que así se obtiene (30 – 20) + (15 – 7) (ver, Figura 29).

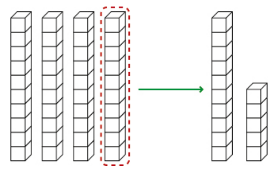
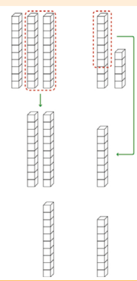


Figura 29. Desagrupando una decena del minuendo para sumársela a las unidades del sustraendo

Acción 3: Finalmente, el estudiante sustrae 7 a 15 y 20 a 30, obteniendo 8 y 10 (1 decena) respectivamente. Finalmente, ambas restas (8 y 10) se componen (8 +10) para formar 18 que es la respuesta a la sustracción de 45 – 27, (ver Figura 30).



$$\begin{aligned} 45 - 27 &= (40 + 5) - (20 + 7) \\ &= (30 - 20) + (15 - 7) \\ &= 10 + 8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Figura 30. Sustracción quitando decenas a decenas y unidades a unidades

Las acciones llevadas a cabo por estudiantes al construir sus estrategias de resolución, en el contexto de una sustracción con reserva y uso de la composición y descomposición canónica, favorecen la comprensión del algoritmo estándar (vertical) y su procedimiento de resolución como se ve en la Figura 31.

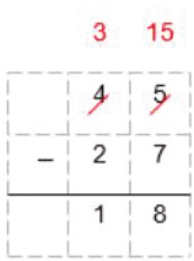


Figura 31. Algoritmo estándar de la sustracción con reserva

El estudiante comprende que para obtener la resta de 45 – 27, se debe desagrupar el minuendo quitando 10 unidades (1 decena) (se tacha el 4 y se escribe el 3 arriba del 4 tachado) para agregárselas al 5 (se tacha el número cinco) obteniendo así 15 (se pone arriba del 5 tachado). Así se tiene una sustracción en la que se puede restar sin problemas unidades con unidades y decenas con decenas como se muestra en la Figura 31. Por extensión, este procedimiento se puede llevar a cabo con otros números de un ámbito numérico mayor, como se muestra en la Figura 32. Se recomienda, para cuarto básico, continuar con el uso de estas estrategias con el objetivo de consolidarlas ampliando el ámbito numérico hasta 1000.

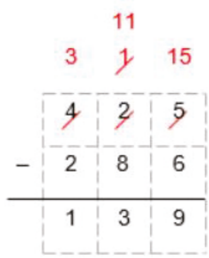


Figura 32. Algoritmo estándar de la sustracción con reserva con número de tres dígitos

ERRORES EN LA ESTRUCTURA ADITIVA

Muchos de los errores que manifiestan los estudiantes en la adición y sustracción se deben a la escasa comprensión de la TM que se les plantea y a las dificultades en la ejecución de los procedimientos algorítmicos (Flores, Castro-Rodríguez y Fernández, 2015).

Con respecto a errores de comprensión de la TM, se destacan aquellos que emergen como resultado del uso de la palabra "más" en el enunciado de la situación siguiente:

> Ricardo tiene 5 láminas y tiene 3 más que Roberto. ¿Cuántas láminas tiene Roberto?

El estudiante interpreta la palabra "más" como una adición dejando de lado el contexto de la TM. De esta manera, en lugar obtener la respuesta mediante 5 – 3, lo hace sumando 5 + 3.

Con respecto a los errores asociados al algoritmo estándar es posible mencionar los siguientes:

a. Error al ubicar los dígitos de los números con los cuales se opera. Este error está relacionado con una incorrecta ubicación de los valores posicionales de los dígitos, como se observa en la Figura 33.

$$\begin{array}{r} 125 \\ +\ 47 \\ \hline 595 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 327 \\ -\ 21 \\ \hline 117 \end{array}$$

Figura 33. Error de ubicación valor posicional de números para operar (adaptado de Flores, Castro-Rodríguez y Fernández, 2015)

b. Error en el cálculo. En este tipo error los estudiantes no logran aplicar correctamente los algoritmos de cálculo. Por ejemplo, al restar dos números de más de un dígito, se comete el error de no considerar cuál es el minuendo y cuál es el sustraendo y resta siempre el dígito menor al mayor en cada valor posicional, evitando la reserva (préstamo o canje). Situación similar sucede con la adición en la cual el estudiante no considera la reserva. Tales errores se muestran en la Figura 34.

$$\begin{array}{r} 245 \\ +172 \\ \hline 317 \end{array}$$

No considera la reserva

$$\begin{array}{r} 431 \\ -183 \\ \hline 352 \end{array}$$

Resta el dígito menor al dígito mayor en cada valor posicional, sin considerar el minuendo y el sustraendo.

Figura 34. Dificultades en la reserva de la sustracción y adición (Adaptado de Agencia de Calidad de la Educación, p. 19)

Es importante como docentes tener en cuenta estos errores dado que emergen frecuentemente durante el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción. Estos errores están asociados a factores de la enseñanza, y se relacionan con un énfasis en la reproducción de algoritmos, en contraste con un aprendizaje centrado en la construcción de conocimiento con significado y sobre la base de aprendizajes previos, estrategias idóneas y TMs contextualizadas.

REFLEXIONES FINALES

Este capítulo ha abordado un tema fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, como es la estructura aditiva. En concreto, se ha dado énfasis a las estrategias de composición y descomposición aditiva, como conocimiento base para abordar la adición, la sustracción y sus algoritmos estándar.

Es sabido que por mucho tiempo las técnicas y algoritmos de cálculo han jugado un rol primordial en la enseñanza y aprendizaje de la estructura aditiva. No obstante, hoy existe un conocimiento claro acerca de la necesidad, por parte de los estudiantes, de una comprensión profunda acerca de los fundamentos que justifican las distintas acciones que se llevan a cabo al momento de aplicar algoritmos u otros procedimientos de cálculo. Aquí se ha buscado dar una mirada diferente en torno a estas técnicas de cálculo y a la aplicación de los algoritmos estándar. Se ha pretendido ilustrar que los estudiantes pueden abordar estas técnicas y algoritmos de una manera más accesible, comprensiva y significativa.

Además, se ha querido compartir un modelaje sobre actuaciones hipotéticas de resoluciones de adiciones y sustracciones por parte de estudiantes de primero a cuarto básico usando la estrategia de la composición y descomposición aditiva. Este modelaje puede ser de gran utilidad para la enseñanza. Para su abordaje, se exige el uso y el tránsito por diferentes sistemas de representación (concreto-pictórico y simbólico), así como TMs que apunten a los aspectos conceptuales clave que se busca estudiar.

La composición y descomposición aditiva juega un rol fundamental, pues define la base para comprender cómo y por qué surgen los algoritmos de la adición y la sustracción, que comúnmente son utilizados y estudiados en las aulas. Con esto, no se quiere decir que estas estrategias son las más idóneas o las únicas que existen, sino más bien, se busca compartir su conveniencia en término de su fácil adquisición y comprensión, así como su utilidad por parte de los estudiantes.

Finalmente, aquí también se ha querido recoger y relacionar las propuestas y lineamientos curriculares, los textos escolares del Programa Sumo Primero en Terreno y los aportes provenientes desde la Didáctica de la Matemática en relación al tema central de este capítulo. Desde donde se pudo apreciar, una comprensión de la composición y descomposición aditiva como un aspecto basal permite realizar comprensivamente las técnicas de cálculo y los algoritmos estándar de la adición y sustracción.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores. Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas.* Santiago de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf.

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Madrid: CCS.

Cañadas, M., y Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 75-98). Madrid: Pirámide.

Castro, E., Cañadas, M., y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11. Recuperado de https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/115

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada: Comares.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1995). *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis.

Cid, E., Godino J., y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 155-270). Universidad de Granada.

Crawford, D. B. (2002). *Mastering math facts in your classroom.* Eau Claire, WI: Otter Creek Institute.

Flores, P., Castro-Rodríguez, E., y Fernández, J. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria* (pp. 205-229). Madrid: Pirámide.

Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research y Practice*, *7*(4), 210-216.

Isoda, M., y Cedillo, T. (2012a). *Matemática para la educación normal (tomo II, volumen 1).* México: Pearson.

Isoda, M., y Cedillo, T. (2012b). *Matemática para la educación normal (tomo II, volumen 2).* México: Pearson.

Isoda, M., y Estrella S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 1° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME1_web.pdf

Isoda, M., y Estrella S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella S. (2020d). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Sumo Primero: Guía didáctica del docente 1° básico (tomo I)*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile (2013a). *Programa de estudio primer año básico: Matemática.* Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2013b). *Programa de estudio segundo año básico: Matemática.* Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2013c). *Programa de estudio tercer año básico: Matemática:* Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2013d). *Programa de estudio cuarto año básico: Matemática:* Santiago, Chile.

Nava, M., Rodríguez, L., Romero, P., y Vargas, M. (2010). *Fortalecimiento del pensamiento numérico mediante las regletas de Cuisenaire.* Bogotá: IPARM.

Zúñiga, M. (2014). El aprendizaje de la descomposición aditiva en la Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 5 y 6 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *3*(2), 84-113. Recuperado de https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/134

La multiplicación: Perspectivas de enseñanza

DANIELA BONILLA-BARRAZA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

NIELKA ROJAS
Universidad Católica del Norte

INTRODUCCIÓN

Si a los estudiantes que han finalizado el primer ciclo básico les realizamos la pregunta ¿Qué entiendes por multiplicación?, es posible que se obtengan distintas respuestas, tales como "es una suma" o la "cantidad de veces que se repite un número". Lo anterior, se fundamenta en el hecho que, si la multiplicación se introduce únicamente en la enseñanza a partir de una adición iterada o reiterada; o bien, como saltos iguales de *n en n*, es probable que los estudiantes la comprendan estrictamente de manera aditiva.

Para comprender el significado de multiplicación, es esencial diferenciar la estructura multiplicativa de la estructura aditiva, entendiendo, que las tareas del ámbito multiplicativo requieren un mayor nivel de abstracción (Isoda y Olfos, 2009; Ivars y Fernández, 2016; Martínez, Rojas y Rojas, 2018). Por ejemplo, la frase "vendrán mis tres hermanos y mis dos hijos" se ubica en el ámbito aditivo, en cambio la frase "vendrán dos hijos de cada uno de mis tres hermanos" se ubica en el ámbito multiplicativo.

Isoda y Olfos (2009) proponen la conceptualización de la multiplicación como una operación que permite determinar el total de elementos dispuestos en grupos de igual cantidad, por ejemplo "cuántos huevos hay en tres cajas de 12 huevos", que permite trabajar las operaciones de multiplicación y división conectadas y fundamentadas en dos nociones más generales como es la suma repetida y el producto de medidas.

Este capítulo hace una invitación a los docentes, que buscan herramientas para incorporar en la enseñanza de primer ciclo básico, tareas matemáticas en contextos y asociadas a los significados, de manera que la actividad matemática tenga significado para los estudiantes y los motive en sus aprendizajes.

La sección se organiza en tres apartados, la primera parte introduce elementos conceptuales de multiplicación y sus interpretaciones en la enseñanza, se distingue la estructura multiplicativa, conceptos claves de la multiplicación e interpretaciones para su enseñanza. En el segundo momento se presentan sugerencias de tareas matemáticas y su gestión en el aula, así como errores y dificultades usuales que se pueden presentar al resolver tareas multiplicativas. Finalmente, se enuncia conclusiones y orientaciones para que los profesores puedan considerar al momento de planificar el tema de la enseñanza de la multiplicación.

LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN LOS NÚMEROS NATURALES

Harel y Confrey (1994) proponen que los estudiantes puedan construir un modelo multiplicativo independiente del modelo aditivo, siendo esencial la construcción de unidades en los procesos de conteo. Por ejemplo, hay cuatro platos con tres manzanas cada uno, entonces un grupo representa la unidad y al mismo tiempo cada unidad tiene tres elementos, como se ilustra en la Figura 1.

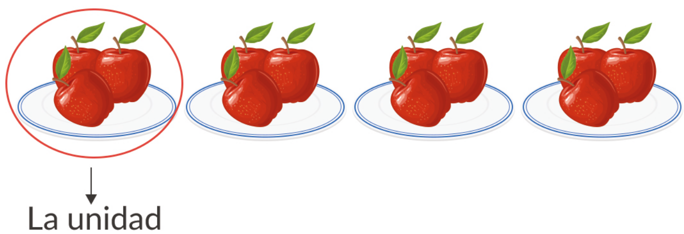


Figura 1. Unidades en los procesos de conteo.

La unidad se comprende como una medida arbitraria, en este caso la unidad corresponde a un plato que a su vez tiene tres manzanas, que se puede interpretar como "3 multiplicado por 4 es igual a 12", como se presenta en la Figura 2.

3 manzanas en cada plato	4 platos				12 manzanas en total
	3	×	4	=	12
Cantidad de manzanas en cada plato	Cantidad de platos				Cantidad total
Se lee "3 multiplicado por 4 es igual a 12", que es lo mismo que: 3 + 3 + 3 + 3 = 12, que escribimos como 3×4=12.					

Figura 2. Modelo de interacción, en que un número actúa en función de otro.

Al resultado se le denomina producto y la operación que permite encontrar el valor es la multiplicación. Esta se puede expresar como $a \times b = c$, que tiene como significado contar los elementos que están agrupados en "*b*" grupos que contienen "*a*" elementos cada uno. Por tanto, "*b*" indica el número de grupos que hay y "*a*" los elementos u objetos de cada grupo.

El factor *a* es el multiplicando, y el factor *b* el multiplicador. El producto *c* es el resultado de la multiplicación. Podemos indicar que la multiplicación es una operación matemática que se enfoca en el estudio de grupos iguales y que permite calcular el total de elementos, cuando se conoce la cantidad de elementos de cada grupo y la cantidad de grupos. Para su notación se emplea entre los factores el signo × , · , * que se lee "multiplicado por".

El multiplicando, corresponde a la cantidad de los elementos en cada grupo. Desde la interpretación de la multiplicación como una suma iterada, es el número que debe ser sumado tantas veces lo indique el multiplicador para obtener el producto. El multiplicador, corresponde a la cantidad de grupos iguales. Desde la interpretación de la multiplicación como una suma iterada, es el número que indica cuántas veces ha de sumarse el multiplicando para obtener el producto. El producto es el resultado de la multiplicación, que corresponde a la cantidad total de elementos.

Para construir la estructura multiplicativa es necesario en la enseñanza generar instancias de resolver actividades de agrupamientos, trabajar en el modelo parte – todo (múltiplos y submúltiplos). Interpretar la multiplicación como una acción de agregar cantidades iguales en grupos de cosas, de manera consecutiva. Y finalmente establecer relaciones de correspondencia, entre la cantidad de elementos y la cantidad de grupos a través de situaciones cotidianas. Estas ideas potencian la estructura multiplicativa y dan cuenta que enseñar a multiplicar va más del allá del algoritmo y de la memorización de las tablas de multiplicar.

FORMAS DE INTERPRETAR LA MULTIPLICACIÓN EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Isoda y Olfos (2009) distinguen dos interpretaciones para la multiplicación, las cuales se presentan a continuación, para ello analicemos la tarea de la Figura 3.

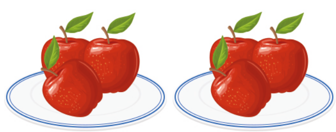


Figura 3. Expresión matemática de la multiplicación.

Si expresamos la situación como una multiplicación, suelen surgir dos interpretaciones 3×2 o 2×3 ¿De qué manera es correcto expresar la tarea matemática? Analicemos cada caso:

CASO 1: 3×2

Desde la Aritmética Teórica, el producto está dado por las definiciones inductivas de Dedekind y Peano, que se sostienen en que $M \times (N + 1) = M \times N + M$, de modo que la expresión 3×2 se lee "dos veces tres" o "tres, dos veces". Consecuentemente, $3\times(2+1) = 3\times2 + 3$, pues se suma a los dos grupos iniciales un nuevo grupo. De esta manera, la tabla del 3 se representa de la siguiente forma:

$$3\times1 = 3$$
$$3\times2 = 3 + 3$$
$$3\times3 = 3 + 3 + 3$$
$$\ldots$$

En esta interpretación el multiplicando (número de elementos por grupo) es el primer componente y el multiplicador (número de grupos) es el segundo factor. La situación presentada se lee "hay 3 manzanas en cada plato y hay dos platos, en total hay 6 manzanas".

VENTAJAS DE LA INTERPRETACIÓN MULTIPLICANDO × MULTIPLICADOR

a. Facilita la construcción de la tabla de multiplicar: si el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta en una vez la cantidad del multiplicando. Por ejemplo, $3\times2 = 6$; $3\times3 = 3\times2 + 3$
b. Da sentido a la expresión "por", pensando en "multiplicado por".
c. Facilita la comprensión del 3×0, teniendo en cuenta que si el multiplicador disminuye en 1, el producto disminuye en una vez la cantidad del multiplicando. Por ejemplo, $3\times1= 3$; $3\times0 = 3\times1 - 3 \rightarrow 0$
d. Es coherente al uso cotidiano de la multiplicación, por ejemplo: compré 5 kg de pan a 900 pesos cada uno. Para calcular el producto usualmente se multiplica en orden 900 (pesos/kilo) × 5(kilos), indicando el multiplicador a la derecha.

CASO 2: 2×3

El producto de 2×3 se lee "2 veces 3", lo que se escribe como 3+3. Así, la tabla del 2 se puede representar de la siguiente manera:

$$2\times1 = 1 + 1$$
$$2\times2 = 2 + 2$$
$$2\times3 = 3 + 3$$

En esta interpretación el multiplicador (número de grupos) es el primer factor y el multiplicando (número de elementos) es el segundo factor. Por tanto, la situación presentada se lee "hay 2 platos con tres manzanas en cada plato, en total hay 6 manzanas" .

VENTAJAS DE LA INTERPRETACIÓN MULTIPLICADOR × MULTIPLICANDO

Se ajusta gramaticalmente al uso del término "veces" en el orden propuesto. Por ejemplo, 2×3 = 6, se lee "2 veces 3 es igual a 6".

Se ajusta a la notación algebraica, como por ejemplo la fórmula que representa el perímetro de un cuadrado de lado n unidades es $P= 4\times n$ en este caso el multiplicador se presenta a la izquierda.

Coincide con la descomposición polinomial del sistema de numeración decimal. Para un número de tres cifras, se simboliza como: $100\times a + 10\times b + 1\times c$. En este caso el número de grupos(multiplicador) se presenta a izquierda.

En resumen, se plantean dos formas de plantear la operación a partir de la situación. La primera con el multiplicador a la derecha: 3×2 (hay 3 manzanas en cada plato y hay 2 platos) y la segunda a la izquierda: 2×3 (hay 2 platos, con 3 manzanas en cada plato), por lo tanto, dependerá de los contextos de las tareas matemáticas que se presentan el tipo de interpretación que debe darse.

OTROS SIGNIFICADOS DE MULTIPLICACIÓN

Representar en arreglos bidimensionales la multiplicación considerando elementos en filas y columnas, igual permite introducir el significado de multiplicación conectando con la noción de área (objetos discretos) que se trabaja en tercer año básico. Llevando a transitar a la multiplicación por medio del área de un rectángulo que corresponde a un arreglo en filas y columnas.

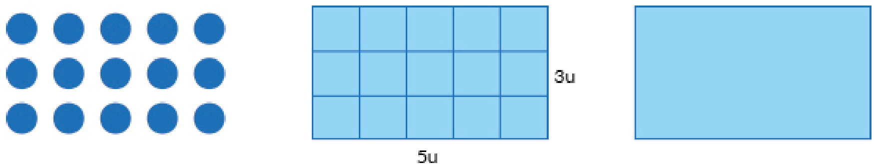


Figura 4. Multiplicación por medio del área de un rectángulo.

La multiplicación es la que ordena los elementos en filas y columnas, correspondiendo cada fila a un grupo y el número de columnas, a los elementos de esos grupos. Los elementos pueden ser presentados en 3 filas y 5 columnas, como lo muestra la Figura 4. El producto de los números 3×5 se puede interpretar como el área de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 5 unidades (*u*).

Trabajar la multiplicación como área de un rectángulo es un medio para introducir a partir de representaciones figurales las propiedades de la conmutatividad y distributividad que se estudian con profundidad en segundo ciclo, además permite trabajar la visualización geométrica desde niveles iniciales.

Un tercer significado para la multiplicación se asocia con combinaciones; es decir, productos de medidas que consiste en la composición cartesiana de espacios de medidas. Por ejemplo, problemas como tenemos 3 tres sabores de helados (leche, mora, chocolate) y puede servirse en cono o envase, ¿cuántas combinaciones de helados son posibles? Tenemos 3 tipos de sabores y por cada uno de ellos, podemos elegir entre cono o envase pequeño. Esto nos da 3×2 = 6 posibilidades para servirse helados. Podemos representar lo anterior en una tabla de doble entrada o en un diagrama, como se presenta en la Tabla 1 y Figura 5.

Tabla 1. Combinaciones de helado

HELADO / ENVASE	LECHE	MORA	CHOCOLATE

Cada combinación (par) representa una elección de envase para la primera componente, y una elección de sabor de helado para la segunda. Este tipo de tarea matemática se puede representar en diagramas, tal como se ilustra en la Figura 5.

Figura 5. Combinaciones de helados en diagramas.

Los significados definidos que se asocian a la multiplicación cumplen las propiedades de la multiplicación: conmutatividad, asociatividad, distributividad de la multiplicación sobre la suma y resta y elemento absorbente. Estas pueden ilustrarse a partir de arreglos bidimensionales y tridimensionales (para el caso de la distributividad) o mediante diagramas.

En este capítulo, abordamos la primera interpretación para la enseñanza de la multiplicación, con el multiplicador a la izquierda.

LA MULTIPLICACIÓN EN EL CURRÍCULO NACIONAL

El currículo escolar propone objetivos de aprendizaje para cada nivel escolar, asociados a los conceptos de multiplicación y sus propiedades. Interpretando inicialmente la multiplicación como una adición de sumandos iguales, para posteriormente construir las tablas de multiplicar hasta el 10×10. Permitiendo finalmente resolver multiplicaciones de tres dígitos por un dígito, a través de variadas estrategias, resolviendo problemas y haciendo uso del modelo COPISI (representación concreta, pictórica y simbólica), según se sintetiza en la Tabla 2.

Tabla 2. La multiplicación en el currículo escolar

Segundo año básico	Tercer año básico	Cuarto año básico
OA 11: Demostrar que comprende la multiplicación: • Usando representación concreta y pictórica. • Expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales. • Usando la propiedad distributiva (tablas del 2,5 y 10). • Resolver problemas que involucren las tablas del 2, 5 y del 10.	**OA 8:** Demostrar que comprende las tablas de multiplicar hasta el 10: • Usando representación concreta y pictórica. • Expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales. • Usando la propiedad distributiva (tablas del 2, 5 y 10). • Resolver problemas que involucren las tablas hasta el 10.	**OA 5:** Demostrar que comprende la multiplicación de números de tres dígitos por un número de un dígito: • Usando estrategias con o sin material concreto. • Usando las tablas de multiplicación. • Estimando productos. • Usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. • Aplicando el algoritmo de la multiplicación. • Resolviendo problemas rutinarios.

Queda expuesto que en la enseñanza de la multiplicación se debe complementar el proceso con tareas matemáticas que fortalezcan la estructura multiplicativa, a través de la utilización de diversas estrategias de resolución y aportando desde la gestión a la construcción del concepto de multiplicación.

TAREAS MATEMÁTICAS Y ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN

En el siguiente apartado se presentan tareas matemáticas para los niveles de 1° a 4° año básico, de acuerdo a la progresión curricular para el trabajo de la multiplicación. Además, se enuncian orientaciones para su implementación.

a. Primer año básico

Martínez et al. (2018) e Isoda y Olfos (2009) sostienen que los estudiantes pueden resolver situaciones multiplicativas desde la Educación Infantil, concretamente entre 4 a 6 años de edad, haciendo uso de estrategias informales que orientan a la construcción de unidades en los procesos de conteo, esta acción se reconoce como el inicio del pensamiento multiplicativo. Según las Bases curriculares (MINEDUC, 2012) la multiplicación se inicia a partir del segundo año, por lo cual se sugiere ir contribuyendo al desarrollo del pensamiento multiplicativo a través del conteo desde niveles iniciales.

A continuación, se propone a modo de ejemplo una tarea matemática, adaptada de Martínez et al. (2018) con sus respectivas orientaciones didácticas, según Figura 6.

En la figura se muestra un grupo de dos fichas sobre la mesa. Si detrás de los libros se han escondido otros tres grupos iguales. ¿Cuántas fichas hay escondidas?

Figura 6. Tarea matemática para 1° año básico.

ORIENTACIONES PARA SU IMPLEMENTACIÓN

Se sugiere presentar las fichas (material concreto) y preguntar a los estudiantes, si hay escondido tres grupos iguales al que está sobre la mesa ¿cuántas fichas hay escondidas?, las posibles estrategias de resolución se pueden clasificar en:

- Doble conteo por múltiplos de dos: de esta manera cuentan en forma paralela la cantidad de grupos y la cantidad de fichas que tiene cada grupo. Es posible que se puedan apoyar de representaciones concretas (uso de los dedos de las manos) y pictórica (dibujar los grupos escondidos).
- Doble conteo, realizando pausa en los múltiplos de dos. Por ejemplo, pueden contar 1, 2, (pausa), 3, 4, (pausa), 5, 6, (pausa).

Esta tarea promueve la introducción del uso de la unidad como “un grupo de 2 fichas rojas, obteniendo como resultados 6 fichas rojas”.

b. Segundo año básico

En este curso, el currículo escolar propone introducir la multiplicación usando representaciones concretas y pictóricas; expresándola como adición de sumandos iguales.

A modo de ejemplo, se presenta una tarea matemática, adaptada del libro[8] del estudiante Sumo Primero de 2° año básico, que se ilustra en la Figura 7.

Determinar el número total de objetos en grupos con la misma cantidad. 2 platos con choclos:

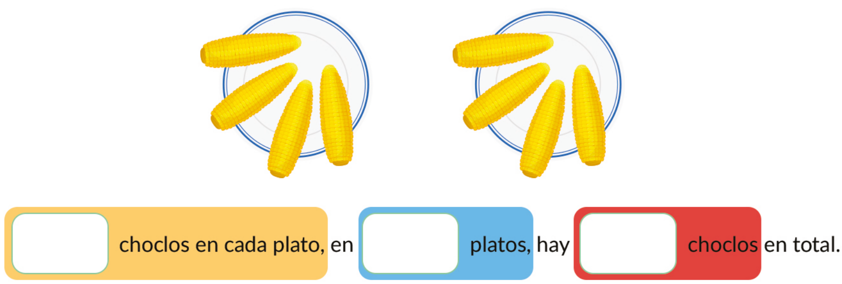


Figura 7. Tarea matemática para 2° año básico.

La situación muestra “2 platos con 4 choclos en cada plato, en total 8 choclos”, el multiplicando corresponde al número que simboliza la cantidad de elementos de cada grupo, en este caso 4 elementos (choclos) y el multiplicador es el número que representa la cantidad de grupos, estos serían 2 (platos). El producto es el número, que representa la cantidad total de elementos, correspondiendo a 8 (choclos).

Se escribe 4×2= 8, se lee “cuatro multiplicado por dos es igual a ocho” o “dos veces cuatro es ocho”. La misma situación se puede interpretar como una adición iterada de 4+4, en este sentido el multiplicando (4) es el número que se repite como sumando tantas veces lo indique el multiplicador (2).

Los estudiantes pueden comprender la idea de grupos iguales y desde allí conceptualizar la multiplicación como una operación que se encarga de estudiar dichos grupos. Reforzando la idea de correspondencia, entre la cantidad de

8 Disponible en https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

elementos y el grupo respectivo, a partir de analizar la multiplicación como cardinal del conjunto producto cartesiano de A×B; es decir, $p \times q = card(A \times B)$, en que $card(A)=p$ y $card(B)=q$.

c. Tercer año básico

Una vez abordado el tema de las tablas de multiplicar, se pueden presentar situaciones como la descrita en la Figura 6, para reforzar e introducir la descomposición multiplicativa de un número (modelo parte-todo). Esta idea, se puede trabajar inicialmente desde contextos discretos (arreglos, puntos) para luego generalizar desde lo continuo, usando cálculo de áreas.

Se dispone de fichas circulares y un rectángulo:

a) ¿Cuántas fichas pueden entrar al interior del rectángulo?
b) ¿Hay otros rectángulos en que pueden entrar las 12 fichas? Represéntalas.

Figura 8. Tarea matemática para 3° año básico, adaptada de Isoda y Olfos (2009, p. 60).

Para la tarea matemática de la Figura 8, se muestra una propuesta de pizarra hipotética (ver Figura 9) diseñada por una profesora[9] en ejercicio participante del programa Sumo Primero en Terreno durante el año 2020.

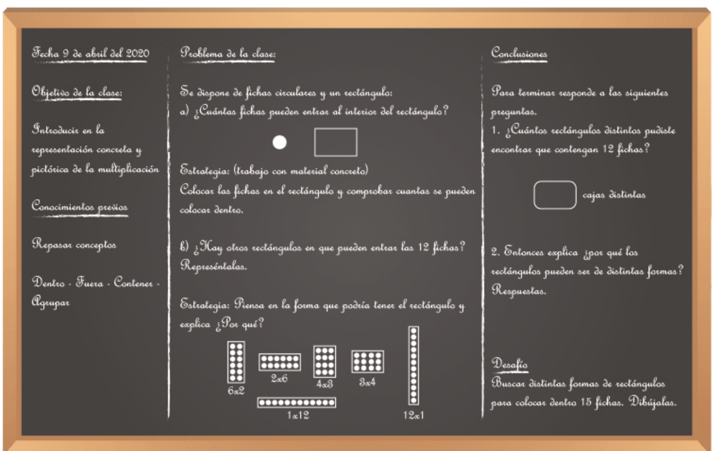


Figura 9. Implementación de la tarea matemática “fichas en un rectángulo “para 3° año básico.

La pizarra se organiza en tres partes, según se observa y la tarea se trabaja con el modelo COPISI. Se promueve el uso de material concreto (fichas circulares y un rectángulo), donde los estudiantes pueden disponer de distintas maneras las fichas en arreglos rectangulares.

9 Rosa Pilar Rivera - Escuela el Guindo. Ovalle, Cuarta Región, Chile.

La tarea matemática es un problema abierto, que puede entregar múltiples respuestas, los estudiantes entienden un número con su correspondiente descomposición multiplicativa, representación pictórica (arreglos) y simbólica (expresión matemática) asociada. Esta idea es fundamental para comprender más adelante la división como operación inversa de la multiplicación.

d. Cuarto año básico

Presentamos dos tareas que forman una secuencia de actividades de conteo que promueven la utilización de diversas estrategias con el objeto de aproximar y consolidar estrategias multiplicativas (de agrupamiento) en estudiantes de 4°año Básico. La gestión de las tareas va desde lo concreto hacia lo simbólico, siguiendo el modelo COPISI.

A continuación, se presenta un análisis a priori de las tareas matemáticas y orientaciones para su gestión en el aula.

Observe la figura y responda:

a) ¿Cuántos círculos hay?
b) ¿De qué manera se puede agrupar para contar fácilmente?

Figura 10. Tarea matemática para 4° año básico, adaptada de Isoda y Olfos (2009, p. 76)

La tarea matemática puede ser abordada a partir de las siguientes estrategias: conteo uno a uno, conteo en grupos distintos, conteo en grupos iguales y grupos distintos, conteo en grupos iguales, lo que deriva en estrategias aditivas y estrategias multiplicativas. A continuación, se presentan ejemplos de estrategias utilizando el modelo COPISI, desde la representación concreta (25 monedas) transitando a las representaciones pictórica (arreglos) y simbólica (expresiones numéricas).

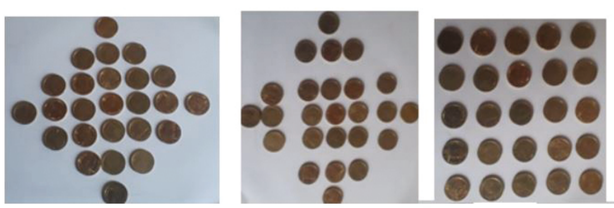
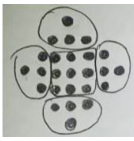
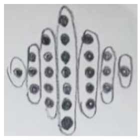
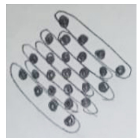
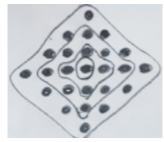
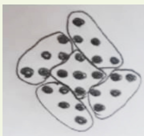


Figura 11. Representación concreta

Representación concreta: Se propone representar utilizando monedas ordenadas como aquella de la distribución original y reorganizarla de otras formas para realizar agrupamientos y facilitar el conteo (Figuras 10 y 11).

Representaciones pictóricas y simbólicas: A partir de la manipulación del material concreto, en este caso monedas, los estudiantes pueden realizar distintas agrupaciones que facilitan el conteo de los puntos.

Tabla 3. Estrategias de resolución de tareas de grupos iguales y distintos.

Representación/ Estrategias	E1	E2	E3	E4
Pictórica				
Simbólica	a. 4+4+4+4+9 b. 4×4 + 9	a. 1+3+5+7+5+3+1 b. (1+3+5)×2 + 7	a. 4+3+4+3+4+3+4 b. 4×4 + 3×3	a. 12+8+4+1
	E5	E6	E7	
Pictórica				
Simbólica	a. 5+5+5+5+5 b. 5×5	a. 5+5+5+5+5 b. 5×5	a. 5+5+5+5+5 b. 5×5	

Las estrategias se diferencian en que algunas realizan grupos con misma cantidad de elementos y otros grupos con diferentes cantidades, y nuevas estrategias que se relacionan con la utilización de grupos iguales, ya sea, usando la representación original de la tarea o proponiendo distintas distribuciones de los puntos (Tabla 3).

Es importante que los docentes, puedan distinguir las estrategias multiplicativas, esto es, agrupamientos de igual cantidad de elementos por sobre las estrategias aditivas.

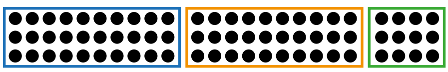
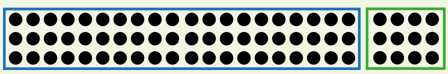
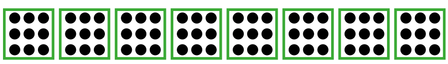
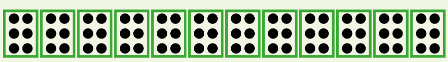
Se propone el cierre de la actividad, respondiendo a la siguiente pregunta ¿Cuáles de las formas presentadas corresponde a agrupaciones para multiplicar?

La tarea matemática (descrita en la Figura 12) se presenta con el propósito de valorar el uso de la estrategia de descomposición de uno de los factores, y posterior utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición para calcular productos en este ámbito numérico.

1. Observe la figura y responda:
   a) ¿Cuántos círculos hay?
   b) ¿De qué manera se puede agrupar para contar fácilmente?
   c) ¿Cuál es la frase matemática que se relaciona con la representación de puntos de la figura?

Figura 12. Tarea matemática para emplear propiedad distributiva.

Tabla 4. Estrategias de conteo, descomposiciones aditivas y multiplicativas

Representación / Estrategias	Pictórica	Simbólica
E1		$3\times24 = 3\times(10+10+4)$ $= 3\times10 + 3\times10 + 3\times4$ $= 72$
E2		$3\times24 = 3\times(20+4)$ $= 3\times20 + 3\times4$ $= 72$
E3		$(3\times3)\times8 = 9\times8$ $= 72$
E4		$(3\times2)\times12 = 6\times12$ $= 72$

Es posible que en la resolución de la tarea matemática planteada puedan surgir diversas estrategias, estas pueden ser: descomposiciones aditivas de los factores, descomposiciones multiplicativas, aproximaciones, uso de propiedades, entre otras. A continuación, se presentan estrategias de resolución usando representaciones simbólicas y pictóricas (ver Tabla 4).

Es importante que el docente invite a los estudiantes a generar una discusión, expresando preguntas como: ¿Qué ventajas presenta una estrategia en relación con otra?, ¿Cuál de ellas facilita el cálculo numérico? Una vez explorada cada estrategia, es necesario que el docente institucionalice cada una de ellas. Además, gestione las conclusiones de la clase, en este caso en función de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición como una estrategia que favorece este tipo de cálculo. Presentar y analizar tareas matemáticas que insten al cálculo mental, como por ejemplo proponer una multiplicación con una calculadora, en el cual se indique que la tecla de multiplicar está estropeada.

ERRORES MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA

Ivars y Fernández (2016) indican que los estudiantes desde los primeros cursos disponen de estrategias informales que les permiten resolver problemas de la estructura multiplicativa. Sin embargo, a medida que avanzan los cursos, van prescindiendo de estas estrategias y se utiliza, casi exclusivamente, la aplicación del algoritmo estándar para la multiplicación, lo cual conlleva a un mayor número de errores en el cálculo de la operación.

En la misma línea, el documento aprendiendo de los errores[10] de la Agencia de la Calidad de la Educación (2019) entrega información sobre errores relacionados con los valores posicionales de las cantidades, al registrar los canjes de una multiplicación. Reportándose que estudiantes de 4° año básico registran la unidad como “reserva” y la decena como parte del producto, tal como se indica en la Figura 13.

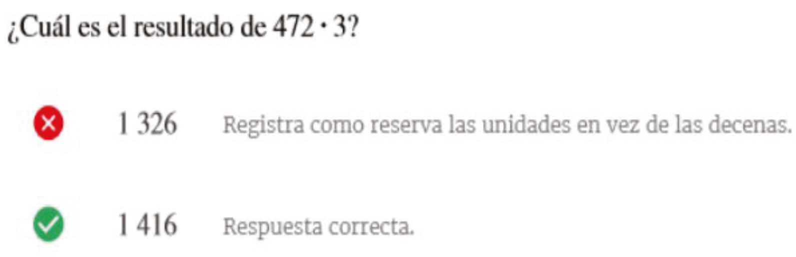


Figura 13. Error de canje en una multiplicación, estudiantes de 4° año básico

Por lo cual, el resultado de 472·3 erróneamente se asocia a la cantidad 1326, porque al aplicar el algoritmo estándar “se equivocan” en la parte que multiplican 3·7 registrando el dígito 2 en el producto y reservan el dígito 1 en las centenas, lo que hace que al multiplicar 34 sumen 1 y resulte el registro de los dígitos 1 y 3 en producto, quedando erróneamente 1326. Este tipo de errores puede deberse a que no han aprendido el algoritmo estándar o falta de una comprensión conceptual del proceso algorítmico, o bien, que su conocimiento procedimental no se afianza del todo; por ello, es importante que los docentes refuercen en sus estudiantes la necesidad de comprender el algoritmo luego de trabajar los significados asociados

10 Puede consultar el documento en el siguiente enlace: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/4490/Aprendiendo_de_los_errores_4_basico_Final.pdf?sequence=1&isAllowed=

a la multiplicación, en este proceso es esencial el empleo de representaciones para trabajar el concepto matemático.

Para el caso de la multiplicación de un número de varias cifras por uno de una sola cifra, que se trabajan en 4° año básico, es necesario comprender que el algoritmo se basa en la descomposición aditiva del primer factor y luego la multiplicación de cada una de estas cifras por el segundo factor; y que el resultado corresponde a la suma de todos los productos obtenidos. A continuación, se presentan estrategias para el cálculo de multiplicaciones, para comprender el algoritmo estándar, se complementa con el uso de distintas representaciones.

a. Descomposición aditiva. Para multiplicar se puede descomponer aditivamente uno de los factores y luego aplicar la propiedad distributiva. Por ejemplo, para resolver 6×9 se puede descomponer el factor derecho en (7 + 2), resultando:

$$6\times9 = 6\times(7 + 2) = 6\times7 + 6\times2 = 42 + 12 = 54$$

Podemos representar el producto usando un modelo discreto, que en el contexto escolar se promueve a partir de 2° año, básico de esta manera se ilustran distintas agrupaciones asociadas al mismo producto. En este caso, se muestra la descomposición aditiva, como una estrategia que facilita el cálculo numérico, como se ilustra en la Figura 14.

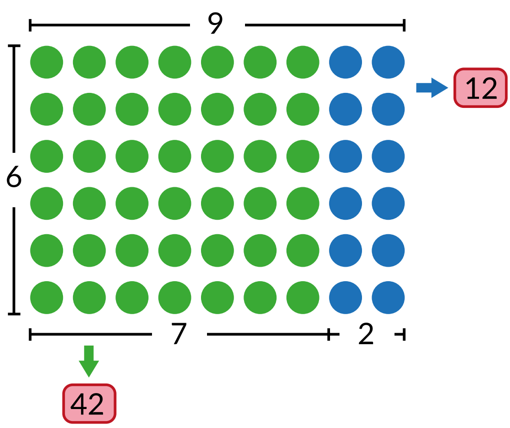


Figura 14. Representación de la multiplicación 6×9, usando la propiedad distributiva.

b. Descomposición aditiva canónica. Para resolver una multiplicación de un número de 3 dígitos por uno de un dígito, se puede descomponer aditivamente uno de los factores según el valor posicional de cada dígito y aplicar la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 472\times3 &= (400 + 70 + 2) \\ &= 400\times3 + 70\times3 + 2\times3 \\ &= 1\,200 + 210 + 6 \\ &= 1\,416 \end{aligned}$$

El proceso de la multiplicación se puede ilustrar con el tablero de valor posicional en que cada dígito se represente de acuerdo con su valor posicional. Por ejemplo, para calcular 472×3:

Paso 1: Representar el factor mayor 472; 4 centenas, 7 decenas, y 2 unidades.

Centena	Decena	Unidad
....	....	..

Paso 2: Repite el número de veces según indica el otro factor, según el ejemplo repetir 3 veces el 472.

Centena	Decena	Unidad
....	....	..
....	....	..
....	....	..

Paso 3: Reagrupa cuando sea necesario, realizando la conversión a unidades de orden superior. En este caso se reagrupan 20 decenas en 2 centenas, y luego 10 centena en una unidad de mil, llevando a la noción de "canjear".

Centena	Decena	Unidad
....	....	..
....	....	..
....	....	..

Centena	Decena	Unidad
....	.	..
....		..
....		..
..		

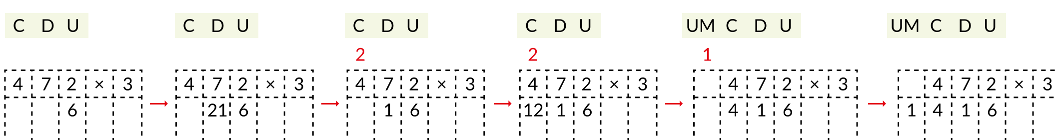
Unidades de mil	Centena	Decena	Unidad
.	....	.	..
			..
			..

Paso 4: Realizadas las conversiones se escribe el número resultante, de acuerdo al valor posicional.

Unidades de mil	Centena	Decena	Unidad
.	....	.	..
			..
			..

$$1 \times 1\,000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 6 = 1\,000 + 400 + 10 + 6$$
$$= 1\,416$$

Es relevante que los estudiantes, realicen tareas previas utilizando la descomposición aditiva y haciendo uso de representaciones para comprender qué significa la conversión a unidades de orden superior; y, posteriormente presentar el algoritmo estándar de la multiplicación, como una versión resumida de lo anterior como se exhibe a continuación.



EL ROL DEL MULTIPLICANDO Y EL MULTIPLICADOR EN LA CONSTRUCCIÓN DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

En 3° año básico se presenta el OA 8: Demostrar que comprende las tablas de multiplicar hasta el 10, para el alcance del objetivo se presentan algunas orientaciones para abordar las tablas de multiplicar.

a. **Para construir las tablas**, es relevante que los estudiantes comprendan que, si el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta en una vez la cantidad del multiplicando. Por ejemplo:

$$3\times 1 = 3$$
$$3\times 2 = 3\times 1 + 3 = 6$$
$$3\times 3 = 3\times 2 + 3 = 9$$

En el sentido de la multiplicación como adición iterada, es conveniente que los estudiantes perciban que se repite como sumando el multiplicando, tantas veces lo indique el multiplicador.

$$3\times 1 = 3$$
$$3\times 2 = 3 + 3 = 6$$
$$3\times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$$

Para ello se sugiere incluir en el proceso de enseñanza tareas que permitan el uso de distintas representaciones, además generar devoluciones o preguntas para fortalecer las ideas anteriores. Como se muestra en la siguiente tarea[11] (Figura 15), se invita a los estudiantes a construir la tabla de multiplicar del 3, a partir de representaciones pictóricas de las flores del chagual, las cuales se complementan con la presentación del arreglo rectangular y las representaciones simbólicas utilizando la expresión correspondiente al multiplicando por multiplicador. Permitiendo concluir que a medida que el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta en el número que indica el multiplicando, de esta manera se da sentido a las tablas de multiplicar y no se trabaja de forma memorística, debido a que se aplica la suma iterada como definición previa que proviene de los conteos de n en n.

11 Extraída de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

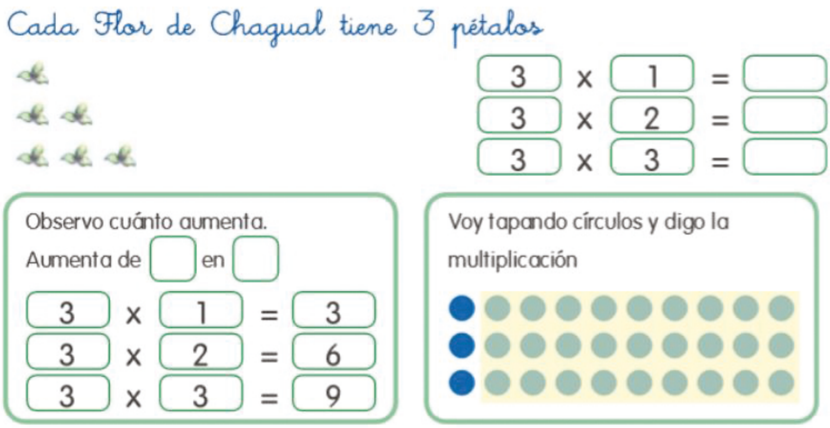


Figura 15. Tarea matemática, construcción tabla de multiplicar del 3 (Isoda y Estrella, 2020, p.40)

b. Resolución de problemas cotidianos

Es importante presentar tareas en contextos diversos que den sentido a los significados matemáticos y cobren interés para el estudiante. Por ejemplo, la tarea matemática de la Figura 16, involucra una la situación cotidiana “compra de frutas en una feria”.

> En la feria se vende distintas frutas. Si Diego compra 3 kilos de manzanas ¿Cuánto dinero gasta? ¿Cuál es la expresión matemática que utilizas para realizar el cálculo?

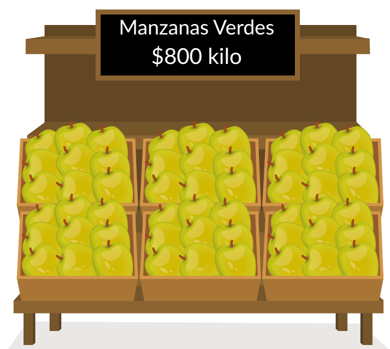


Figura 16. Tarea matemática, construcción tabla de multiplicar del 3.

Es probable que los estudiantes propongan la multiplicación 800 × 3, como la expresión matemática que permite encontrar la respuesta, independiente de la estrategia de resolución. De esta manera, la distribución de multiplicando multiplicador, es coherente al uso cotidiano de la multiplicación entregando sentido a la expresión “por”, pensando en “multiplicado por”.

c. Usos de propiedades

Es importante orientar la reflexión de los estudiantes hacia las propiedades de la multiplicación. Por ejemplo, con la tarea indicada en la Figura 17, se puede favorecer el uso de distintas propiedades de la multiplicación de números naturales. A partir del análisis de la tabla 100, en que cada celda sitúa el producto de cada celda de fila y columna correspondiente, es posible establecer las siguientes ideas:

Observa la tabla general de multiplicación ¿Qué características de los productos identificas?

Multiplicador

Multiplicando

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 17. Tabla 100.

Si el multiplicador es uno, el producto es igual multiplicando. Esta premisa favorece la comprensión de la propiedad del elemento neutro de la multiplicación; es decir, el 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque, cualquiera que sea el número natural a, se cumple que: $a \times 1 = a$.

En la multiplicación las respuestas son las mismas si el multiplicando y el multiplicador intercambian sus lugares. Por ejemplo, $2\times7 = 14$ y $7\times2 = 14$. A partir de estos ejemplos se puede introducir la propiedad conmutativa; es decir, si a y b son números naturales cualesquiera, se cumple que: $a \times b = b \times a$

Si descomponemos el multiplicador y luego sumamos, resulta lo mismo que multiplicar sin descomponer el multiplicador ($6\times8 = 6\times(5 + 3) = 5\times5 + 6\times3$), que indica que el producto que se sitúa en la celda con fila 6 y columnas 5 y 3 es igual a 6×8 (producto que se ubica en la fila 6 y columna 8). Esta idea ayuda a conceptualizar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición; es decir, si a, b y c son números naturales cualesquiera se cumple que: $a\times(b + c) = a\times b + a\times c$.

Cuando el multiplicador disminuye en 1, la respuesta disminuye el número que indica el multiplicando ($3\times4 = 12$ y $3\times3 = 3\times4 - 3$). Esta proposición favorece la justificación del producto $3\times0 = 0$; propiedad del elemento absorbente de la multiplicación en que para cualquier número a, tenemos que $a\times0 = 0$.

REFLEXIONES FINALES

Para fortalecer la enseñanza de la estructura multiplicativa es necesario plantear a los estudiantes tareas en diversos contextos que promuevan el agrupamiento, el concepto de unidad, la correspondencia entre cantidad de elementos y grupos, entre otros, permitiendo superar dificultades en la ampliación del concepto a otros sistemas numéricos, distintos a los números naturales, como son los racionales y los enteros.

Para el caso de la multiplicación entre un número natural y una fracción (número racional), se puede extender la premisa de que el producto se obtiene repitiendo el valor de unidad. Por ejemplo, para la multiplicación $2 \times \frac{1}{5}$, la unidad está representada por un quinto, el producto se obtiene repitiendo la unidad 2 veces.

Es interesante fomentar la resolución de tareas con unidades arbitrarias, previo al estudio del concepto de proporcionalidad; como por ejemplo tareas como "cajas rojas son tan largas como dos cajas verdes. ¿Cuántas cajas rojas tendrá una figura para que sea igual de larga a otra nueva que se armó con seis cajas verdes?". Para la gestión de la tarea se propone usar materiales concretos como las *Regletas de Cuisenaire* u otras, como se ilustra en la Figura 18.

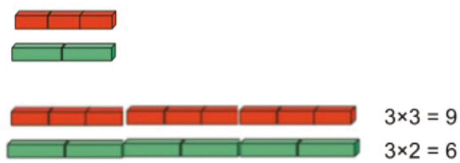


Figura 18. Tarea matemática con unidad arbitraria (Adaptada de Martínez et al., 2018).

Las orientaciones propuestas favorecen la conceptualización de razones, proporciones y otras áreas de las estructuras multiplicativas. Los estudiantes desde los primeros niveles educativos pueden resolver tareas que involucren el pensamiento proporcional, usando estrategias informales haciendo uso coordinado de unidades compuestas como la tarea anterior o por ejemplo "Luis tiene el triple de libros que Alicia. ¿Cuántos libros tiene Luis si Alicia tiene 4?".

Si los estudiantes logran interiorizar el concepto de multiplicación desde la idea de los grupos, consolidando el concepto de unidad es probable que presenten menos dificultades para la comprensión de la proporcionalidad. En caso del ejemplo de las cajas, al aumentar el número de cajas verdes en un cierto número, el número de cajas rojas aumenta proporcionalmente, lo mismo al aumentar el número de libros. Por lo cual, incorporar la idea de correspondencia entre dos cantidades, la cantidad de elementos y el número de grupos, favorece la comprensión del concepto de multiplicación y permite establecer relaciones matemáticas fundamentales para el trabajo en cursos superiores.

Finalmente, hay que destacar que la multiplicación es uno de los conceptos fundamentales de la enseñanza de la matemática, su enseñanza se debe asociar a los distintos significados, trabajar situaciones en variados contextos y que permitan el uso de múltiples representaciones.

Este capítulo desarrolla elementos del análisis didáctico sobre las tareas matemáticas, secuencias de tareas y de producciones de estudiantes, considerando variados significados de las tareas de multiplicación, su gestión, uso de recursos y representaciones. Por tanto, se propone complementar los elementos propuestos en este capítulo con los abordados en el currículo escolar, para así dar mayores oportunidades de aprendizajes significativos a los estudiantes.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores.* Santiago, Chile.

Harel, G., y Confrey, J. (1994). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.* State University of New York Press.

Isoda, M., y Estrella, S. (2020). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *Enseñanza de la multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas.* Ediciones Universitarias de Valparaíso: Chile.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009) *La enseñanza de la multiplicación: el estudio de clases y las demandas curriculares.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática*, *26*(1), 9-38. DOI: 10.24844/EM2801.01. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/405/40545377002.pdf

Martínez, N., Rojas, P., y Rojas, N. (2018). Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 157 - 181. DOI: 10.12802/relime.18.2122.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica.* Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/orientacion/2012/bases_curricularesbasica_2012.pdf

Nava, M., Rodríguez, L., Romero, P., y Vargas, M. (2010). *Fortalecimiento del pensamiento numérico mediante las regletas de Cuisenaire.* Bogotá: IPARM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170. Recuperado de https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/phocadownloadpap/CONSTRUC-EPISTEM-CUALITA/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

La enseñanza de la división centrada en la resolución de problemas

DANIELA BONILLA-BARRAZA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

NIELKA ROJAS
Universidad Católica del Norte

INTRODUCCIÓN

El currículo escolar nacional distingue la habilidad de Resolución de Problemas (RP) como foco principal de la enseñanza de la Matemática. Frente a ello, se declara que "Resolver problemas es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática" (MINEDUC, 2012, p. 87).

La Organización de las Naciones Unidades para la Educación, Ciencia y la Cultura (UNESCO, OREALC, 2013) puntualiza para la enseñanza de la matemática enfoques generales, realzando la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones en contexto y el desarrollo de la capacidad de argumentar y comunicar resultados como ejes centrales en educación. Diversos investigadores en Didáctica de la Matemática (Alfaro y Gormaz, 2009; Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009; Felmer et al., 2015) revelan que el trabajo de la RP, en la enseñanza es escaso y en el aula se caracteriza principalmente por la resolución mecánica de problemas por parte de los estudiantes.

Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas et al. (2015) en un estudio realizado con docentes chilenos sobre la RP en el aula, señalan que la dimensión gestión de la clase se produce en muy pocos casos, que la actividad del profesor promueve la discusión matemática, mientras que las acciones en que el profesor devuelve la responsabilidad se dan en un porcentaje mayor, pero aún bajo (10%). Además, declaran que hacer preguntas y entregar soluciones son las variables más frecuentes por parte de los docentes, lo que podría estar evidenciando una baja promoción de la RP.

Para apoyar a los estudiantes en el desarrollo de la RP, se recomienda a los docentes suscitar la resolución temprana de problemas matemáticos. Entendiendo que se habla de resolver problemas "cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir" (MINEDUC, 2012, p. 89).

Por otra parte, para comprender el significado de la división es necesario reconocer las distintas situaciones o fenómenos en que se aplica dicha operación, así como el aprendizaje de este tema se compone de aspectos fundamentales como el significado de las operaciones y el dominio del cálculo. El dominio de los elementos anteriores permite al enfoque de la RP generar demandas complejas en los estudiantes más allá del manejo de los algoritmos.

Este capítulo promueve la resolución de problemas en la enseñanza de la división para primer ciclo básico. Se organiza en tres instancias, en primer momento se presentan elementos del enfoque de RP japonés (Isoda y Olfos, 2014), como una estrategia didáctica para la enseñanza de la división, se entrega una propuesta para el estudio del resto de la división y orientaciones para su gestión en el aula. Luego, se presentan problemas matemáticos para la enseñanza de la división en los cursos de tercero y cuarto año básico (Vergnaud, 1997), se complementa con estrategias de resolución en coherencia con los objetivos de aprendizaje y se incorporan otras. Finalmente, se explicitan los errores frecuentes en el algoritmo de la división y se entregan orientaciones para abordar su enseñanza.

LA DIVISIÓN EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

El estudio de la división se inicia explícitamente a partir del tercer año de enseñanza básica, aunque los estudiantes en los cursos anteriores han abordado conceptos que aportan en su conceptualización, como la multiplicación.

En complemento, el MINEDUC (2018) recomienda iniciar la enseñanza de la división con problemas de reparto, aunque no se dé siempre en forma equitativa, transitando desde las representaciones concretas a las pictóricas, para lograr registros más abstractos o simbólicos. Por ejemplo: En la mesa hay 12 papayas, las quiero colocar en platos de 3 papayas. ¿Cuántos platos necesito?

Al mismo tiempo, según se registra en la Tabla 1, se puede identificar que los objetivos definidos buscan incorporar diversas situaciones o problemas, que se pueden resolver desde las estrategias sugeridas.

Tabla 1. Objetivos de aprendizaje para la división en primer ciclo (MINEDUC, 2012)

Niveles de educación básica	Cuarto año básico
OA9. Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas de hasta 10 x 10: • Representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales con material concreto y pictórico. • Creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación. • Expresando la división como una sustracción repetida. • Describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación. • Aplicando los resultados de las divisiones en el contexto de las tablas hasta 10x10, sin realizar cálculos.	OA6. Demostrar que comprenden la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito: • Usando estrategias para dividir con o sin material concreto. • Utilizando la relación que existe entre la división y la multiplicación. • Estimando el cociente. • Aplicando la estrategia por descomposición del dividendo. • Aplicando el algoritmo de la división.

A partir del análisis de los objetivos de aprendizaje para la división en primer ciclo se puede sintetizar que el aprendizaje de la división se compone de dos aspectos fundamentales: el significado de las operaciones y el dominio del cálculo. Para comprender el significado de la división, es necesario reconocer las distintas situaciones o fenómenos en que se aplica dicha operación.

RELACIÓN ENTRE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Isoda y Estrella (2020c) proponen para segundo año básico la multiplicación como una operación que permite calcular el total cuando hay el mismo número de objetos por grupo y se conoce la cantidad de grupos. Por ejemplo, 3 platos con 4 papayas cada uno, según se representa en la Figura 1.

Figura 1. Ejemplo de multiplicación (adaptado de Isoda y Estrella, 2020a, p. 56).

En consecuencia, al dividir se está buscando uno de los factores de la multiplicación, de esta manera se interpreta la división como una operación matemática que permite calcular:

a. Cuántos elementos hay en cada grupo cuando se conoce el número total y la cantidad de grupos. Esto es, 12 papayas repartidas en 3 platos resultando 4 papayas por platos, se representa 12:3 = 4.
b. Cuántos grupos se pueden formar cuando se conoce el número total y la cantidad de elementos por grupos. Esto es, 12 papayas agrupadas de a 4 papayas por plato hacen un total de 3 platos, se representa 12:4= 3.

Es esencial que los problemas matemáticos propuestos en la enseñanza consideren el doble papel del divisor que se puede representar en la división partitiva o división medida, respectivamente. Esto es el número de grupos en que se divide el dividendo o número de elementos de cada grupo.

Cuando nos planteamos la pregunta:
¿Cuántas veces cabe el divisor en el dividendo?, implica restar sucesivamente el divisor al dividendo, hasta que el resultado sea cero o un número menor que el divisor. En el ejemplo de las papayas podemos considerar 12 papayas repartidas en 3 platos, que se representa 12:3. Para ello, restamos repetidamente al dividendo el divisor, esto es:

$$\begin{aligned}12 - 3 &= 9\\ 9 - 3 &= 6\\ 6 - 3 &= 3\\ 3 - 3 &= 0\end{aligned}$$

La resta se realiza 4 veces hasta llegar a 0, por tanto 12:3=4. Algunos modelos que se proponen para estudiar la división son modelos lineales, entre ellos el uso de la semirrecta numérica (Figura 2). Esta representación se puede interpretar contando hacia atrás desde el dividendo, y según la cantidad que indique el divisor. El número de pasos dados es el cociente.

En este sentido, la división 12:3 consiste en restar 3 de 12 de manera sucesiva hasta llegar a 0, el cociente es 4 (número de veces que realizamos la sustracción).

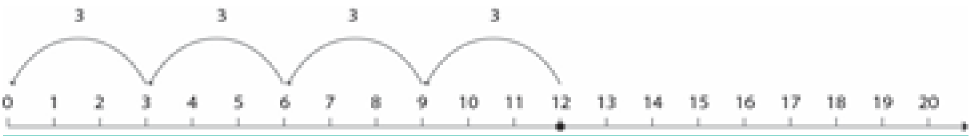


Figura 2. Modelo lineal, semirrecta numérica

También podemos sumar reiteradamente el divisor hasta acercarse lo más posible al dividendo sin pasarse.

$$0 + 3 = 3$$
$$3 + 3 = 6$$
$$6 + 3 = 9$$
$$9 + 3 = 12$$

Entonces sumamos 3, cuatro veces para obtener 12, se tiene 12:3=4.

También, la división se presenta como la multiplicación del dividendo y reciproco o inverso multiplicativo del divisor. Al dividir dos números naturales D y d (con D≥d) y resto nulo, resolver una división se traduce en buscar uno de los factores de la multiplicación.

En el ejemplo de las papayas, de manera inversa se reparten las 12 papayas en tres platos, obteniendo 4 papayas por plato (Figura 3).

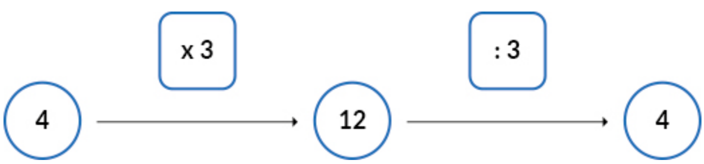


Figura 3. La división y multiplicación como operaciones inversas.

De lo anterior, podemos indicar que la división exacta en N se define como la operación inversa de la multiplicación, en que $D = d \times c$ o bien $D : d = c$, con D dividendo, d divisor y c cociente. Y al repartir equitativamente o al agrupar en partes iguales, pueden quedar elementos sin repartir o agrupar, esa cantidad que sobra se denomina resto (r) de la división.

Cuando no existe un número natural que, multiplicado por el divisor dé el dividendo, la división se llama inexacta. Se denomina (c) al mayor número natural que multiplicado por el divisor puede ser restado del dividendo. Se llama resto (r) a la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente: $r = D - d \times c$, o bien $D = d \times c + r$, con $0 \leq r < d$.

PROPUESTA DE UN PROBLEMA ABIERTO PARA UNA CLASE EN CUARTO AÑO BÁSICO

ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMA JAPONÉS

En coherencia con la definición propuesta para un problema por el currículo nacional, el enfoque de resolución de problemas japonés lo define como "aquel que pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de un procedimiento inmediato para su resolución" (Isoda y Olfos, 2009, p.99). Desde esta perspectiva una clase gira en relación al desarrollo de un único problema, el problema de la clase. Los autores declaran que un problema por naturaleza es abierto; es decir, que los estudiantes no disponen de procedimientos estándares para solucionarlo directamente, o bien, el problema tiene varias soluciones. Distinguen características de un buen problema para una clase, estas son:

- Es accesible a la diversidad de estudiantes, por ende, admite varios enfoques para su resolución.
- Es consistente con el objetivo de la clase.
- Permite al alumno alcanzar un conocimiento nuevo al poner en juego los ya adquiridos.
- Desarrolla habilidades genéricas propias del quehacer en matemáticas, como pensamiento inductivo, modelación, formulación, representación, argumentación y validación.

Por otra parte, para gestionar una clase basada en la resolución de problemas, se proponen cuatro etapas, que se caracterizan por los roles que ejercen los estudiantes y los docentes. A continuación, se describen los principales momentos de la clase asociados a este enfoque:

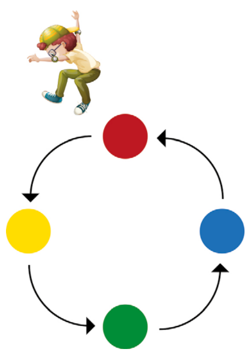
a. Presentación de un problema, contempla la lectura atenta y la comprensión de la situación planteada. El estudiante aclara su comprensión de la situación problema atendiendo a las indicaciones del docente y discutiendo con sus compañeros.
b. Solucionan problemas por sí mismos, los estudiantes piensan y trabajan buscando sus propias soluciones al problema. El profesor recorre el aula investigando cómo piensan los estudiantes en la resolución del problema, y, además, proveyendo comentarios, orientaciones y sugerencias a aquellos estudiantes que no pueden encontrar maneras de abordar el problema.
c. Discusión de toda la clase, por ejemplo 3 a 5 estudiantes que han resuelto el problema de maneras diferentes, explican su solución al curso. Tras escuchar las explicaciones, los estudiantes comparten sus ideas y opiniones acerca de las cualidades, ventajas y desventajas de los distintos aspectos de las soluciones, identificando similitudes y diferencias.
d. Recapitulación e integración: El profesor, junto con los estudiantes, resumen los puntos clave que emergen en la clase, consolidando las ideas y aplicándolas a tareas similares al problema de la clase.

EL PROBLEMA "EL JUEGO DE LAS ESTACIONES DE COLORES"

Se plantea un problema abierto en el sentido de Isoda y Olfos (2009), presentando variadas estrategias de resolución entre ellas: estrategias de conteo y multiplicativas. Además, es accesible a la diversidad de estudiantes promoviendo habilidades como representación, argumentación y comunicación.

El problema "El juego de las estaciones de colores" está diseñando para una clase de divisiones con dos dígitos en el dividendo y un dígito en el divisor, sin desconocer que los estudiantes pueden acudir a otras estrategias para dar solución a la situación descrita, según se ilustra en la Figura 4.

Consiste en adivinar en qué color se encuentra Pedro al realizar un número de saltos de color en color, comenzando siempre en la estación Roja (hacia la izquierda), como lo muestra la figura.



Números de saltos	Color
3	
5	
16	
26	
41	
55	
64	
91	

1. Registra tus predicciones en un minuto para los tres primeros números de la tabla.

¿En 3 saltos?		¿En 5 saltos?		¿En 16 saltos?	

2. Ahora resuelve para los distintos números de saltos y completa la tabla.
3. Indica una estrategia para predecir en qué estación está Pedro en el salto 91.

Figura 4. El juego de las estaciones de colores (Taller 11, Programa Sumo Primero en Terreno, 2020).

El problema anterior se orienta a otorgar un significado al resto de la división, asimismo las preguntas están orientadas a relacionar la cantidad de saltos de Pedro con uno de los cuatro colores de las estaciones, esto es: rojo, amarillo, verde o azul.

ANÁLISIS A PRIORI DEL PROBLEMA

El análisis contempla las posibles estrategias que pueden emerger en los estudiantes a partir de la situación dada. Es presumible que los estudiantes acudan al "conteo uno a uno" como una primera estrategia. Además, se espera que a medida que aumente el número de saltos, los estudiantes puedan prescindir de estrategias de conteo y establecer ciertas relaciones entre las estaciones de colores y el número de saltos que permitan elaborar estrategias multiplicativas. Por ejemplo, pueden "asociar los múltiplos de 4 con la estación roja" y a partir de esa estación como referente contar una cierta cantidad de saltos (0,1,2,3) hacia adelante o hacia atrás según sea el caso.

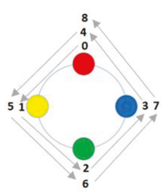
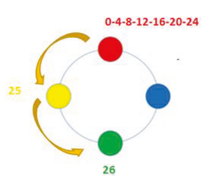
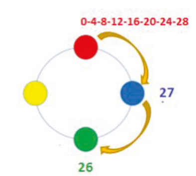
Es posible, que los estudiantes, puedan construir estrategias más generales, como, por ejemplo: asociar a cada estación de color, una secuencia numérica.

Roja:0, 4, 8, 12, 16, 20…; Amarilla:1, 5, 9, 13, 17, 21…;
Verde:2, 6, 10, 14, 18, 22…; y Azul:3, 7, 11, 15, 19, 23….

Asimismo, el problema planteado se puede abordar usando divisiones entre el número de saltos y la cantidad de estaciones (4), resultando como cociente el número de vueltas completas y como resto los saltos adicionales desde la estación roja. De esta manera, se puede asociar a cada estación de color un resto de la división: Roja→resto 0; Amarilla →resto 1; Verde→resto 2; y Azul→resto 3.

A continuación, se ejemplifica con el salto 26 y salto 91. Para determinar en qué estación se encuentra Pedro en el salto 26, se organizan los argumentos en la Tabla 2.

Tabla 2. Estrategias para el salto 26

Conteo uno a uno	Estrategias multiplicativas	
		
Conteo uno a uno.	Múltiplo de 4 cercano y menor a 26.	Múltiplo de 4 cercano y mayor a 26.
E1: realizar un conteo circular de uno en uno, comenzando en la estación roja (0), amarilla (1), verde (2), azul (3) y así sucesivamente hasta llegar a 26. Asociando al salto 26 con la estación verde.	E2: Asociar a la estación roja un múltiplo de 4 menor y cercano a 26, esto es, 24. Luego contar dos saltos desde la estación roja (24) y asociar el salto 26 con la estación verde. Descrito de manera simbólica, es: $4\times6+2=26$.	E3: Asociar a la estación roja un múltiplo de 4 mayor y cercano a 26, esto es, 28. Luego contar hacia atrás dos saltos desde la estación roja (28) y asociar el salto 26 con la estación verde. Descrito de manera simbólica, es: $4\times7-2=26$.

Las tres posibles estrategias dan solución al problema, surgiendo: el conteo uno a uno, y estrategias multiplicativas, a través de la búsqueda de múltiplos de 4 cercanos a 26 (mayores o menores). La resolución del problema se complementa con representaciones pictóricas y simbólicas.

Para 91 saltos. Es probable que los estudiantes utilicen estrategias multiplicativas, en forma análoga, a E2 y E3 descritas en la tabla anterior. Para E2, buscar un múltiplo de 4, cercano y menor a 91, en este caso 88 y desde allí contar tres saltos más hasta llegar a estación azul. De manera simbólica, $4 \times 22 + 3 = 91$. Para E3, Buscar un múltiplo de 4, cercano y mayor a 91, en este caso 92 y desde allí contar hacia atrás un salto hasta llegar a la estación azul. De manera simbólica, $4 \times 2 - 1 = 91$.

Por otra parte, es posible que se pueda incorporar una estrategia haciendo uso del concepto de división, planteando la división 91:4, en que el dividendo (91) indica en números de saltos de Pedro y el divisor (4) se refiere al número de estaciones. Al resolver la división, se obtiene como cociente el número 22, que indica el número de vueltas completas que da Pedro. Y el resto es 3, se interpreta como el número de saltos que da Pedro a partir de la estación roja, por lo tanto, Pedro en 3 saltos más está en la estación azul. A partir de estos argumentos, se puede generalizar que cada resto tiene asociada una estación de color como se ilustra en la Figura 5.
De esta manera, se puede dar significado al resto en el contexto del problema "El juego de las estaciones de colores".

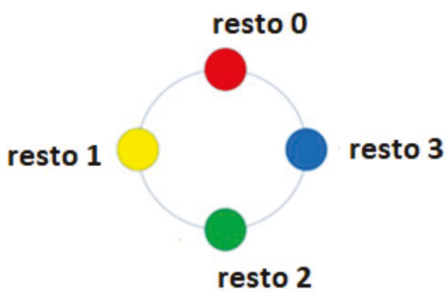


Figura 5. Correspondencia entre cada estación de color y el resto.

Orientaciones para la gestión del problema en el aula
La implementación del problema "El juego de las estaciones de colores" se puede estructurar como sigue:

1. En el momento de presentación y comprensión individual del problema, se espera que los estudiantes entiendan sus instrucciones, a través de la interacción con el docente y sus compañeros. Se sugiere que el docente pueda simular el juego, a

modo de ejemplo con un estudiante, por ejemplo, saltando en las 4 estaciones de colores (roja, amarilla, verde y azul) representadas por círculos de cartulina dispuestos en el suelo o simuladas en un material digital, de esta manera, se podrían clarificar instrucciones asociadas al sentido de los saltos de Pedro (sentido antihorario) y el punto de partida (la estación roja). Tiempo estimado: 10 minutos.

2. Para el segundo momento en que solucionan problemas por sí mismos. Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente recorre el aula presencial o virtual, guiando el trabajo e interviniendo cuando sea oportuno. Es posible que en esta instancia puedan surgir algunas ideas, que requieren de devolución[12] (en el sentido de Brousseau, 1998) por parte del docente. Por ejemplo: En el caso de que concluyan al completar la tabla "si el número de saltos es par, siempre queda en color rojo o verde". Se puede orientar a establecer conclusiones más específicas, haciendo preguntas como ¿El salto 28 corresponde a color rojo o verde?, ¿El salto 30 corresponde a color rojo o verde?, entre otras. Tiempo estimado: 15 minutos.
3. Luego se propone el momento de discusión de toda la clase. Se sugiere seleccionar 3 a 5 estudiantes que hayan resuelto el problema de manera distinta y lo puedan presentar al curso. Los estudiantes realizan discusión sobre ventajas y desventajas de cada una de ellas. Por ejemplo, podrían concluir: "que contar de uno en uno es más difícil cuando los números son más grandes", "es más fácil relacionar los números de la tabla de 4 con la estación roja y ver cuántos sobran" entre otros argumentos. Tiempo estimado: 10 minutos.
4. Finalmente, el docente integra los conocimientos de la clase en función del objetivo. En el contexto del problema, es oportuno presentar el objetivo genérico y especificar detalles al finalizar la sesión. Se sugiere explicitar el problema y sus estrategias en la pizarra o material de apoyo, en que se resuman los puntos claves que han emergido en la clase.

El docente resume lo aprendido, sobre el significado del resto de una división en la situación descrita. Para consolidar los aprendizajes se sugiere mostrar su aplicación en situaciones similares, por ejemplo: Si hoy es jueves, ¿Qué día de la semana será en 93 días más? (Tzcovich y Broitman, 2001). Extendiendo el problema, a una situación en que el ciclo es de 7 días y el resto puede tomar valores desde 0 a 6, como se ilustra en la Figura 6.

12 Acto por el cual el enseñante hace aceptar a los estudiantes la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.

Figura 6. Ciclo de 7 días, partiendo del día jueves.

Es esperable que los estudiantes puedan encontrar la solución a la situación dada resolviendo la división 93:7, obteniendo cociente 13 y resto 2. interpretando que en 93 días más han transcurrido 13 semanas y 2 días a partir del jueves, por lo tanto, será sábado.

TIPOS DE PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER USANDO DIVISIONES

Castro y Ruiz (2011) distinguen que la división de números naturales puede ser considerada como una operación en sí misma, que se aplica para resolver distintos problemas, entre ellos, los de repartos equitativos.

Distintos investigadores (Castro y Ruiz, 2011; Ivars y Fernández, 2016) han documentado la caracterización de problemas multiplicativos propuestos desde la perspectiva de la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1997), dando cuenta de sus fortalezas para la enseñanza de la división.

A continuación, se presentan diferentes tipos de problemas que se pueden abordar en la enseñanza de la división, se complementa con ejemplos de tareas matemáticas situadas curricularmente, estrategias para su resolución y orientaciones didácticas.

1. PROBLEMAS DE ISOMORFISMO DE LA MEDIDA

Estos presentan una proporción entre dos espacios de medidas. Para la enseñanza de la división se distinguen los problemas de división partitiva y división medida o cuotitiva.

a. **División partitiva**, la incógnita está dada por el cociente (número de elementos por grupo) que se obtiene a partir de otra cantidad del mismo tipo (número total de elementos) llamada dividendo que se reparte entre la cantidad de distinto tipo (número de grupos) que hace el papel de divisor (Castro y Ruiz, 2011).

EJEMPLO DE TAREA MATEMÁTICA

El problema de la Figura 7 propone una partición equitativa y tiene el sentido de reparto, estas ideas se resumen en la frase del enunciado "quieren repartirlas en cantidades iguales".

En la situación se relacionan cantidad de niños(as) y cantidad de papayas. La incógnita corresponde al número de papayas por grupos: 12:4=3.

Ana, Luis, Diego y Agustín cosecharon 12 papayas. Quieren repartirlas en cantidades iguales. ¿Cuántas papayas le tocará a cada uno?

Figura 7. Problema de división partitiva (Isoda y Estrella, 2020b, p. 46).

ESTRATEGIA DE REPARTICIÓN EN GRUPOS IGUALES

Castro, Rico y Castro (1987) identifican la estrategia de "repartir en grupos iguales" como el modelo más usual para la división. En el contexto del problema se explica el modelo de "repartir en grupos iguales" (Figura 4). Para la división 12:4 se tiene un conjunto de 12 elementos (papayas) y se reparten en 4 subconjuntos (niños a recibir papayas).

Hay que repartir los elementos iniciales en partes iguales entre los cuatro subconjuntos, donde corresponde a cada parte es el cociente (3 papayas).

Concluyendo, la división partitiva permite calcular cuántos elementos hay en cada grupo, cuando se conoce el número total de elementos y la cantidad de grupos, como se representa en la Figura 8.

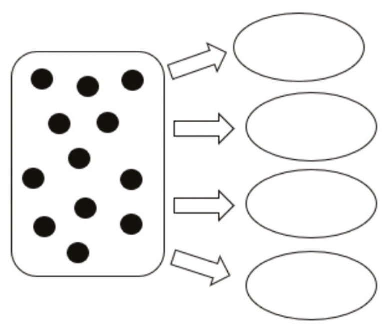


Figura 8. Modelo de reparto de la división 12:4

b. División medida o cuotitiva

El cociente corresponde al número de grupos conociendo el dividendo (número total de elementos) y el divisor (número de elementos por grupo). En este proceso se descompone el dividendo en partes de igual tamaño y, en principio se conoce el tamaño de sus partes, pero no su número (Castro y Ruiz, 2011).

EJEMPLO DE TAREA MATEMÁTICA

En la tarea de la Figura 9 se relacionan cantidad de niños y cantidad de papayas. La incógnita es la cantidad de niños que reciben 3 papayas cada uno.

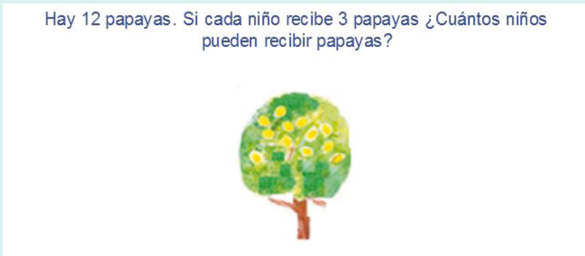


Figura 9. Problema de división medida (Adaptado de Isoda y Estrella, 2020b, p. 46).

ESTRATEGIAS DE AGRUPACIÓN

Castro, Rico y Castro (1987) determinan que la idea de reparto equitativo también se puede expresar a través de un modelo de agrupación (Figura 10). En el contexto de la tarea matemática, sobre un conjunto de 12 elementos (papayas), se generan subconjuntos de 3 elementos (papayas por grupos) hasta que todos queden distribuidos.

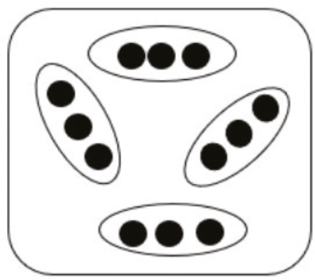


Figura 10. Modelo de agrupación 12:4

En este caso el divisor es la cantidad que le corresponde a cada parte (3 papayas), y el cociente el número de partes o grupos (4 niños).

También se considera la estrategia de sustracción repetida que se indicó al inicio del capítulo. Concluyendo, la división medida o cuotitiva permite calcular cuántos grupos se pueden formar cuando se conoce el número total y la cantidad de elementos por grupos.

2. PROBLEMAS CON UN ESPACIO ÚNICO DE MEDIDAS

Aparecen dos cantidades (referente y comparado) de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar. Castro y Ruiz, 2011 definen una comparación multiplicativa entre dos cantidades, como aquella que permite establecer el número de veces que una cantidad es mayor o menor que la otra. Al número de veces se le denomina escalar, como se ilustra en la Figura 12.

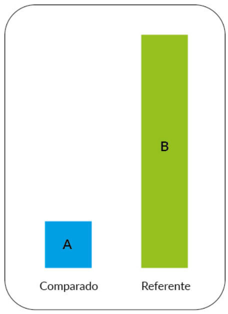


Figura 12. Comparación multiplicativa de disminución.

EJEMPLO DE PROBLEMA MATEMÁTICO

El problema "Andrea y Mateo coleccionan estampillas". Andrea tiene 5 veces menos que Mateo. Si Mateo tiene 60 estampillas. ¿Cuántas estampillas tiene Andrea?" (Adaptado de Castro y Ruiz, 2011, p.110). En esta tarea planteada hay dos cantidades (número de estampillas de Andrea y número de estampillas de Mateo) de un mismo espacio de medida (cantidad de estampillas). Entre ellas hay una comparación multiplicativa de disminución, en que el referente es la cantidad de estampillas de Mateo y el comparado es la cantidad de estampillas de Andrea.

Como observación, en este tipo de problemas la incógnita puede ser también el escalar. Por ejemplo, en el problema siguiente "Andrea y Mateo coleccionan estampillas. Mateo tiene 60 estampillas y Andrea tiene 12 estampillas ¿Cuántas veces menos estampillas tiene Andrea que Mateo?"

ESTRATEGIA DE TABLAS DE MULTIPLICAR

Para resolver una división se pueden utilizar las tablas de multiplicar. En general, atendiendo a la pregunta ¿Qué número multiplicado por el divisor es igual al dividendo?, de manera de obtener el cociente.

La respuesta de 60:5 es el número 12 que cumple la igualdad 12×5=60. Se puede verificar la respuesta buscando en la tabla de multiplicar de 5.

$$10\times 5 = 50$$
$$11\times 5 = 55$$
$$12\times 5 = 60$$

Obteniendo como respuesta que Andrea tiene 12 estampillas.

3. PROBLEMAS DE PRODUCTO DE MEDIDA

Problema cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 y un tercero, M3. En los problemas de división se conoce la medida producto M3 y una de las dos medidas iniciales (M1 o M2) y se busca la otra medida (M1 o M2).

EJEMPLO DE TAREA MATEMÁTICA

El siguiente problema matemático "La empresa del comedor escolar ofrece 20 menús diferentes formados por un primer y un segundo plato. Si la empresa cocina 5 primeros platos distintos, ¿Cuál es la menor cantidad de segundos platos para que los menús sean diferentes?" (Ivars y Fernández, 2016, p.13), la medida producto corresponde a los menús diferentes (20), mientras que una de las medidas iniciales es el número de primeros platos (5) y la incógnita corresponde al número de segundos platos.

ESTRATEGIA USANDO DIAGRAMA DE ÁRBOL

Castro, Rico y Castro (1987) indican que los modelos combinatorios que usualmente se utilizan para multiplicaciones, como el diagrama de árbol, también se puede utilizar en el sentido contrario para la división, esto es, agrupar el total de terminales (dividendo) según indique el divisor y el cociente está dado por el número de agrupamientos distintos que se obtienen.

Para la división 20:5, el dividendo está representado por 20 terminales, el divisor (5) es el número que indica la cantidad de elementos de los grupos a formar y el cociente (4) es el número de grupos.

Para formar el diagrama se representan de forma vertical las 20 terminales, estas se agrupan de 5 en 5, las ramas que se originan en las terminales se cierran en 4 puntos, originando 4 nuevas ramas que a la vez se cierran un punto, tal como se presenta en la Figura 12.

Se concluye que hay 4 opciones de segundos platos para formar los 20 menús diferentes.

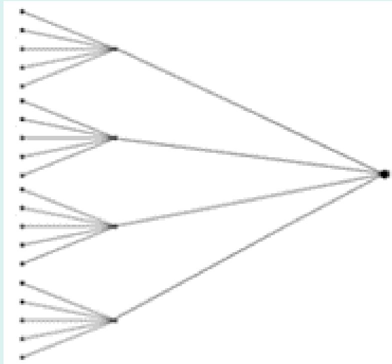


Figura 12. Diagrama de árbol de 20:5 = 4

En este apartado y con el propósito de dar cobertura a las estrategias propuestas en el currículo, se asocia una de ellas con un tipo de problema, sin embargo, esto no implica necesariamente que las estrategias elegidas sean propias de ese tipo de problemas. En algunos casos son transversales a las distintas situaciones, como cuando se utiliza la tabla de multiplicar y en otros casos hay estrategias que están ligadas al contexto de la situación, por ejemplo, en la siguiente tarea "La familia de Mateo dispone de 30 huevos para la semana, si consumen 6 huevos diarios ¿Para cuántos días les alcanzan los huevos?" siendo un problema para trabajar la estrategia de la sustracción sucesiva.

SUGERENCIAS PARA ABORDAR ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

La Agencia de la Calidad de la Educación en el documento Aprendiendo de los Errores[13] reporta que los errores en el aprendizaje de la división de números naturales están principalmente asociados al uso del algoritmo estándar, sobre la resolución de la división. Por ejemplo, en la operación 84:2 se señala que "uno de cada cinco estudiantes de 4° básico procedería a dividir la cifra con mayor valor posicional del dividendo por el divisor y a completar el cociente copiando las cifras restantes del dividendo" (2019, p. 20), según se ilustra en la Figura 14.

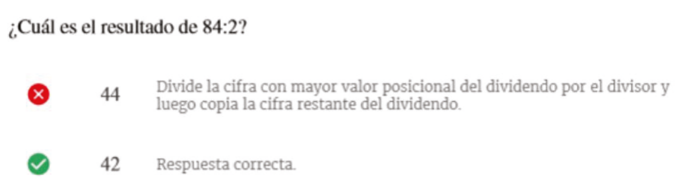


Figura 13. Resolución de la división 84:2. (Agencia de la calidad de la educación, 2019, p. 20).

13 Puede consultar el documento en el siguiente enlace: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/4490/Aprendiendo_de_los_errores_4_basico_Final.pdf?sequence=1&isAllowed=

Castro y Ruiz (2011) distinguen tres razones por las cuales el algoritmo de la división es más difícil de aprender que el de las otras operaciones básicas, estas son:

a. Se requiere conocimientos de la división, multiplicación y sustracción.
b. Al contrario de las otras operaciones (adición, sustracción y multiplicación), se realiza de izquierda a derecha.
c. Implica cierta capacidad de estimación y aplicar la estrategia de ensayo y error.

La ruta de enseñanza para las divisiones en los programas oficiales previo al algoritmo estándar propone la comprensión del concepto a través de variadas estrategias (repartición, agrupación, sustracción sucesiva, estimación, entre otras), tanto en tercero como en cuarto año básico. De igual manera, es importante potenciar las estrategias de cálculo mental, como, por ejemplo: descomposiciones del dividendo (aditivas o multiplicativas).

En cuarto año básico, es imprescindible que los estudiantes consoliden estrategias para la división como: estimación del cociente y descomposición aditiva del dividendo, de esta forma se puede adquirir con significado el algoritmo de la división. Empleando estrategias de cálculo mental como sumas dobles, compensación, múltiplos de 10, entre otras, para ir automatizando operaciones básicas.

A continuación, se entregan sugerencias para abordar el aprendizaje del algoritmo de la división a través de tareas contextualizadas y haciendo uso de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas.

La estrategia "estimar el cociente" fomenta la capacidad de estimar a través del ensayo y error en los estudiantes, que es un elemento clave en la resolución del algoritmo. En ella se aproxima por redondeo el dividendo y luego se resuelve la división. Por ejemplo, para dividir 56:2, el número 56 se redondea a 60 y se resuelve la división 60:2=30, entonces 56:2 es aproximadamente 30.

Por otra parte, en la estrategia de "descomponer aditivamente el dividendo", los sumandos de la descomposición propuestos deben ser múltiplos del divisor. Se ejemplificará con la siguiente tarea matemática (ver Figura 14).

Altair, Killari y Aurora compran 7 frascos de 10 aceitunas cada uno, y de regalo les dan 2 aceitunas más, sumando en total 72 aceitunas. Si desean repartir de manera equitativa ¿Cuántas aceitunas recibirá cada uno?

Figura 14. Problema de División (Isoda y Estrella, 2020c, p. 29).

Para la división 72: 3. Hay distintas maneras para descomponer aditivamente el 72, por ejemplo, 70 + 2; 69 + 3; 60 +12; 50 + 22, entre otras. Se propone elegir una alternativa donde los dos términos de la adición sean múltiplos de 3 y en algunos casos se busca una descomposición en decenas y unidades que facilite el cálculo numérico. Una opción sería:

$$\begin{aligned} 72 : 3 &= 60 + 12 : 3 \\ &= 60 : 3 + 12 : 3 \\ &= 20 + 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Como observación, la estrategia de descomposición aditiva canónica no siempre se utiliza, depende del divisor. En cambio, para el algoritmo de la división independiente del divisor se utiliza la descomposición aditiva canónica del dividendo.

EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Se puede dar sentido y justificación al algoritmo de la división diciendo que "repartimos las unidades de mayor orden, las centenas, después las decenas y por ultimo las unidades. Si en algún de estos repartos queda algún resto se le añaden las unidades de su mismo orden presente en el número" (Castro y Ruiz, 2011, p. 116).

Las siguientes actividades que se presentan en la Figura 15 se adhieren a las ideas descritas anteriormente. En ella se presentan 3 pasos de resolución para la situación de repartir 72 aceitunas (agrupadas en frascos de 10 aceitunas) en tres niños. Empleando sus representaciones icónica, con cantidades discretas para realizar el reparto equitativo.

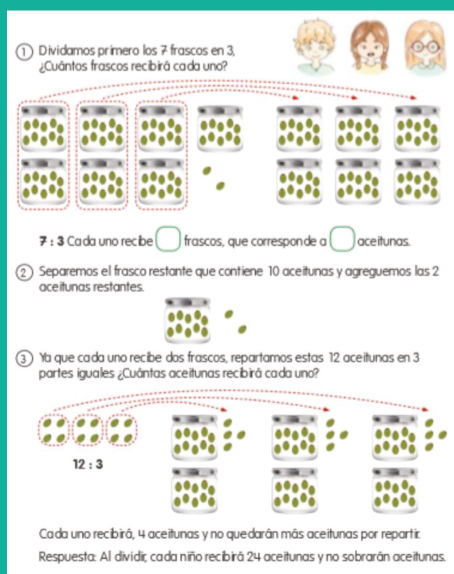
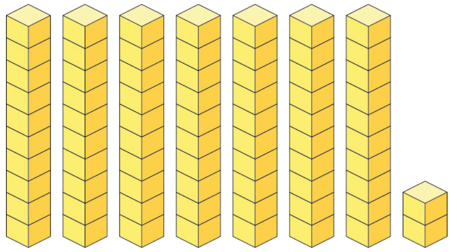


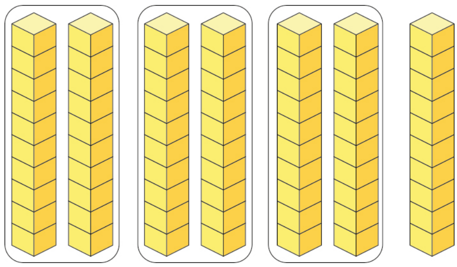
Figura 15. Tarea de reparto (Isoda y Estrella, 2020c, p. 29).

Es fundamental que la presentación del algoritmo de la división se apoye de diversas representaciones, como concretas, pictóricas y simbólicas. El proceso se puede ilustrar con el uso de bloques multibase, en el cual se utilizan los cubos (unidades) y las barras de 10 unidades (decenas). Por ejemplo, para calcular 72:3 se puede orientar el siguiente proceso.

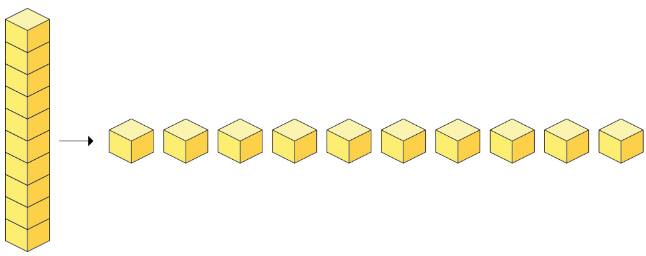
- Representar el dividendo 72; es decir, 7 decenas y 2 unidades.



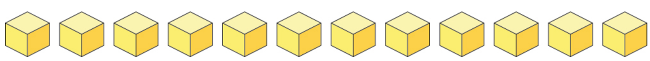
- Realizar la división entre la unidad de mayor orden y el divisor. En este caso las decenas. Representar la división 7:3= 2, resto 1.



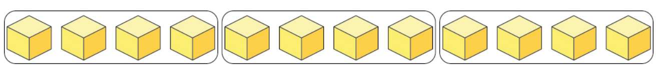
- Desagrupar la decena sobrante en 10 unidades.



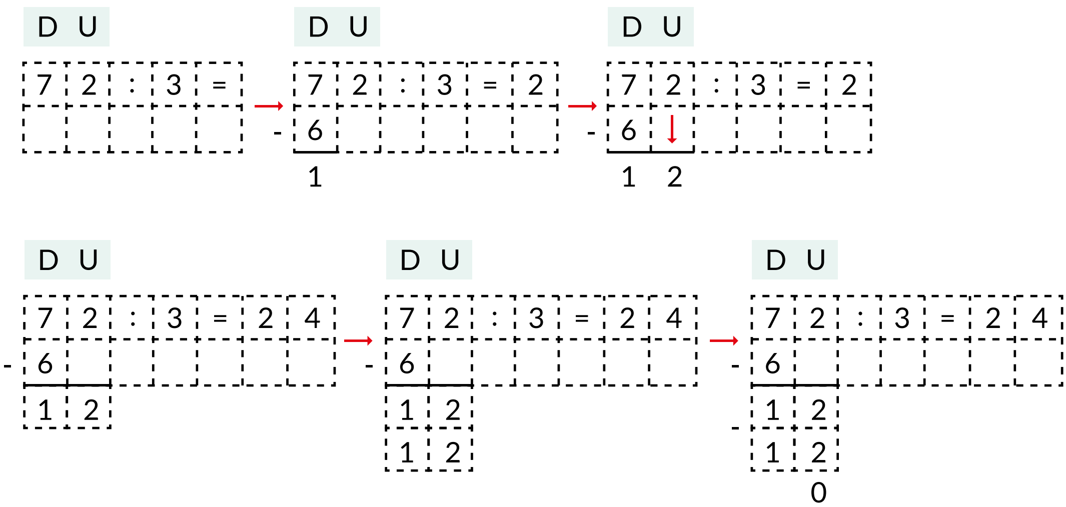
- Agrupar las 10 unidades con las 2 unidades restantes, total 12 unidades.



- Repartir las unidades 12: 3= 4, resto 0.



Resultando, 2 decenas (2D) y 4 unidades (4U) en el cociente, formando el número 24 unidades o 24. Como una versión resumida de lo anterior se presenta los pasos del algoritmo del algoritmo de la división.



REFLEXIONES FINALES

El aprendizaje de las operaciones se desglosa en dos aspectos: los significados y el dominio de los procedimientos de cálculos. En la enseñanza de las estructuras multiplicativas se evidencia una introducción exclusiva de la multiplicación como suma iterada y la división a través del reparto equitativo, lo que podría ocasionar un significado parcial de las operaciones.

En este sentido, la variedad de problemas propuestos es una invitación al docente a incorporar otras tareas matemáticas que permitan el trabajo con diversos significados de la división, entre ellos: problemas de producto de medidas, problemas con único espacio de medida, problemas que dan significado al resto, entre otros. Además, este capítulo desarrolla las capacidades de análisis didáctico, secuenciando tareas matemáticas, analizando las posibles respuestas y representaciones, así como su gestión y la importancia del empleo de recursos manipulativos, entre otros, situaciones que apoyan la reflexión docente.

Ivars y Fernández (2016) dan cuenta que la incorporación del algoritmo en la resolución de problemas multiplicativos conlleva a la disminución del uso de otras estrategias correctas, pero no entrega una mejora en la comprensión de estos problemas, por lo tanto, se propone un tratamiento que privilegie el tránsito entre las representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para introducir el algoritmo de la división.

La resolución de problemas es la habilidad principal en la enseñanza de la Matemática. En busca de fortalecer dicha habilidad, el enfoque sugerido proporciona herramientas al docente en la selección de un problema adecuado y orientaciones para la implementación de una clase basada en la resolución de un problema central. De esta manera, se entrega protagonismo al estudiante dando la oportunidad de generar sus propias estrategias y potenciar habilidades como el uso de diversas representaciones, fortaleciendo la argumentación y comunicación principalmente en las etapas de discusión e integración. Asimismo, estas vivencias dotan de significado a la división.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas.* Santiago, Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf

Alfaro, L., y Gormaz, R. (2009). *Análisis comparativo de los resultados chilenos en las pruebas de Matemática SIMCE y PISA. En ¿Qué nos dice PISA sobre la educación de los jóvenes en Chile? Nuevos análisis y perspectivas sobre los resultados en PISA 2006* (pp. 239-260). Santiago, Chile: Gráfica 7 Ltda.

Castro, E. y Ruiz, J. (2011). *Aritmética de los números naturales: estructura multiplicativa.* En Segovia, I. y Rico, L. (Eds), *Matemática para maestros en educación primaria* (pp.99 -117). Madrid: Pirámide.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1987). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 157-168. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132234.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T, Cea, F., Randolph, V., y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Revista Estudios de Política Educativa*, *1*(1), 64-105.

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Isoda, M., y Olfos, R., (2009). *Enfoques sobre la resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas a partir del estudio de clase.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso: Chile.

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática, 26*(1), 9-38. DOI: 10.24844/EM2801.01

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica.* Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/orientacion/2012/bases_curricularesbasica_2012.pdf

Tzcovich, H., y Broitman, C. (2001). *Matemática*. Dirección de Educación General Básica. Obtenido de Gabinete Pedagógico Curricular – Subsecretaría de Educación. Provincia de Buenos Aires. Argentina.

Unesco-Orealc. (2013). *Temas críticos para formular nuevas políticas docentes en América Latina y el Caribe: el debate actual.* Santiago de Chile: Ceppe y Unesco.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

La enseñanza y el aprendizaje de las formas 3D desde primero a cuarto básico desarrollando habilidades de visualización

CINTHIA IGLESIAS-MANCINI
Universidad Arturo Prat

ANDREA PIZARRO-CANALES
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está enfocado en profundizar estrategias didácticas específicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el Primer Ciclo de Educación Básica. La concepción que se tiene de esta área de la matemática ha evolucionado a través de los años y esto ha influenciado y afectado en la manera en como se enseña actualmente. El término geometría, desde su etimología, significa "medida de la tierra", este tenía una finalidad práctica, considerando que los egipcios hacían uso de ella, con foco en la medida, para volver a delimitar sus terrenos tras las inundaciones del Nilo. Desde la mirada de los griegos, se orienta al estudio de las formas geométricas, la identificación de sus componentes, sus relaciones y propiedades, enfatizando en el reconocimiento, identificación y descripción de las formas.

A partir de lo antes expuesto, se advierte que esta área tenía inicialmente finalidad instrumental. Sin embargo, desde el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, es claro que su tratamiento es mucho más global. Al respecto, Gonseth (1945-1952) señala que la dialéctica[14] de la geometría se apoya en tres pilares fundamentales: la intuición, la experiencia y la deducción, estos tres pilares ayudan a comprender la relación con el espacio y el mundo sensible. La intuición y la

14 Según la RAE, dialéctica es una técnica de discusión y debate que intenta descubrir la verdad mediante la confrontación de argumentos contrarios entre sí.

experiencia constituyen un polo empírico de la Geometría y la deducción participa del polo teórico.

La intuición emerge desde nuestras sensaciones, y ayuda a estructurar el pensamiento a partir de la evidencia. Puede caracterizarse como una toma de contacto inmediata, directa y concreta. Pero en este contacto directo realiza al mismo tiempo la comprensión más íntima con su objeto, lo captura en su esencia y en su singularidad. A través de la intuición, el sujeto puede reconstruir el mundo que le rodea, y a través de la experiencia puede desarrollar habilidades cognitivas de orden superior (Houdement y Kuzniak, 1999).

La experiencia permite acercar el aprendizaje de la geometría a quien la estudia, quedando próxima de la acción y de cierta realidad física. La naturaleza de la experiencia geométrica va a depender del tipo de objetos sobre los cuales se ejercita: concretos, virtuales y mentales. Así, en el primer caso, hacer una experiencia en geometría consistirá en verificar propiedades haciendo uso de materiales concretos. Por ejemplo, para mostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo extendido, se pueden realizar dobleces, recortes o construcciones con regla y compás. Otro tipo de experiencia corresponde a las posibilidades ofrecidas por la informática haciendo uso de softwares como el GeoGebra, Cabri-geométrico, entre otros. Una tercera forma de experiencia puede ser mental, ella consiste en poner en acción mentalmente desplazamientos, rotaciones y simetrías, ampliación y reducción de figuras, recortes, entre otros, sin efectuarlos realmente (Houdement y Kuzniak, 1999).

La deducción permite alcanzar nuevas informaciones a partir de las ya adquiridas, sin recurrir a la manipulación o a otro recurso exterior. La deducción reorganiza los aportes de la experiencia y la intuición, para formular conjeturas que son expresadas de manera oral o escrita.

En educación básica, y en primer ciclo particularmente, la experimentación a través de la manipulación de objetos es fundamental para generar en niños y niñas el desarrollo del polo deductivo. Es importante enfatizar que la experimentación en sí misma no tributa al desarrollo de este polo. No obstante, si se articula esta manipulación con tareas matemáticas adecuadas y una correcta gestión por parte del docente, con devoluciones efectivas, se podrá desarrollar progresivamente el polo deductivo.

Houdement y Kuzniak (1999), dan cuenta de la coexistencia de tres tipos de geometría: Geometría I (GI) la geometría natural, es decir, la que considera los objetos físicos; Geometría II (GII), geometría axiomática natural, en donde las propiedades adquieren un rol importante; en esta geometría tiene relevancia la explicación de las acciones efectuadas, y Geometría III (GIII) o la geometría axiomática formalista; en esta geometría es la demostración es el único medio válido para probar conjeturas. Por tanto, se independiza de la realidad y no está presente en el currículum actual de la educación básica chilena.

El tipo de geometría que curricularmente se estudia en el primer ciclo básico es la geometría natural (GI), en que la fuente de validación es la realidad y el mundo sensible. En ella, se ponen en juego los tres pilares descritos anteriormente, intuición, experiencia y deducción. No obstante, esta última se trabaja fundamentalmente sobre objetos materiales, con la ayuda de la percepción y la experiencia, apoyándose en el uso de artefactos[15] de origen geométrico como no geométrico y también de tipo tecnológico: regla, escuadra, transportador, compás, lanas, bombillas, bloques, geoplanos, tangramas, software, entre otros. La GI está orientada a la comprensión del funcionamiento de las interacciones de estos tres pilares, que consideran a la experiencia como medio de validación de sus hallazgos al enfrentarse a resolver tareas matemáticas. Por tanto, considerar a la experiencia como actividad central, es un factor preponderante al organizar secuencias de tareas geométricas adecuadas a su enseñanza y su aprendizaje en educación básica.

Duval (2005) señala que: "de todas las áreas de la matemática, es la geometría la que requiere la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje

15 Los artefactos son objetos digitales o no digitales que permiten resolver tareas matemáticas. Es un medio didáctico que a través de una adecuada gestión permite constatar y comprender las propiedades matemáticas en estudio.

y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver[16], indisociablemente[17]" (p.6). Siguiendo al mismo autor, el proceso de deconstrucción[18] de los objetos matemáticos es lo que lleva al razonamiento.

La Geometría que se estudia en el Primer Ciclo de Educación Básica focaliza su atención en las formas geométricas, estas pueden ser de distintas dimensiones: 3D, son formas de tres dimensiones (poliedros y cuerpos redondos); 2D, formas de dos dimensiones (polígonos, circunferencias y círculos) 1D, formas de una dimensión (rectas, segmentos, semirrectas y rayos) y 0D formas de cero dimensiones (los puntos). La manera en que se va transitando sobre las distintas dimensiones en este ciclo, es a partir de la construcción y deconstrucción de las formas 3D, que en este caso se aborda a partir del trabajo con los cuerpos geométricos. Construir en este nivel está relacionado con tareas geométricas relativas a armar usando material concreto como son las bombillas o palos de maqueta unidos con plasticina (o plastilina), para asemejar los vértices de un cuerpo geométrico, bombillas[19] conectadas internamente con lanas, formas 2D en que sus bordes estén imantados para que al combinarlos logren construir formas 3D, entre otras. O bien, empleando moldes o plantillas, por ejemplo, entregando a los estudiantes la red que arma un determinado cuerpo, o bien, dándoles una parte y solicitando que completen lo que falta para generar su construcción. También, pidiendo que calquen o estampen cada una de las caras de una forma 3D de manera que al combinarlas generen un cuerpo geométrico solicitado.

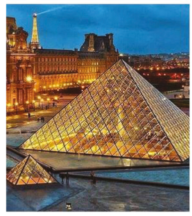
Al observar el mundo real, se encuentran ejemplificaciones concretas de los objetos ideales que estudia la Geometría. Si se mira el mundo que nos rodea con lentes geométricos, estos están presentes en nuestro entorno inmediato. El mundo en que vivimos es en tres dimensiones, es por ello que es el acercamiento natural para su estudio.

16 Estos tres procesos se abordarán a lo largo de este capítulo.
17 Traducción de las autoras.
18 Según la RAE, deconstruir es deshacer analíticamente algo para darle una nueva estructura. https://dle.rae.es/deconstruir.
Bajo esta mirada, Duval (2005), señala que el proceso de deconstrucción se relaciona con desarmar en forma visual, de manera manual o través de un software formas 3D para descomponerlas en formas 2D. O bien, formas 2D se descomponen en formas 1D.
19 En Chile se les llama bombilla a una caña delgada que se utiliza para sorber algún líquido.

En la Figura 1 se muestran ejemplos al ver este mundo con lentes geométricos:

Edificio Soho Montemar, Viña del Mar, Chile[20]

Edificio Tecnosphere, Dubai en los Emiratos Árabes Unidos[21]



Museo de Louvre, París Francia.

Figura 1. Ejemplos concretos de formas geométricas.

Si observamos las fotografías antes expuestas, se puede apreciar que a primera vista se pueden reconocer formas 3D, pero también podemos identificar los elementos que la componen (Formas 2D). Mirando el entorno con lentes geométricos, es posible introducir el aprendizaje de la geometría desde edades tempranas en niños y niñas de edad escolar.[20]

Este capítulo está dedicado a abordar el estudio de la enseñanza de las formas de tres dimensiones y la importancia de la visualización en geometría según Duval (2005), en base a siete tipos de tareas que desarrollan la habilidad de visualización, a partir de los trabajos de Del Grande (1990). Junto con lo anterior, se abordan estrategias que hacen uso de los tres pilares fundamentales de la geometría: intuición, experiencia y deducción, propuestos por Gonseth (1945-1952); sugiriendo actividades para el tratamiento de la Geometría Natural (GI), para la enseñanza y el aprendizaje de los cuerpos geométricos. Se abordan obstáculos y dificultades al aprender Formas 3D, para concluir con reflexiones finales.[21]

20 Fuente: https://www.playamansa.cl/edificio-soho-montemar/
21 Fuente: https://www.paredro.com/6-construcciones-que-se-distinguen-por-sus-formas-esfericas/

EL ACTO DE “VER” EN GEOMETRÍA Y EL ROL DE LA VISUALIZACIÓN

En geometría, Duval (2005) distingue dos operaciones asociadas al ver, por una parte, el reconocimiento visual de las formas geométricas, y por otra, la identificación de los objetos que componen las formas reconocidas. La identificación considera poner en juego habilidades superiores, teniendo como base el desarrollo del reconocimiento visual.

Al momento de ver, ya sea identificar o reconocer, se pone en juego la habilidad de visualización, definida como la conexión entre lo que se percibe desde su representación y la imagen construida mentalmente a partir de ésta (Duval, 2005). Esta habilidad es un elemento clave en una infinidad de actividades no solo de geometría o de las relacionadas con el aprendizaje, sino de la vida y constituye un elemento esencial para el desarrollo del sentido espacial, lo que permite asociar a la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico. La visualización se comienza a trabajar desde niveles iniciales y a lo largo de toda la vida.

Del Grande (1990), a partir de varios autores define siete habilidades de visualización, que adquieren importancia en el trayecto formativo de cualquier estudiante. A partir de su trabajo, se proponen tareas asociadas al desarrollo de cada una de ellas, enfocadas en su implementación en el primer ciclo básico.

a. Habilidad de Coordinación Motriz de los ojos: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas que impliquen la coordinación de la visión con el movimiento de una parte del cuerpo, por ejemplo, completando imágenes sin pasar el lápiz dos veces por el mismo lugar, recorrer con los pies una figura dibujada en el suelo, calcar una imagen en una hoja, entre otras.

   Un ejemplo de este tipo de tareas es pedir a los estudiantes que copien una imagen que tengan a la vista en una cuadrícula, tal como se muestra en la Figura 2. A esta forma de representación se le conoce como gráfico isométrico. En esta tarea, los estudiantes deben copiar en el recuadro de la derecha la imagen que tienen a la izquierda. Este tipo de actividad permitirá que de manera intuitiva puedan comenzar a identificar los elementos constitutivos de una forma 3D, como caras, aristas y vértices.

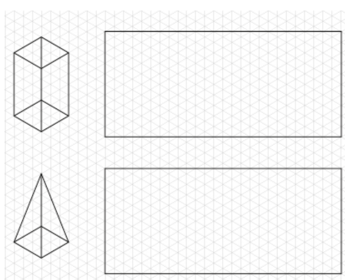


Figura 2. Ejemplo de Tarea Matemática.

b. Habilidad de Identificación Visual: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas que impliquen el reconocimiento de una figura abstrayéndose de su contexto, por ejemplo, descubriendo figuras que estén dentro de otras, completando figuras faltantes, identificando intersecciones entre figuras, entre otras.

Un ejemplo de este tipo de actividades (ver Figura 3) se relaciona con identificar, dado un cuerpo geométrico sus caras, aristas y vértices. Los estudiantes para poder resolverla, deben ir aislando cada cuerpo geométrico en torno a los elementos que lo componen.

Figura 3. Identificación de caras, aristas y vértices en cuerpos geométricos (Isoda y Estrella, 2020a, p.31).

c. Habilidad de Conservación de la Percepción: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas que impliquen aceptar que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse parcialmente, por ejemplo, comparando tamaños de figuras que se observan desde distintos ángulos, reconociendo figuras que se encuentran en distintas posiciones, variar las vistas de cuerpos y reconocer la invarianza de su tamaño.

Un ejemplo de este tipo de actividad se muestra en la Figura 4, y guarda relación con identificar vistas de cuerpos geométricos desde diferentes puntos de vista y representar la forma que sus caras tendrían si las dibujáramos en una cuadrícula. En la actividad que se expone, se pone en juego además la habilidad de coordinación visomotriz.

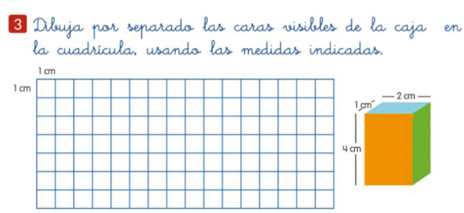


Figura 4. Dibujo de vistas a partir de un cuerpo geométrico (Isoda y Estrella, 2020b, p.32).

d. Habilidad de Percepción de la posición en el espacio: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas que impliquen asociar la posición de un objeto empleando como referencia a uno mismo u otro punto de referencia, por ejemplo, dibujar imágenes mediante la realización de traslaciones, rotaciones o simetrías, identificando figuras congruentes que se encuentran en distintas posiciones, mover figuras cambiando la posición de ciertos detalles.

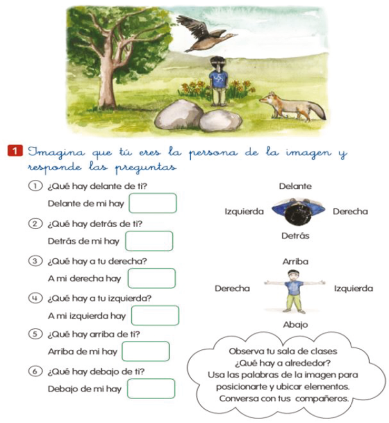


Figura 5. Trabajo de la lateralidad (Isoda y Estrella, 2020c, p.32).

Este tipo de tareas se relaciona con el desarrollo de la lateralidad, al identificar posiciones de objetos tomando como base a uno mismo en calidad de observador o empleando otro punto de referencia. Un ejemplo de este tipo de actividades se muestra en la Figura 5.

e. Habilidad de Percepción de relaciones espaciales: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas en las que haya que identificar relaciones entre objetos en distintas posiciones en el espacio, por ejemplo, completando un patrón geométrico, encajar cubos de acuerdo a un patrón, combinando formas para generar un modelo dado, encontrar el camino más corto entre dos objetos, entre otros.

Un ejemplo de este tipo de tareas se muestra en la Figura 6, los estudiantes deben ensamblar piezas para armar un robot, dado un modelo que tienen a la vista. No implica el proceso de evocarlo mentalmente.

Figura 6. Copia de un cuerpo robot a partir de un modelo dado (Isoda y Estrella, 2020d, p.36).

f. Habilidad de Discriminación visual: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas en las que haya que identificar diferencias o similitudes entre objetos, mentales o físicos, por ejemplo, identificar figuras congruentes en un conjunto de ellas, identificar cuerpos congruentes, encontrar el error al copiar una figura o ensamblar rompecabezas.

Un ejemplo de este tipo de tareas se presenta en la Figura 7. En ella, se les pide a los estudiantes que agrupen formas geométricas que tengan formas similares. Este tipo de actividades implica que los estudiantes fijen criterios que le permitan posteriormente levantar categorías para su clasificación.

Figura 7. Clasificación de cuerpos geométricos a partir de un criterio propio (Isoda y Estrella, 2020d, p.35).

g. Habilidad de Memoria visual: Para desarrollar esta habilidad se deben implementar en el aula tareas en las que se tenga que evocar características visuales de un objeto que no esté a la vista, por ejemplo, dibujar formas en ausencia de ellas, completar el dibujo de una forma que se mostró por un periodo corto de tiempo, ubicar piezas de un modelo dado.

Un ejemplo de este tipo de tarea se muestra en la Figura 8. En ella, los estudiantes a partir de un cuerpo geométrico que se encuentra al interior de una caja cerrada y solo a través del tacto, deben ver[22] sus características para mentalmente evocarlas y asociarlas al cuerpo geométrico que corresponda.

Figura 8. Identificación de cuerpos geométricos a partir de la percepción (Isoda y Estrella, 2020a, p.31).

22 En el sentido de Duval.

Las tareas matemáticas antes descritas constituyen sugerencias de actividades que los docentes pueden implementar en sus clases y se enfocan en el desarrollo de las distintas habilidades asociadas a la visualización. A lo largo de la enseñanza de la geometría, es necesario proponer tareas que aborden cada una de ellas. De esta manera podemos desarrollar integralmente la habilidad de visualización.

Además de implementar tareas variadas, haciendo uso de diversos artefactos susceptibles de manipulación, se debe otorgar especial atención a la coherencia y concatenación de las tareas que se proponen para potenciar el desarrollo de la habilidad de la visualización. Por otro lado, el docente, al momento de implementar la tarea, debe prestar atención a la gestión que se realiza de la misma, habiendo considerado previamente las posibles estrategias que podría desarrollar un estudiante al resolverla, con el objetivo de anticiparse a las posibles dificultades y errores que manifiesten los estudiantes, y así llevar un proceso de devolución efectivo.

CONCEPTO MATEMÁTICO: FORMAS 3D

Los cuerpos geométricos son objetos que están compuestos por figuras geométricas. Tienen tres dimensiones: largo, ancho y alto. Ocupan un lugar en el espacio, por tanto, tienen volumen. Se clasifican en poliedros y cuerpos redondos (ver Figura 9). En general, en el primer ciclo básico, esta diferenciación se aborda empíricamente desde la caracterización de cuerpos que son capaces de girar o no al dejarlos caer en un plano inclinado.

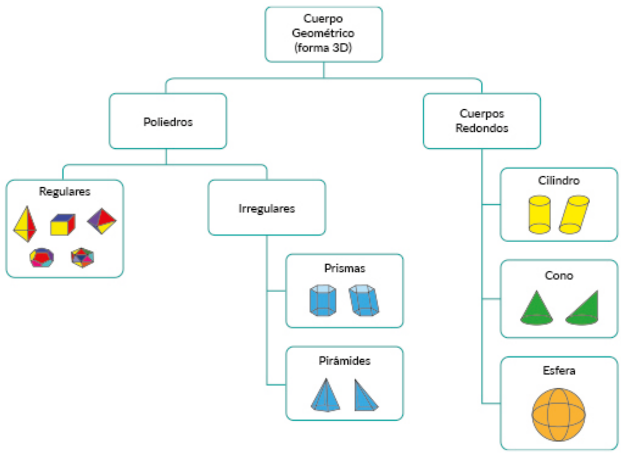


Figura 9. Cuerpos geométricos y su clasificación.

Los poliedros son cuerpos geométricos cuyas caras son polígonos. Existen tres elementos que son primarios en todo poliedro: caras, aristas y vértices. Las caras de un cuerpo geométrico son las superficies que lo forman. Las aristas son segmentos comunes entre dos caras; y los vértices son los puntos donde se intersectan las aristas o también se definen como los puntos comunes de tres caras. Existe además, un elemento secundario que se llama diagonal de un poliedro, este corresponde a los segmentos que unen dos vértices que no pertenecen a la misma cara (Ver Figura 10).

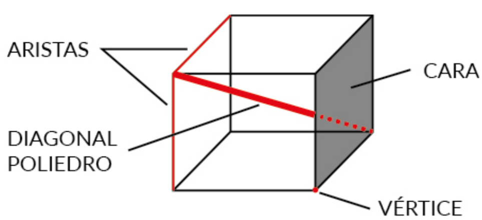


Figura 10. Elementos de un poliedro.

Estos, a su vez, se clasifican en poliedros regulares y poliedros irregulares. Esta sub clasificación depende de si sus caras son todas congruentes; en ese caso lo definiremos como poliedro regular, y en caso contrario como poliedro irregular. Los poliedros regulares son sólo 5 y se denominan también como sólidos platónicos (ver Figura 11). Estos son: el tetraedro, formado por cuatro caras correspondientes a triángulos equiláteros; el cubo o hexaedro, formado por seis caras cuadradas; el octaedro, formado por ocho caras correspondientes a triángulos equiláteros; el dodecaedro, formado por doce caras conformadas por pentágonos regulares; y finalmente el icosaedro, formado por 20 caras correspondientes a triángulos equiláteros. En los sólidos platónicos recién descritos se cumple la Fórmula de Euler. En ella se plantea que en los poliedros regulares se cumple que el número de caras, más el número de vértices equivale al número de arístas, más dos. Esto se puede enunciar mediante la expresión $C + V = A + 2$. Donde C, V, y A es el número de caras, vértices y aristas, respectivamente. En el primer ciclo básico se trabaja usualmente con dos sólidos platónicos: el tetraedro, definiéndolo como un caso particular de una pirámide de base triangular y el hexaedro que se le denomina simplemente cubo, que a su vez corresponde a un caso particular de paralelepípedo.

Figura 11. Sólidos platónicos.

Los poliedros irregulares, por su parte, se clasifican en dos tipos: prismas y pirámides. Los prismas son cuerpos geométricos conformados por dos caras planas poligonales, denominadas bases y tantas caras con forma de paralelogramo como lados tenga la base. En el primer ciclo básico sólo se trabaja con prismas rectos de base rectangular, sabiendo que el cuadrado es un caso particular del rectángulo. Por lo tanto, sus caras laterales y sus bases corresponden a rectángulos, denominándoseles como paralelepípedo.

Las pirámides son cuerpos geométricos cuya base corresponde a un polígono cualquiera y cuyas caras laterales corresponden a triángulos que convergen a un vértice común, llamado cúspide. En el primer ciclo básico, solo se trabajan las pirámides con base cuadrada, rectangular o triangular.

Otro tipo de cuerpos geométricos son los cuerpos redondos. En sus redes, estos están compuestos total o parcialmente por figuras geométricas, y se clasifican en cilindro, cono y esfera:

El cilindro recto se puede generar a partir de la rotación de un rectángulo en torno a uno de sus lados. Se compone de dos círculos que corresponden a sus caras basales y una superficie lateral curva, denominada manto del cilindro. En este nivel se le denomina como cara curva. Tiene dos aristas curvas que corresponden a la intersección de cada una de las caras basales con la superficie lateral. No existen vértices.

La esfera se puede generar a partir de la rotación de una semicircunferencia en torno a su diámetro. Tiene una única superficie curva.

El cono recto se genera al girar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos. Está compuesto por una cara plana y una superficie lateral curva, denominada manto del cono. En este nivel se le conoce como cara curva del cono. Tiene una arista curva que corresponde a la intersección que une esta cara con la otra; tiene además un vértice, denominado cúspide.

Al espacio limitado por cada una de las superficies se le llama sólidos de revolución (ver Figura 12); otra forma de generar estos sólidos es mediante la rotación de un rectángulo, un triángulo isósceles[23] o una circunferencia en torno a su o sus ejes de simetría. En educación primaria, a estas formas se les denomina cuerpos redondos, dado que algunas de sus caras son curvas, y se enseñan a partir de su relación con objetos del mundo real y de la red que los conforma.

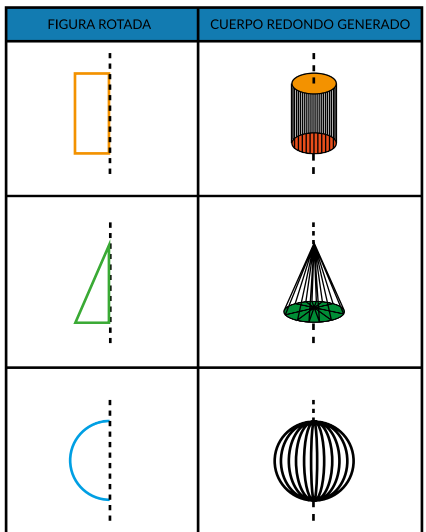


Figura 12. Sólidos de revolución.

23 El triángulo equilátero se entiende como un caso particular del triángulo isósceles, por tanto, también está contenido en esta categoría.

En el Primer Ciclo de Educación Básica se suelen enseñar los prismas, pirámides, cilindros y conos en posición tradicional: base horizontal y posición recta (no oblicua). Desde la arquitectura, es posible encontrar formas 3D que están en posición oblicua. Por tanto, los estudiantes pueden tener la posibilidad de reconocer formas que no sean exclusivamente rectas. Un ejemplo de ello, se encuentra en las siguientes imágenes (ver Figura 13).[24] [25]

Torre de Pisa[24], Italia

Puerta de Europa[25], Madrid España

Figura 13. Formas 3D oblicuas presentes en la arquitectura.

Además, existe material concreto en el mercado, cuyas representaciones consideran formas 3D oblicuas (Ver Figura 14). Esto apoya el proceso de reconocimiento de las formas 3D en base a los elementos que la componen y no empleando exclusivamente su representación visual.

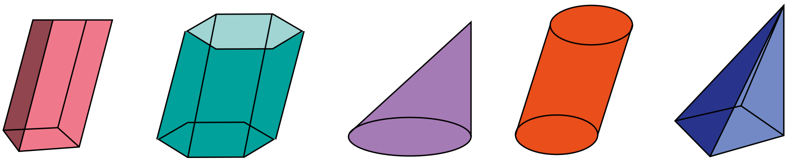


Figura 14. Formas 3D oblicuas

24 Fuente https://obras.expansion.mx/arquitectura/2018/11/28/la-torre-de-pisa-gana-verticalidad-en-los-ultimos-17-anos
25 Fuente https://madridando.com/puerta-de-europa/

SUGERENCIAS DE ENSEÑANZA POR NIVEL

A continuación se enuncian algunas estrategias para enseñar las formas 3D en el primer ciclo básico, diferenciadas por estrategias para los niveles 1° y 2° básico, y estrategias para 3° y 4° básico, diseñadas a partir de reportes de investigaciones y estudios recientes en Didáctica de la Geometría[26] para este nivel y extrayendo algunos ejemplos de los textos escolares propuestos por Isoda y Estrella (2020).

SUGERENCIAS PARA 1° Y 2° BÁSICO

El tipo de tareas que se deben abordar en este ciclo se pueden organizar de acuerdo a niveles graduados de tacto y visualización. Inicialmente, tareas que impliquen el tacto y la visualización de manera simultánea, tacto o visualización de manera exclusiva, o también, sin tacto y sin visualización (Estrella, Isoda, 2020e). Lo importante en este caso es que independientemente del tipo de actividad, los estudiantes siempre tengan la instancia de explicar, argumentar y comunicar sus ideas.

Algunas tareas que se pueden realizar en estos niveles son:

a. Los estudiantes pueden llevar desde sus casas objetos que tengan forma de ciertos cuerpos geométricos mostrados previamente por el profesor (pelotas, latas de bebida, cajas, cilindros de papel higiénico, tarros de conserva, entre otros). La idea es que tengan en sus casas la posibilidad de reconocerlos. Una vez los lleven a la sala podrán experimentar, describir y analizar una gran variedad de formas y tamaños. En un segundo momento de la clase, se les puede pedir que estos objetos sean deslizados sobre un plano inclinado para posteriormente clasificarlos. Así, por ejemplo, los estudiantes podrían agrupar todas aquellas que corresponden a cajas (por tener la propiedad de no rodar al dejarlas caer), formas que posteriormente se institucionalizarán como prismas y aquellas que tengan caras curvas (cuerpos que sí ruedan al dejarlos caer), las que más adelante se definirán como cuerpos redondos. Más aún, a través de preguntas orientadoras del profesor, y justificaciones de los estudiantes, se podría intencionar que clasifiquen aquellas que son cubos y aquellas que son paralelepípedos, en estricto rigor, prismas rectos de base rectangular, no olvidando que el cubo es un caso particular del paralelepípedo, relación que no se aborda en este nivel. Al resolver esta tarea los estudiantes están

26 Para mayor referencia, revisar Comisión permanente de los Institutos de Investigación sobre la enseñanza de la matemática en primer ciclo en Francia, quienes desde 1975 se reúnen para trabajar colaborativamente en la formación inicial y continua para la enseñanza de la matemática en educación primaria y por otro lado, impulsar la investigación en torno a este tema https://www.copirelem.fr/

desarrollando la habilidad de discriminación visual (ver Figura 7).

b. Hacer equipos pequeños de estudiantes al interior del curso. A cada equipo se les entregan formas 3D ya conocidas y formas 2D (que corresponderían a las caras de las formas 3D). A partir de esta actividad, los estudiantes pueden relacionar partes de formas 3D con las formas 2D dadas. Se les puede hacer preguntas como ¿cuáles y cuántas de todas estas formas 2D debo considerar para poder armar la forma 3D? (Ver Figura 15). Además, se puede usar una forma 2D como molde y calcarla tantas veces como sea necesario para generar la forma 3D que tienen a la vista. Estarán trabajando de manera intuitiva y experimental la idea de red de cuerpo geométrico. Esta actividad pone en juego la habilidad de identificación visual y la deconstrucción de las formas.

¿Cuáles y cuántas formas 2D te permiten armar la siguiente forma 3D?

Figura 15. Sugerencia de Tarea matemática

c. Armar un robot, u otro cuerpo a partir de elementos reutilizables que tengan en sus casas. Los estudiantes deben reconocer previamente los cuerpos geométricos que forman el modelo dado y además, pueden elaborar un manual para su fabricación, de manera que otro compañero pueda replicar la construcción realizada (ver Figura 6). En este nivel, las instrucciones descritas en el manual son principalmente de manera oral, ya que los estudiantes se están iniciando en el proceso de lectoescritura. Por ejemplo, un estudiante puede decir "...toma dos cajas con forma de paralelepípedos iguales para formar los brazos, elige también otra que sea más grande para el tronco. Para la cabeza, puedes elegir una caja con forma de cubo o un paralelepípedo, pero que sea más chica que la del tronco. Toma también dos objetos con forma de cilindro, pero que sean iguales para las piernas. Debes fijarte que juntos no sean más anchos que el paralelepípedo que uses para el tronco..."

Al resolver esta tarea los estudiantes están propiciando el desarrollo de la habilidad de percepción de relaciones espaciales, al identificar las relaciones entre varios cuerpos que están ubicados al mismo tiempo en el espacio. En la Figura 16 se muestran algunos ejemplos de robots que podrían crear los estudiantes.[27]

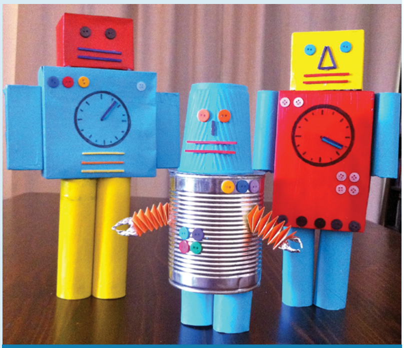


Figura 16. Ejemplo de robots que podrían crear los estudiantes [27]

27 Fuente: https://www.quo.es/tecnologia/g44329/16-robots-que-puedes-hacer-en-casa-con-tus-hijos/

d. Dar un conjunto de formas 3D, de manera concreta, que no estén a la vista y solo disponibles al tacto, y asociarla con otra que tengan en frente, dada en material concreto también (ver Figura 8). Esta actividad tiene un doble propósito: por un lado, los estudiantes pueden fomentar el desarrollo de la habilidad de visualización conservación de la percepción, y por otro lado, desarrollar conceptos espaciales, según el modelo piagetiano de adquisición de conocimiento, en el que se diferencia la adquisición desde la percepción, a partir del conocimiento de objetos desde el contacto directo con ellos (al momento de manipular las formas geométricas 3D), con la representación, que en este caso es la forma que se genera al evocar objetos en ausencia de su representación concreta (Piaget e Inhelder, 1948).
e. Una variación de la actividad antes mencionada, es pedir a los estudiantes pintar las caras de la forma 3D con témpera y estamparlas sobre una hoja de papel. De esta manera, se pueden por un lado, identificar los elementos constitutivos del cuerpo, y por otro, trabajar la idea de red de cuerpo geométrico. También, en vez de pintar las caras de las formas 3D, se pueden marcar sobre una hoja los bordes de ella. Esta actividad pone en juego la habilidad de identificación visual y la deconstrucción de las formas.
f. Dado un conjunto de formas 3D en material concreto, identificar a partir de la deconstrucción visual o concreta, o empleando otra estrategia, el número de caras planas y curvas que posean. Esto permitirá levantar otra forma de categorizarlas, identificando a los cuerpos redondos como aquellas que tienen al menos una cara curva. Al desarrollar esta actividad se propicia la habilidad de identificación visual, identificando una figura aislándola de su contexto (ver Figura 17).

Figura 17. Ejemplo de material que para emplear la TM propuesta

g. Dar a cada estudiante una forma 2D, de tamaño grande, que permita construir una forma 3D haciendo combinaciones con otros compañeros. Se pueden facilitar elementos como rectángulos, círculos, cuadrados, triángulos, entre otros. El profesor puede pedir a los estudiantes que armen, por ejemplo, un cubo. En ese caso, deberían venir hacia él seis estudiantes que tengan cuadrados, para así armar el cuerpo geométrico solicitado.

SUGERENCIAS PARA 3° Y 4° BÁSICO

En general, en este nivel de enseñanza, se debe comenzar a trabajar a partir de la manipulación de elementos del entorno, haciendo énfasis en tareas que propendan al reconocimiento, exploración, manipulación, construcción y deconstrucción de los objetos que ya conocen. Progresivamente, se debe introducir el uso de representaciones pictóricas o gráficas de las figuras y sus elementos, aprovechando las experiencias previas de los estudiantes. Además, se deben proporcionar a los estudiantes tareas que se relacionen con armar y desarmar formas 3D. Duval (2005), indica que lo que lleva a los estudiantes a desarrollar el razonamiento matemático es la deconstrucción de las dimensiones de las formas. Esto además le permitirá poner en juego los procesos de construir, razonar y ver, procesos propios del trabajo geométrico.

Algunas tareas que se pueden realizar en estos niveles son:

a. Para comenzar, se puede activar conocimientos asociados al objetivo o meta de la clase, poniéndolos en juego a partir de una actividad realizada anteriormente: que los estudiantes traigan desde sus casas objetos que cuenten con volumen. A través de preguntas orientadoras los pueden llegar a clasificar según varios criterios (ver Figura 16). En este caso, el criterio de interés es que los puedan clasificar en prismas y cuerpos redondos. Al implementar esta tarea, los estudiantes están desarrollando la habilidad de discriminación visual.

Figura 18. Posible categorización de formas 3D: formas que tienen vértices y formas que no tienen (Isoda y Estrella, 2020a, p.30).

b. A partir de un conjunto poliedros, que pueden tener en físico para facilitar su resolución, pueden contar el número de caras, aristas y vértices y completar un cuadro resumen (Ver Figura 3). Además, se puede trabajar de manera muy intuitiva el Teorema de Euler para poliedros. Esto puede basarse en comprobar el teorema o conjeturarlo mediante alguna orientación dirigida. Esta tarea se debe basar en la experimentación a través de la manipulación de las formas que tienen a la vista.

c. Dadas varias formas 3D en físico, preferentemente de cartulina, de manera que permitan que los estudiantes las puedan manipular, pedir que las desarmen, y posteriormente, las armen. Esto permitirá que puedan realizar el proceso de deconstrucción y posteriormente el de construcción. De esta manera, pueden constatar que, independiente que la desarmen, seguirá siendo el mismo cuerpo, solo que esta vez se emplea otra representación, pasando de una 3D a una 2D. Además, se les puede invitar a que, una vez desarmado el cuerpo, pinten sus caras (de un mismo color aquellas que tengan la misma forma), identifiquen sus bordes (aristas), identifiquen el punto donde se encuentran los bordes (vértices), entre otras (ver Figura 19). Otra tarea que se puede derivar de ello, es que los estudiantes calquen los bordes para obtener "otra red" del mismo cuerpo geométrico. Al realizar esta tarea, se está deconstruyendo una figura en unidades de figuras cuya dimensión es inferior a ella. Se pone en uso la habilidad de visualización asociada a la percepción de relaciones espaciales.

Figura 19. Estudiante desarma cajas y marca sus aristas

d. Una variante de la tarea antes descrita, es utilizando el software Poly Pro[28], el cual permite deconstruir y construir formas 3D dadas. Es posible obtener algunas representaciones como las que se muestran en la Figura 20, cuando se realiza el proceso de desarmar un tetraedro o viceversa.

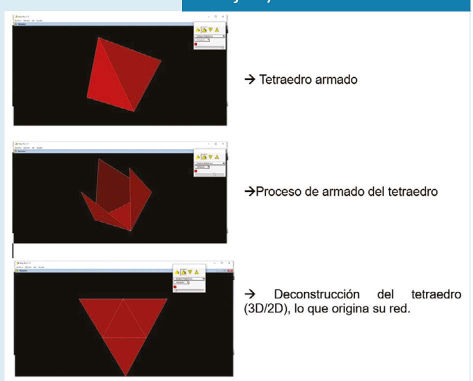


Figura 20. Imágenes del software Poly Pro.

28 Poly Pro es un software libre para Windows que permite armar y desarmar digitalmente algunas formas 3D, explicitando el proceso, posibilita reconocer las formas 2D que la componen, determinar su red. Permite cambiar los colores y mover piezas, además de imprimir las plantillas en papel, dando la posibilidad de construir la forma en 3D.

e. Identificar el o los movimientos (pueden ser 1, 2 ó 3) que se le debe hacer a la red clásica del cubo para que se transforme en otra distinta, pero que también corresponda. Puede ser con apoyo de software o con la manipulación de material concreto. Formas 2D imantadas pueden apoyar la gestión de esta tarea (ver Figura 21).

Figura 21. Cuadrados imantados que permiten la realización de la tarea propuesta.

f. En este nivel se puede trabajar también haciendo uso de adivinanzas del tipo: "soy una forma 3D, tengo n número de caras, y m número de aristas...". Pueden determinar también si existe un único cuerpo geométrico que cumpla con dichas características. Con este tipo de actividades se debe fomentar que los estudiantes hagan uso del lenguaje matemático, propio de la disciplina y se potenciará la habilidad de memoria visual, pues deben evocar mentalmente una forma que no tengan a la vista que cumpla con las características requeridas.

g. Dada una caja de cartón con tapa, la pueden forrar con un papel por fuera (puede ser de diario) sin que este tenga ningún corte. Los estudiantes pueden mostrar la forma del papel que les permite forrar a caja. A modo de referencia, ver Figura 22.

Figura 22. Posible proceso de caja forrada.

h. Para abordar el objetivo de identificar las relaciones entre formas 3D y 2D puede mostrar a los estudiantes una caja, y solicitarles que "mentalmente" la desarmen. Pueden anticipar a través de un dibujo la forma en que les quedará dicha deconstrucción. Los estudiantes al realizar esta acción están poniendo en juego la habilidad de percepción de relaciones espaciales, al combinar formas 2D para obtener el modelo que "arma la caja". Posteriormente, pueden desarmarla en físico (no olvidar recordarles que las pestañas que permiten pegar la caja no se deben considerar) y comparar la deconstrucción que ellos proyectaron en el dibujo con la que obtuvieron. A continuación, pueden preguntarse si esa deconstrucción que obtuvieron en físico es la única forma de desarmar la caja. Esto le permite ir constatando que la red que arma la caja no es única. Puede además pedir a los estudiantes que representen esas otras "formas de desarmar la caja", lo que más adelante se institucionaliza como red de la caja, en este caso paralelepípedo (ver Figura 23). La realización de esta tarea que involucra el proceso de deconstrucción y construcción de la caja permite a los estudiantes promover la reversibilidad desde el trabajo en el espacio. Al dibujar la o las formas en que les queda la caja desarmada hacen uso de la habilidad de coordinación viso motriz.

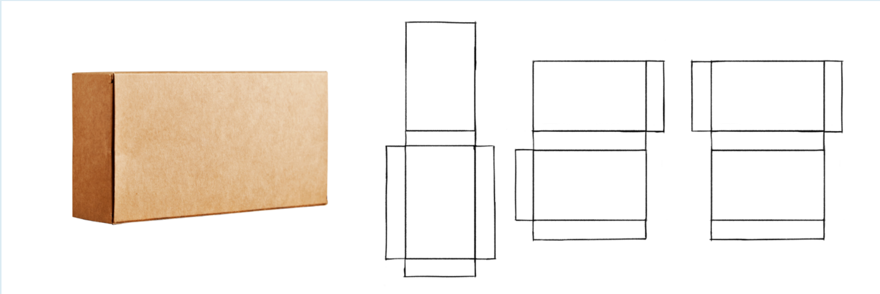


Figura 23. Algunas posibles redes que arman la caja.

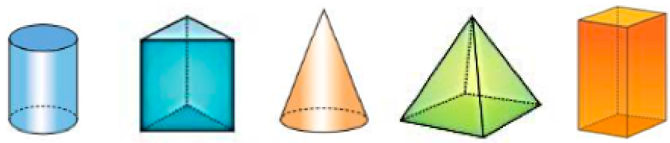
i. Dado un conjunto de redes de cuerpos geométricos y varios cuerpos geométricos, identificar redes que permiten la construcción de cada uno de ellos. Ver como referencia Figura 24. Al resolver esta tarea, los estudiantes están plegando la red para asociarla con la forma 3D que le corresponde.

Figura 24. Identificación de cuerpos geométricos a partir de la percepción (Adaptada de Isoda y Estrella, 2020a, p.33).

j. Para trabajar la habilidad de coordinación viso motriz desde las formas 3D se puede pedir a los estudiantes que dibujen en perspectiva formas 3D haciendo uso de un gráfico isométrico (ver Figura 2). De esta forma los estudiantes podrán ir relacionándose con el concepto de vistas de una forma 3D a partir de su proyección en este tipo de gráficos.

k. Puede dar a los estudiantes la vista de una forma 3D y preguntarles si la forma 3D a la que corresponde esta vista es única. Por ejemplo, si una vista es un círculo, entonces puede ser una esfera o un cilindro (ver Figura 25). Esto le puede llevar a hacer preguntas del tipo ¿es suficiente solo una vista del cuerpo geométrico para reconocer la forma 3D a la que corresponde? La habilidad que se pretende desarrollar al hacer que los estudiantes resuelvan esta tarea matemática es la conservación de la percepción.

Si observo una forma 3D desde arriba y veo un círculo, ¿cuál o cuáles de las siguientes formas se podría estar observando?



Entonces, ¿Es suficiente tener solo una vista para poder asegurar qué forma estamos viendo?

Figura 25. Sugerencia de Tarea matemática

I. Dado un objeto similar a un cuerpo geométrico que tengan en casa, lo pueden observar a partir de diversas posiciones (que ellos se muevan) y dibujen lo que ven haciendo uso de una cuadrícula, esto permitirá que puedan elaborar un dibujo más preciso de lo que ven. Pueden fotografiarlo también. Además, pueden grabar un video mientras lo van describiendo. Es necesario ser enfático en el uso del lenguaje geométrico. Al resolver esta tarea los estudiantes hacen uso de la habilidad de identificación visual. A continuación, se ilustra esta tarea en la Figura 26.

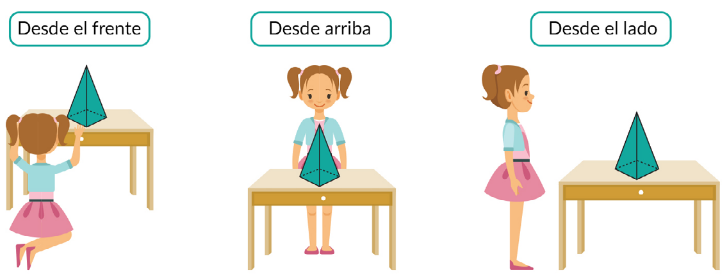


Figura 26. Ejemplo de estudiante reconociendo vistas de una Forma 3D.

m. Puede dar varias vistas de una forma 3D (que permitan identificar la forma 3D a la que corresponde) y a partir de ellas puede pedir a los estudiantes que dibujen la forma 3D a la que correspondería. Al resolver esta tarea los estudiantes hacen uso de la habilidad de identificación visual (ver Figura 27).

Si una forma 3D tiene las siguientes vistas, ¿qué forma es? Nómbrala.

Figura 27. Sugerencia de Tarea matemática

n. Puede preguntar a sus estudiantes cuál o cuáles son las formas 3D en las que al observarlas desde distintas vistas (frente, lado y arriba), se observan formas congruentes (al superponerlas coinciden). Para ello, puede usar algún software que permita verificar la conjetura. Al realizar esta tarea los estudiantes están trabajando la memoria visual, al evocar mentalmente formas 3D que no tengan a la vista.

o. Considerar un dado común. Sabiendo que la suma de los puntos ubicados en sus caras opuestas es siempre igual a 7, brindar a los estudiantes la red de un dado en el que se vean solo algunos de esos puntos (ver Figura 28). Pedirles que completen con los números que faltan.

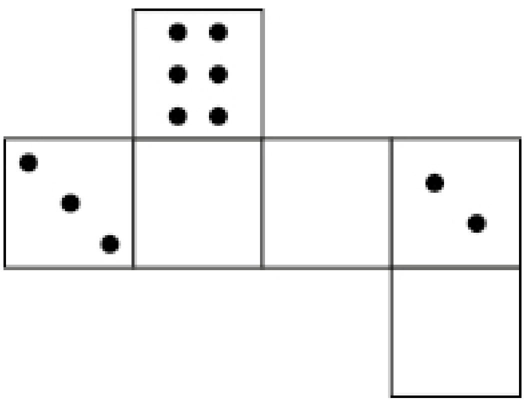


Figura 28. Ejemplo de tarea matemática asociada al conteo de puntos en un dado

POSIBLES DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES AL APRENDER LAS FORMAS 3D

Diversas investigaciones en didáctica de la matemática a nivel internacional señalan que las dificultades más frecuentes evidenciadas por los estudiantes al aprender las formas 3D son las siguientes:

Dificultades relacionadas con deconstruir los cuerpos geométricos y asociarlas con las redes de estos, al ser presentadas de manera distinta a la tradicional. El estudiante solo reconoce como red del cubo a la imagen que se muestra al centro de la Figura 29, existiendo once formas distintas de armarlo. Esta dificultad puede generarse debido a que los estudiantes solo tienen la posibilidad de relacionarse con las formas 3D a partir de su armado. Por tanto, solo reconocen a una única red que permite su construcción, en este caso, la red que les entrega el profesor. En cambio, si la primera experiencia que tienen los estudiantes es a partir del desarmado del cubo, podrían obtener distintas redes que permiten su armado. Para ello, el profesor puede dividir al curso en equipos y a cada uno de ellos entregarles un cubo que, al desarmarlo, el producto obtenido les quede de cada una de las once redes que permiten armar el cubo (se deben armar al menos once equipos). Además, al implementar esta tarea en la clase, puede considerar un pequeño plenario en el que los estudiantes muestren las redes que encontraron.

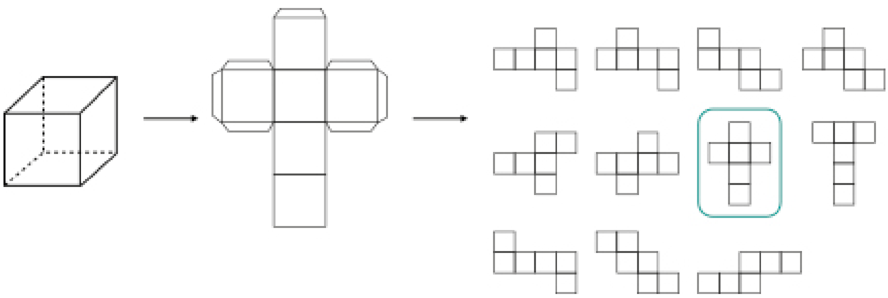


Figura 29. Redes del cubo.

Los estudiantes suelen confundir formas de dos dimensiones con formas de tres dimensiones, por ejemplo: triángulo con pirámide, círculo con esfera, rectángulo con paralelepípedo o cuadrado con cubo. Esta dificultad se presenta debido a que los estudiantes no logran diferenciar las formas 2D o 3D. Puede deberse a que carecen de experiencias en las que hayan tenido la posibilidad de construir, pasando de una forma plana (2D), a una forma con volumen (3D) mediante el armado de la red de un cuerpo geométrico y deconstruir formas 3D, pasando de una forma 3D, con volumen, a una forma 2D (plana); en este caso, la red del cuerpo geométrico.

La dificultad radica en que los estudiantes no han realizado el tránsito entre ambas dimensiones. Es importante que el profesor se asegure que al desarmar y armar las formas 2D/3D vayan identificando los elementos que las componen. Una referencia de este proceso, se encuentra en la Figura 30.[29]

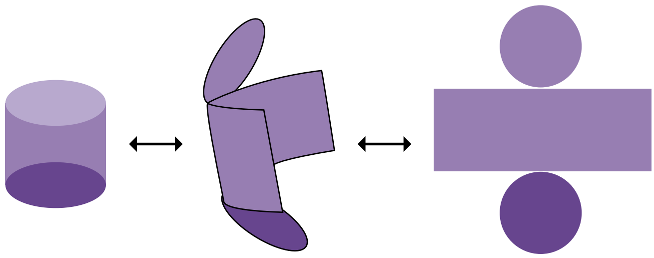


Figura 30. Ejemplo de deconstrucción y construcción[29].

Al presentarles a los estudiantes imágenes con representaciones de cubos apilados, como la siguiente (Ver Figura 31):

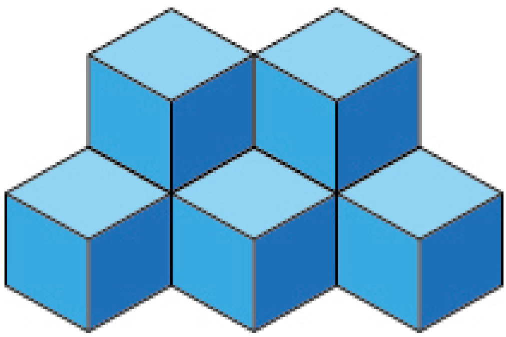


Figura 31. Cubos apilados de una forma dada.

Y frente a la tarea de determinar ¿Cuántos cubos se necesitan para replicar la configuración? Los estudiantes necesitan poner en juego habilidades de visualización que le permitan obtener una representación mental de la parte de la forma que no tienen a la vista. El error más frecuente es que el estudiante cuente exclusivamente los cubos que observa. Esta dificultad se evita, si una primera aproximación a este tipo de tareas se realiza con material concreto, de manera que el estudiante tenga la posibilidad de ver la configuración desde sus distintas vistas moviéndose alrededor de él (ver Figura 26). El proceso de construcción también puede constituir un apoyo para que los estudiantes no manifiesten esta dificultad: para ello, pueden manipular muchas veces los materiales (cubos, en este caso) para construir formas apiladas distintas. Puede compararlas y fotografiar las formas construidas.

29 Notar que la posición de los círculos puede estar en cualquier punto de contacto en el lado donde se ubican. El perímetro de la circunferencia coincide con el largo del rectángulo donde se tiene cada punto de contacto.

REFLEXIONES FINALES

Es necesario comprender que es posible extender la habilidad de visualización más allá de aquello que se puede percibir de manera exclusiva a través de la vista. Esta habilidad se puede desarrollar haciendo uso del tacto, por ejemplo, como quedó de manifiesto en algunas de las actividades propuestas a lo largo de este capítulo. Desde allí, se puede aludir al Diseño Universal de Aprendizajes (DUA), en particular al Principio II: Proporcionar múltiples formas de acción y expresión, específicamente en su pauta proporcionar múltiples medios físicos de acción.

Al enseñar el eje de geometría en el primer ciclo básico, específicamente las formas 3D, se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, identificar, describir, dibujar y construir formas geométricas en situaciones estáticas y dinámicas. Además, se considera el desarrollo del pensamiento espacial a través de la visualización y la construcción de diferentes formas 3D. Duval (2005), plantea que la forma tradicional y errada al enseñar geometría es la siguiente: primero trabajar sobre el reconocimiento perceptivo de las formas, sobre la adquisición del vocabulario apropiado y luego reproducir las figuras. Esta manera no es adecuada, pues ninguno de estos procesos se hace cargo de desarrollar el razonamiento matemático, que sí se puede lograr cuando se aborda la deconstrucción de las formas geométricas, de esta forma se hacen presentes las dos maneras de ver: reconocer e identificar, abordadas en este capítulo.

La enseñanza de la geometría debe realizarse a través de tareas que promuevan la visualización y el análisis de los objetos matemáticos con los que se está trabajando. De esta manera, los estudiantes deben adentrarse inicialmente al estudio de la geometría, por medio de objetos concretos de diversos materiales que tengan a la mano y que sean susceptibles de manipular, de manera experiencial y empírica, con el objetivo de expresar características visuales que poseen. Esto permitirá que los estudiantes puedan reconocerlos e identificarlos por su aspecto físico, sin necesidad de conocer sus propiedades al comienzo, pero mediante la implementación de otro tipo de tareas, progresivamente los lleve a identificar sus elementos constitutivos, caracterizándolos a través de las partes que los componen y estableciendo categorías para su clasificación, a partir de las propiedades descubiertas.

Es necesario promover el trabajo geométrico con actividades en las que se pongan en juego los siete tipos de tareas que promuevan el desarrollo de habilidades de visualización, en las que los estudiantes tengan la posibilidad de reconocer, visualizar y dibujar figuras, en situaciones de exploración activa mediante la manipulación de materiales, desde la vida cotidiana, observando diferentes modelos, y de manera paulatina, ir especificando sus características y propiedades, para poder describir de manera más precisa el entorno que les rodea. Esto le permitirá ir comparando unas figuras con otras, mediante frases como "se parece a...", "tiene forma de...".

Más adelante, se debe propender a implementar tareas matemáticas en las que los estudiantes tengan la posibilidad de deconstruir y construir formas 3D, de manera que puedan comprender y visualizar la forma 3D en su totalidad desde una representación bidimensional (plantilla o red), además de determinar las diferentes vistas de cada una de estas formas.

Estudios de Balachef (2000) y Duval, (2005) dan cuenta que, en matemática, es importante promover el uso de la habilidad de argumentación en los estudiantes al comunicar sus conclusiones o conjeturas desde los primeros años de formación. Además, deben utilizar un lenguaje preciso al definir los objetos, con términos pertinentes al nivel escolar, es decir, que sea comprensible y adecuado a su desarrollo cognitivo. Deben darse ciertas condiciones para promover la argumentación en el aula: la primera tarea del docente, es brindar a los estudiantes tareas matemáticas contextualizadas acorde a sus intereses, de manera de propiciar que los estudiantes se interesen por resolver la tarea planteada. Los profesores, además, deben implementar tareas matemáticas que propicien diversas estrategias de desarrollo, y así fomentar el razonamiento matemático mediante la reflexión inicialmente individual, y posteriormente conjunta entre los estudiantes. Se sugiere que el profesor realice análisis a priori de las tareas que les propondrá a los estudiantes, para anteponerse ante sus posibles dificultades, además de establecer anticipadamente las orientaciones para la gestión y devolución en la clase.

Seguir esta vía, proponiendo a los estudiantes la realización de tareas en las que tengan la posibilidad de explorar de manera activa y lúdica, les permitirá desarrollar la habilidad de visualización que será clave tanto para el aprendizaje de la matemática, específicamente la geometría, como para situaciones de la vida diaria y así generar un aprendizaje significativo de la disciplina.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53. Recuperado de https://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST05010/IST05010.pdf

Gonseth, F. (1945-1952). *La géométrie et le problème de l'espace.* 27. Éditions du Griffon: Lausanne.

Houdement, C., y Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth destiné étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312. https://doi.org/10.1023/A:1003851228212

Houdement, C., y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *11*, 175-193. Recuperado de https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709/document

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. ISBN 978-956-17-0882-2. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020d). *Sumo Primero: libro del estudiante, 1° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME1_web.pdf

Piaget, J., et Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* París: Presses Universitaires de France.

Enseñar y aprender estadística desde los primeros años de escolaridad

PEDRO VIDAL-SZABÓ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

Trabajar en la escuela tanto la alfabetización estadística como el razonamiento estadístico temprano, contribuye al desarrollo del pensamiento estadístico en niñas y niños (Cf., Estrella et al, 2018). Este tópico formativo se ha vuelto crucial, sobre todo, en el siglo XXI no solo por la gran cantidad de datos que se procesan diariamente sino también para ejercer una ciudadanía inteligente y, en general, facilitar un óptimo proceso en las tomas de decisión, fenómeno que estudia el conocido Big Data (o bien, Macrodatos).

La Estadística es una disciplina que tiene un carácter interdisciplinar e involucra pensar en cómo convertir los datos en visiones del mundo real, para lo cual proveen herramientas tanto la matemática como la computación (Wild et al., 2018). Por ejemplo, Lupton et al. (2018) señalan que las personas que hacen ciclismo y automonitorean su trabajo deportivo, los datos digitales que recogen mediante tecnologías (smartwatch, smartphone, entre otros) son una manera de conocer sus cuerpos (ritmo cardíaco, velocidad promedio que alcanzan, entre otros) y de caracterizar los espacios por los que se mueven al pedalear (distancia recorrida, lugares, número de paradas, inclinación del suelo, entre otros). En consecuencia, la estadística es fundamental en la vida moderna porque los datos, la variabilidad y la incertidumbre están omnipresentes (Moore, 1998).

La Didáctica de la Estadística se ha estado haciendo un espacio en el mundo científico para dar aportes teóricos y prácticos vinculados a la formación docente y a la formación de estudiantes que involucran diseños de enseñanza para alfabetizar y razonar estadísticamente. Por ejemplo, existen estudios de cómo aprenden los estudiantes y de cómo enseñan los docentes algún tema estadístico (Zieffler et al., 2018). Además, existe interés en desarrollar distintas líneas de investigación en el marco de la Estadística Temprana[30].

En este capítulo, se hará una revisión referida a los tipos de representaciones de datos que construyen estudiantes de Educación Básica. Asimismo, se tendrá una sección para discutir tanto sobre la importancia de trabajar con datos reales en un contexto conocido y/o relevante para los estudiantes, como también las distintas e ingeniosas representaciones de datos que pueden diseñar estudiantes en el marco del análisis exploratorio de datos (Tukey, 1977). Además, se presentará el ciclo investigativo PPDAC —acrónimo referido a Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones— que sintetiza en parte el modo de trabajar de estadísticos (profesionales o usuarios) durante el transcurso de una investigación empírica y que es usado como una manera de diseñar una enseñanza para el aprendizaje de la estadística. Finalmente, se abordarán tareas estadísticas, se analizarán algunos errores y dificultades frecuentes, y se realizará una revisión curricular para entablar un diálogo con los tópicos abordados.

30 Visitar, por ejemplo, la página web del Grupo de Investigación en Estadística Temprana: https://estadisticatemprana.cl/, donde encontrará investigaciones y clases públicas en esta área.

ORGANIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE DATOS EN EDUCACIÓN BÁSICA

Representar datos es una actividad que todo estadístico o usuario de la estadística ejecuta por medio del uso de procesadores de datos, esto es, softwares como Microsoft Excel, LibreOffice Calc, GeoGebra, The R Project for Statistical Computing, entre otros. Igualmente, la representación de datos es una idea fundamental en los currículos que abordan la estadística a nivel escolar (Burrill y Biehler, 2011). No obstante, en el ámbito escolar el diseño de las distintas representaciones de datos es un tópico que se aborda permanentemente por medio del uso de materiales concretos, aunque en la escuela es poco habitual construir por sobre reproducir dichas representaciones.

A continuación, se describen algunas representaciones de datos construidas que pueden emerger a partir de una enseñanza estadística (Estrella et al., 2018), las cuales ilustran los resultados de una experiencia de aula con colaciones de los estudiantes de 4° o 5° año básico (9 a 11 años) que traen un día cualquiera —datos reales en un contexto cotidiano— en que se observa distintos tipos de colación, diversas marcas, diferentes valores nutricionales, entre otros atributos observables; con el fin de responder a la pregunta central: ¿Qué tan saludables son nuestras colaciones?

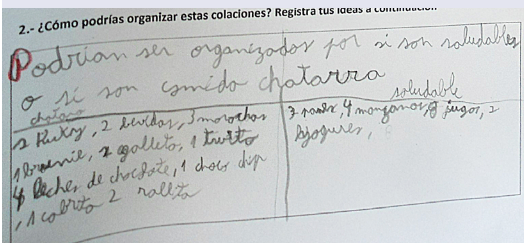


Figura 1. Ejemplo de Texto Lineal

A) Textos Lineales. Son escritos breves con datos presentados en forma de oraciones gramaticales organizadas en líneas, las cuales pueden conformar un texto descriptivo (ver Figura 1).

Indica "podrían ser organizados por si son saludables o si son comida chatarra".

Descripción. Este texto lineal, indica las categorías de la variable calidad nutricional de las colaciones. Dentro de su producción subdivide en dos partes titulando chatarra y saludable, y dentro ya es otra organización, hace listas de datos para cada caso.

B) Lista de Datos. Estructuran un conjunto de datos ordenados sucesivamente de forma horizontal o vertical, y se caracterizan por una organización lineal de los datos representados de forma icónica y/o escrita, uno tras otro, separados por espacios y/o puntuación (ver Figura 2).

Figura 2. Ejemplo de Lista de datos

Descripción. Es una lista de datos dispuesta de manera vertical, cada palabra con letra inicial roja es la subcategoría de la categoría de la variable "la chatarra" y "lo saludable". Presenta números que indican la cantidad de cada subcategoría (noción de frecuencia absoluta). Señala también la cantidad total de 24 colaciones.

C) Tablas simples de datos. Estructuran los datos de forma bidimensional a través de filas y columnas (trazadas explícita o implícitamente) para almacenar unidades de datos, en que la variable cualitativa está claramente separada de la frecuencia (ver Figura 3).

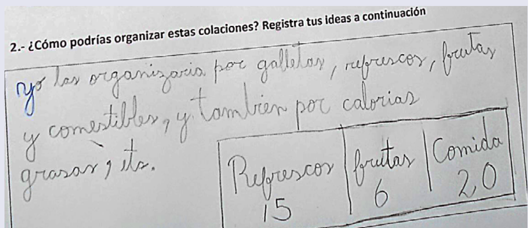


Figura 3. Ejemplo de Tabla de datos

Descripción. Se construye una tabla, cuyo encabezado superior son las categorías de la variable "refrescos, frutas y comida", y se escribe bajo estas, las frecuencias "15, 6 y 20" respectivamente en cada caso.

D) Gráfico de datos. Es un tipo de representación bidimensional que sirve para mostrar alguna relación entre las variables y puede presentar o no algún eje graduado (ver Figura 4). A su vez, el pictograma con eje graduado entra en esta categoría y

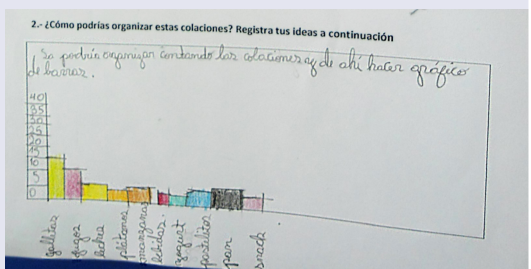


Figura 4. Ejemplo de Gráfico de datos

su característica es el uso de íconos para representar datos en que la clave indica la cantidad de datos que representa un ícono (o símbolo). Si no presenta ejes graduados se le llama diagrama de datos.

Descripción. El eje vertical es una cinta numérica de 5 en 5 (escala) y el eje horizontal indica las categorías de la variable. Cada barra refiere a las frecuencias respectivas. Se evidencia que se requiere afianzar la construcción del gráfico de barras, ya sea por el ancho de las barras (pues tiene distintos anchos) y su no-separación (pues la variable no es cuantitativa continua), entre otros aspectos de construcción formal.

Las representaciones de datos que fueron construidas por niñas y niños dan cuenta de distintos niveles de comprensión. Estas representaciones poseen un grado de invención, ciertas funcionalidades para responder a la pregunta y permiten visualizar las frecuencias de la variable que consideraron (tipo y/o calidad nutricional de las colaciones). La explicación de niñas y niños sobre sus representaciones, además de comparar una y otra representación, genera oportunidades de aprendizaje que pueden hacer mejorar su comprensión estadística en este y otros contextos cercanos y significativos.

ANÁLISIS DE DOS REPRESENTACIONES DE DATOS REALES EN UN 4° AÑO BÁSICO

Considerando la misma experiencia de aula anterior, se analizan producciones que construyeron dos estudiantes, que llamaremos ficticiamente Miguel y Javier, que cursaban 4° año básico frente al desafío de responder a ¿Qué tan saludables son las colaciones que traen los estudiantes en un cuarto año básico de la V región de Chile? Ambos estudiantes evidencian un aprendizaje estadístico inicial que puede seguir robusteciéndose. Para más información, consultar Vidal-Szabó et al. (2020).

ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN DE DATOS: EL CASO DE MIGUEL

La representación de datos que hizo Miguel de 10 años fue sorpresiva, no solo por la capacidad de invención, sino que también por la complejidad intrínseca de su representación (ver Figura 5). Miguel presentaba dificultades de lenguaje, lo cual hacía difícil en ciertas ocasiones entender lo que verbalizaba; por ello, era partícipe activo del Programa de Integración Educativa (PIE) que involucra a un grupo interdisciplinario de profesionales, entre estos, educadores y educadoras diferenciales.

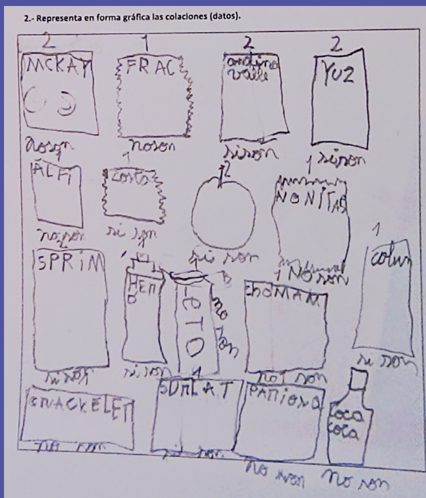


Figura 5. Producción de Miguel

Variables estadísticas. Tiene dos variables en juego, el "tipo de colación" (considera marcas: ej. McKay, Yuz, entre otros) y "calidad nutricional de la colación" que rotula como "noson" y "sison" (variable dicotómica) que muestra si es o no saludable, respectivamente.

Contexto. Colaciones del curso, según tipo y calidad nutricional de las mismas.

Tipo de representación de datos. Lista de datos (usa ícono y texto combinadamente).

Cómo representó y cómo cuantificó. Dibujó en íconos las categorías de la variable según tipo de colación, sobre cada uno asocia un número que da cuenta de su frecuencia y, bajo este, rotula como "noson" o "sison" como una segunda clasificación de los datos.

El trabajo estadístico de Miguel responde al problema sobre lo saludable de las colaciones a través de dos variables durante el temprano análisis exploratorio de datos que realiza. Sin embargo, la lista de datos que construye no tomó en cuenta todas las colaciones y dificulta comunicar a otros la información del comportamiento de la mayoría de los datos, lo que muestra un proceso estadístico en vías de consolidación.

ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN DE DATOS: EL CASO DE JAVIER

La representación de datos que hizo el estudiante Javier de 10 años fue enriquecedora durante la exhibición que hizo frente al curso. Javier, al igual que Miguel, consideró dos variables estadísticas y las relacionó para responder al problema referido a qué tan saludables eran las colaciones de su curso (ver Figura 6).

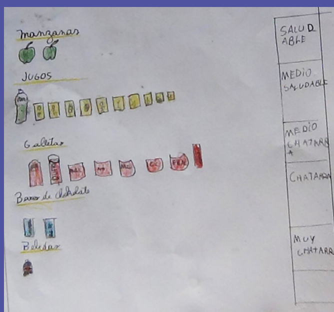


Figura 6. Producción de Javier

Variables estadísticas. Tipo de colación con categorías de la variable: “manzanas”, “jugos”, “galletas”, “barras de chocolate” y “bebida”. Asimismo, categoriza de acuerdo con la calidad nutricional de la colación desde lo “saludable” hasta lo “muy chatarra”.

Contexto. Colaciones del curso, según tipo y calidad nutricional.

Tipo de representación de datos. Lista de datos (parte izquierda de su producción) y una escala con cinco niveles (parte derecha de su producción).

Cómo representó y cómo cuantificó. Dibujó en íconos cada colación en forma lineal rotulando la categoría de la variable de manera textual. Asocia a cada categoría de la variable un nivel en la escala que se relaciona con la calidad nutricional de dichas colaciones. Notar que la frecuencia de cada una de las categorías de las variables está representada aproximadamente a través de la longitud que alcanza el conjunto de datos dibujados como íconos de manera horizontal.

El trabajo estadístico de Javier es completo, en el sentido que activó todos los procesos estadísticos requeridos para dar respuesta al problema —por ejemplo, procesar datos y construir una representación adecuada para realizar el análisis y dar respuesta a la pregunta central— evidenciando un razonamiento estadístico robusto como el de coordinar dos variables estadísticas, de acuerdo con la variabilidad de los datos y cuantificar adecuadamente en el contexto de los tipos de colación y su respectiva calidad nutricional.

EL CICLO PPDAC: UN MODELO PARA ENSEÑAR Y APRENDER ESTADÍSTICA

Propuesto por Wild y Pfannkuch hace más de 21 años, el ciclo investigativo PPDAC —acrónimo de Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones (ver Figura 7)— es una de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico en una investigación empírica. Este ciclo "describe los procedimientos a través de los cuales un estadístico trabaja y lo que el estadístico piensa para aprender más en la esfera del contexto" (Pfannkuch y Wild, 2004, p. 41).

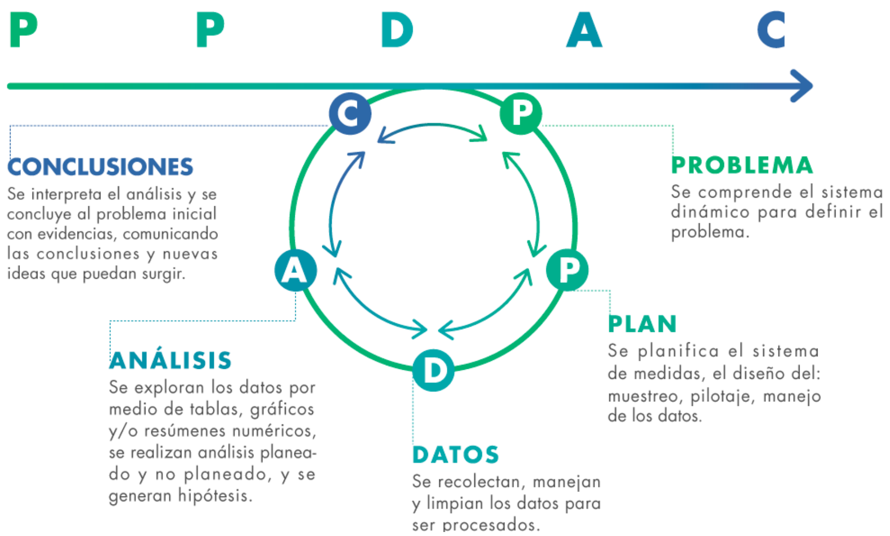


Figura 7. Esquema del ciclo PPDAC extraído de Vidal-Szabó et al. (2020).

Tal fue el impacto de la investigación de Wild y Pfannkuch (1999) que este ciclo ha servido de modelo de enseñanza para abordar el aprendizaje estadístico desde los primeros niveles escolares. Por lo tanto, si se quiere generar un ambiente de aprendizaje estadístico adecuado, entonces se debe animar a los estudiantes a indagar mediante una interrogante y así despertar la necesidad de obtener datos. Esto genera una activación de las fases del ciclo PPDAC, dotando de sentido a la evidencia basada en datos por medio del contexto, con el fin de dar alguna respuesta que se aproxime a la solución frente a la interrogante inicial y así levantar una conclusión pertinente (Cf., Vidal-Szabó et al., 2016).

NÚMEROS, DATOS E INFORMACIÓN EN CONTEXTO: DIFERENCIAS CONCEPTUALES

Existe diferencia entre los conceptos de "datos" y "números". Los datos están enmarcados en al menos una variable estadística, mientras que los números son entidades abstractas pertenecientes a un mismo sistema numérico, por ejemplo, el sistema numérico de los números naturales. Además, los números están desprovistos de contexto en la aritmética, mientras que los datos poseen un contexto intrínsecamente dada la variable estadística.

Por otro lado, se suele confundir los conceptos de "datos" e "información" porque están relacionados durante el trabajo estadístico y porque en el uso cotidiano de los términos se suelen usar indistintamente. En concreto, el procesamiento de los datos es lo que proporciona información estadística por medio de una organización, clasificación, cuantificación, construcción de representaciones de datos, entre otras actividades. De ahí que la Estadística sea definida como la ciencia de aprender desde los datos; también la ciencia de medir, controlar y comunicar la incertidumbre, según la Asociación Estadística Americana (Wild et al., 2018).

En dicho sentido, el contexto de los datos puede facilitar o entorpecer un aprendizaje estadístico en la medida que se encuentre más cerca o lejos de la experiencia personal de los estudiantes en un rol de estadísticos en ciernes. En síntesis, el contexto de los datos tiene dos roles definidos en la enseñanza: (a) el contexto que refiere al mundo real de donde surgen los datos, y (b) el contexto que involucra a los estudiantes en cuanto al conocimiento que poseen frente al contexto de los datos, ya sea por aprendizaje y/o experiencia[31].

EJEMPLO DE ENSEÑANZA PARA LLEVAR A CABO EL CICLO PPDAC

Se define un contexto de interés, el problema y el plan susceptibles de cambio en el transcurso de la enseñanza. Este punto es relevante, porque el contexto no solo atañe a los datos (a razón de la variable estadística propiamente tal), sino también a los sujetos que procesan estos datos en relación a su aprendizaje previo y/o experiencias personales referidas a dicho contexto (Cf., Pfannkuch, 2011; Pfannkuch et al., 2018).

> **A) PROBLEMA.** Supongamos que los estudiantes no se conocen tan bien dentro de un curso, frente a lo cual, su profesora decide celebrar todos los cumpleaños de dicho curso. He ahí el problema: ¿Cuándo y cómo celebrar todos los cumpleaños del curso? Esto ya supone diseñar un plan conjunto porque está latente la necesidad de recolectar datos para responder al problema.

31 Revisar la siguiente clase pública, cuyo foco fue la argumentación estadística a partir de la comparación entre dos diagramas de puntos: https://www.sumoprimeroenterreno.cl/clasepublica3/

B) PLAN. Este debe considerar una planificación que contempla el sistema de medida, el sistema de registro, el manejo de los datos, entre otros aspectos. Interrogantes como las siguientes pueden encauzar el plan: ¿Cómo obtener los datos reales? ¿Cómo registrarlos? ¿Cómo organizarlos? En el ejemplo, el plan supone buscar respuestas a ¿Cómo se podría obtener las fechas de cumpleaños (o de nacimiento) de cada estudiante?, ¿Cómo se podrían registrar? Por ejemplo, si alguien está de cumpleaños el 21 de septiembre, se registra como ¿21-09, 21-sept, 21 de septiembre, día 21 del mes 09 u otra opción?, ¿Cómo se podrían organizar las fechas de cumpleaños? En la situación propuesta: por fecha del más próximo al más lejano, por mes sin considerar los días, por cada tres meses y considerando el orden de los días u otra opción. Las decisiones efectuadas en el plan pueden sufrir cambios, porque se busca optimizar el proceso. Dado ello, los pilotajes son importantes, lo cual se traduce, por ejemplo, en probar con un pequeño grupo de estudiantes y ver cómo funciona, o bien, evaluar qué otra alternativa puede surgir en el proceso, de ahí que sea cíclico porque es factible retroceder entre una y otra fase en el ciclo PPDAC.

C) DATOS. En esta fase del ciclo PPDAC se empieza con mayor fuerza la exploración que conlleva a observar cómo varían los datos entre sí, pueden levantar algunas categorías de la variable en cuestión, se vislumbran algunas regularidades, entre otros aspectos. También es posible interrogar si acaso existe algún dato inválido (alguna fecha mal escrita, por ejemplo en el formato día-mes, 09-21 en vez de 21-09), si están todos los datos necesarios, si todos tienen el mismo formato de registro consensuado en el plan para ser procesados (algunos tal vez registraron, por ejemplo, nació el 21 de septiembre, en vez de 21-09), ¿Es necesario tener otros datos por individuo?, ¿Todos y todas celebran sus cumpleaños, tal vez algunos(as) por motivos religiosos no lo hacen? Entre otras interrogantes que se pueden hacer durante el proceso.

D) ANÁLISIS. En esta fase, se comienza un procesamiento de los datos que puede involucrar procesos de representación y/o de obtención de medidas de resumen (por ejemplo, nociones de centralidad, dispersión, forma de los datos organizados), de tal modo que los procesos de visualización pueden ser mejorados para extraer información del comportamiento de los datos. En esta fase es importante que niñas y niños puedan levantar sus propias representaciones (p.e., textos lineales, listas, tablas, gráficos, u otras que inventen creativamente) porque ello permitirá aprender sobre una y otra forma de representar para así consensuar alguna manera óptima que permita responder adecuadamente al problema inicial. Se puede preguntar si acaso la representación construida permite responder al problema y por qué, para promover la interpretación de sus propias representaciones y sus alcances de lectura, teniendo presente el contexto. Respecto al ejemplo, se puede preguntar: ¿Cada cuánto celebrarían los cumpleaños del curso?, ¿Qué ocurrirá con los cumpleaños que están en vacaciones de verano e invierno?, ¿Cuántas celebraciones se harán?, ¿Será conveniente hacer hartas o pocas celebraciones?, ¿Qué dicen los datos?, entre otras preguntas.

E) CONCLUSIÓN. Consiste en dar respuesta al problema en virtud del análisis que se realizó sobre el comportamiento de los datos. La conclusión es una alternativa de solución y/o una respuesta plausible al problema que puede ser evaluada por niñas y niños partícipes del ciclo PPDAC como enseñanza, porque puede haber conclusiones que no sean coherentes al comportamiento de los datos, o bien, conclusiones que posiblemente no podrían llevarse a la práctica u otras que se alejan de la evidencia que aportan los datos que se tienen en ese momento. En este sentido, es una buena oportunidad para desarrollar las habilidades de comunicar y argumentar en base a los datos recabados y procesados por los mismos estudiantes, integrando el conocimiento contextual que también se fue desarrollando en el transcurso del ciclo PPDAC llevado a cabo. En esta fase, también se pueden dejar otras interrogantes producto del análisis exploratorio de datos que se efectuó. En el ejemplo, tal vez sea más oportuno una actividad como el amigo(a) secreto(a) que la celebración del cumpleaños para que los estudiantes se puedan conocer mejor entre sí, dado por la distribución de las fechas de cumpleaños que se tiene a lo largo del año escolar, suponiendo que quedan varios fuera del año escolar o que caen en días feriados o que simplemente haya estudiantes que no celebran su cumpleaños por motivos religiosos o familiares.

A partir de un problema auténtico con datos reales, el ciclo PPDAC contribuye a dar sentido a los datos y fomentar la alfabetización y el razonamiento estadístico de manera fluida, los estudiantes utilizan terminología estadística para precisar su comunicación con otros, leen sus representaciones de datos y la de los otros compañeros y compañeras para comprender más, disciernen más profundamente al combinar lecturas de distintas representaciones de datos, pueden desarrollar una actitud de escepticismo frente a conclusiones débiles producto de la evidencia recabada, entre otros aspectos. También, niñas y niños podrán conectar nociones de centralidad (por ejemplo, mes en que la mayoría está de cumpleaños) con nociones de dispersión (por ejemplo, meses en que están de cumpleaños los estudiantes, ¿Serán todos los meses del año o solo algunos? Y ¿Cómo varía?), activando así un razonamiento estadístico temprano (e.g., Estrella y Vidal-Szabó, 2017; Makar y Fielding-Wells, 2011).

UNA PANORÁMICA CURRICULAR

CURRÍCULO ESTADÍSTICO CHILENO

Según la Tabla 1, en 1° y 2° año básico, se hace énfasis a la recolección y registro de pocos datos con el fin de responder preguntas estadísticas. A su vez, se fomenta la organización y construcción de representaciones de datos tales como pictograma, tablas de conteo, tablas de frecuencia y gráficos de barras simples. Mientras que en 3° y 4° año básico se espera que los estudiantes puedan diseñar y aplicar encuestas para clasificar, organizar y analizar un conjunto de datos un poco mayor que la cantidad de datos que se manejan 1° y 2° año básico. Igualmente, se sigue construyendo representaciones de datos, ahora incorporando el uso de escalas en gráficos. En 4° año básico se espera que los docentes puedan ir incorporando el uso de softwares educativos para procesar datos de manera digital.

Tabla 1. Objetivos de aprendizaje considerados para el eje temático Datos y Probabilidad de 1° a 4° año básico desde MINEDUC (2012).

Niveles de Educación Básica			
1° año	2° año	3° año	4° año
OA19. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas	OA20. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.	OA23. Realizar encuestas y clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barras.	OA25. Realizar encuestas, analizar los datos, comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.
OA20. Construir, leer e interpretar pictogramas	OA21. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	OA24. Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	OA26. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones
	OA22. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.	OA25. Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada.	OA27. Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.
		OA26. Representar datos usando diagramas de puntos.	

Además, es posible reconocer cómo algunos objetivos de aprendizaje (OA) progresan. Por ejemplo: OA19 de 1° año básico progresa al OA20 de 2° año básico, luego se progresa al OA23 de 3° año básico y se sigue con el OA25 de 4° año básico. Igualmente, ocurre una progresión con los OA20 de 1° año básico, OA22 de 2° año básico, OA25 de 3° año básico y OA26 y OA27 de 4° año básico. Estas progresiones son importantes para el diseño de la enseñanza estadística porque una misma actividad puede complejizarse en relación con el número de datos, con el tipo de representación y con los tránsitos representacionales que pueden ser intencionales y progresivos en complejidad.

Como se puede examinar, el currículo estadístico para los primeros cuatro años escolares provisto por MINEDUC (2012) en el sector Matemática, es una propuesta que puede dialogar con el ciclo PPDAC, aunque requiere atender aún más las primeras fases: Problema, Plan y Datos. Por otro lado, hay un énfasis en la construcción de distintas representaciones, lo cual supone avanzar en el manejo y análisis exploratorio de los datos y en la comunicación mediante argumentos con ideas estadísticas, en base a datos en contextos de interés para niñas y niños.

En seguida, se revisan algunas actividades propuestas por los libros del estudiante para 1°, 2°, 3° y 4° año básico del programa Sumo Primero en Terreno, y se realiza un análisis de los objetivos de aprendizaje relacionados con la estadística desde el currículo chileno.

ACTIVIDADES ESTADÍSTICAS PARA 1° AÑO BÁSICO

Se muestra una actividad del libro del estudiante para 1° año básico con el propósito de abordar la representación de datos mediante una tabla de conteo y un pictograma (sin escala). La tarea estadística es obtener información desde la interpretación de distintas representaciones para contestar preguntas de interés, por medio de la organización de los datos por categorías y el registro del conteo mediante tarjas en una tabla y su equivalente con íconos (o símbolos) en un pictograma que tiene por clave 1 unidad por cada dato.

Figura 9. Introducción de la actividad estadística (Isoda y Estrella, 2020a, p. 71)

A partir de la Figura 9, se introduce la actividad que consiste en completar la tabla de conteo (ver Figura 10). La tabla de conteo ya tiene los encabezados superiores, esto es, "Aves" (variable estadística en juego, cualitativa nominal) y "Cantidad" (frecuencia de cada una de las categorías de la variable). Notar que las "Aves" ya tienen dos categorías: gallina y pollito (representados como dibujo). La tarea es hacer tantas tarjas en la celda correspondiente de la tabla de conteo de la Figura 10, como gallinas y pollitos observa en la Figura 9.

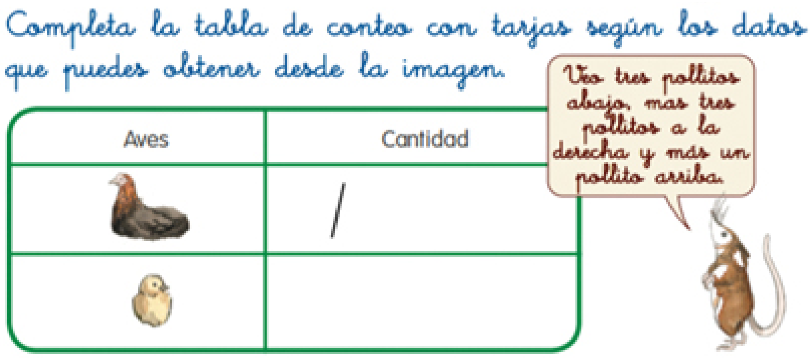


Figura 10. Tabla de conteo (Isoda y Estrella, 2020a, p. 71)

La siguiente tarea consiste en completar el pictograma horizontal propuesto, con un título que refleje lo que se está representando. El título podría ser "Aves en el gallinero de la abuela de Poli". Las preguntas, bajo el pictograma, orientan la interpretación, en tanto se identifican las frecuencias de las categorías de la variable (cantidad de gallinas y pollitos) como también se reconoce si la mayoría corresponde a pollitos y por qué.

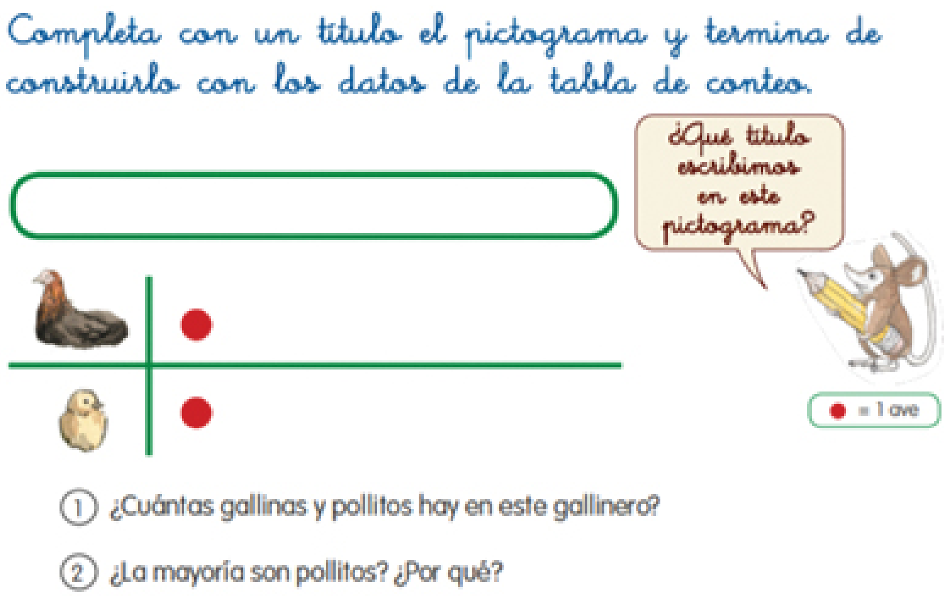


Figura 11. Pictograma (Isoda y Estrella, 2020a, p. 71)

Estas actividades potencian el uso y características de la tabla de conteo y del pictograma, y se contribuye a la identificación de la variable estadística. Tomar en cuenta que la tabla de conteo es una representación que organiza los datos pertenecientes a la misma categoría de la variable en columnas, o bien, filas mediante tarjas o marcas idénticas que representan una unidad. Mientras que el pictograma es una representación que organiza los datos a través de un único ícono (o símbolo) que se vinculan al contexto de los datos, y cada ícono puede representar uno o más datos, lo cual lo designa la clave:

● = 1 ave

El tránsito de la tabla de conteo al pictograma es el que potencia esta actividad en niñas y niños, lo cual da cuenta de una adquisición progresiva del sentido del dato, que incluye, entre otros aspectos, valorar el uso de representaciones para comprender un fenómeno y responder preguntas que requieren de datos para ser respondidas. Durante dicho tránsito, la precaución que deben tener niñas y niños es no perder o agregar datos que no correspondan, en este caso, a la cantidad de aves que se observan en la Figura 9; además que el tamaño del símbolo en el pictograma sea el mismo (punto rojo de la Figura 11), al igual que el espacio entre estos y su alineación horizontal, pues de no cumplir con ello se desvirtuará la comparación entre las frecuencias.

ACTIVIDADES ESTADÍSTICAS PARA 2° AÑO BÁSICO

A continuación, se exhibe una actividad del libro del estudiante para 2° año básico que trata la representación de datos: una tabla de frecuencias y un pictograma con escala. En relación a la imagen (Figura 12), hay que identificar a los distintos tipos de insectos y su cantidad respectiva, en este caso, 11 abejas, 10 hormigas, 3 zancudos y 6 madres de la culebra.

Figura 12. Introducción de la actividad estadística (Isoda y Estrella, 2020b, p. 48).

Después, se pide a niñas y niños registrar el número de insectos en una tabla de conteo prediseñada (ver Figura 13).

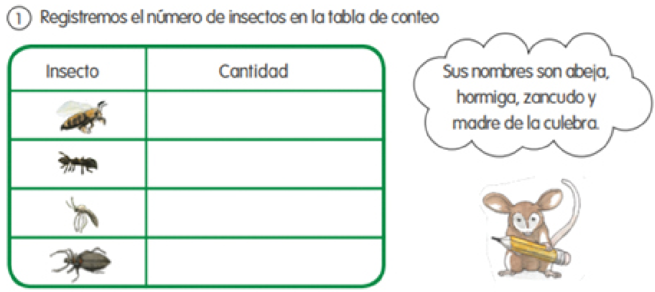


Figura 13. Introducción de la actividad (Isoda y Estrella, 2020b, p. 48).

Luego, se les solicita a los estudiantes completar un pictograma con escala prediseñado (ver Figura 14). A partir de la tabla anterior (ver Figura 13), escribir un título adecuado (por ejemplo: "Número de insectos de la imagen"), después se pide responder algunas preguntas referidas a los insectos que son mayoría, minoría y una comparación entre la cantidad de abejas y hormigas.

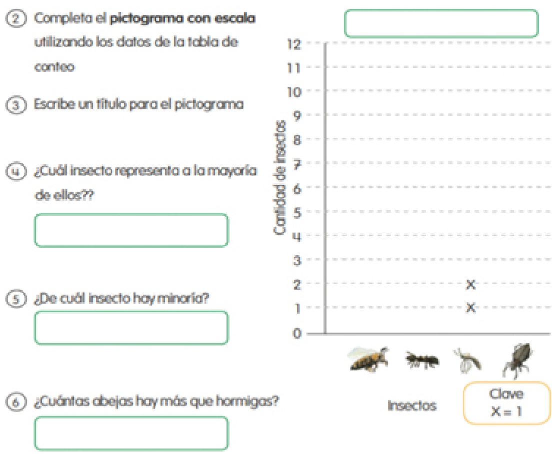


Figura 14. Pictograma con eje vertical graduado 1 en 1 (Isoda y Estrella, 2020b, p. 48)

Notar que el pictograma con escala presenta un eje vertical que está graduado con escala de 1 en 1; además se especifica que la clave es el símbolo X que representa 1 insecto (dato). Se sigue trabajando el tránsito desde una representación (tabla de conteo) a otra (en este caso, pictograma con escala), en que la complejidad en la representación aumenta progresivamente para el caso del pictograma porque en 2° año básico ya puede presentar un eje graduado con escala de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, y así, dependiendo de la cantidad de datos que tenga la actividad estadística de representación. Esta transición es posible de visualizar en la Figura 15.

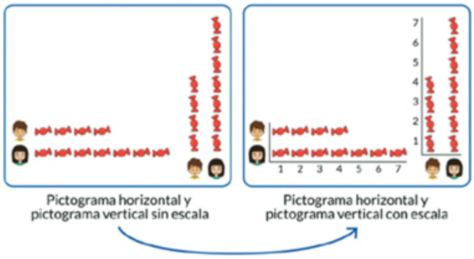


Figura 15. Tránsito de pictogramas sin escala a unos con escala (Estrella y Estrella, 2020, p. 24).

En la actividad para 2° año básico presentada anteriormente, la precaución que deben tener niñas y niños es no perder o agregar datos que no correspondan, en este caso, a la cantidad de insectos que se observan en la Figura 12. Igualmente, el tamaño del símbolo X debe conservarse, también el espacio entre estos y su alineación vertical, pues de no cumplir con ello se desvirtuará la comparación entre las frecuencias en el pictograma a completar de la Figura 14.

ACTIVIDADES ESTADÍSTICAS PARA 3° AÑO BÁSICO

La siguiente actividad del libro del estudiante para 3° año básico aborda la representación de datos: gráficos de barras con escala. En la Figura 16 hay que identificar las distintas frutas preferidas por un grupo de personas en el contexto de venta de una familia.

Gráficos de barra con escala

La familia de Amankay quiere empezar a vender frutas. Realizan una encuesta para averiguar cual es la fruta que más le gusta a la gente. Los datos de la encuesta se muestran en la tabla.

Frutas	Número de personas
Sandía	14
Chirimoya	20
Papaya	10
Melón	26
Otros	12

Figura 16. Introducción de la actividad estadística (Isoda y Estrella, 2020c, p. 57).

Dado que la cantidad de personas que prefieren las frutas es sobre 10 hasta 26 personas, es posible realizar un gráfico de barra con escala para representar los datos de una manera más sintética, en que el eje vertical que está rotulado como "número de personas" considera una escala de 2 en 2, la cual hay que completar hasta 30 (ver Figura 17). La altura de la barra azul correspondiente a la frecuencia de personas que prefieren sandía llega hasta 14 que corresponde a lo que se indica en la tabla de la Figura 16.

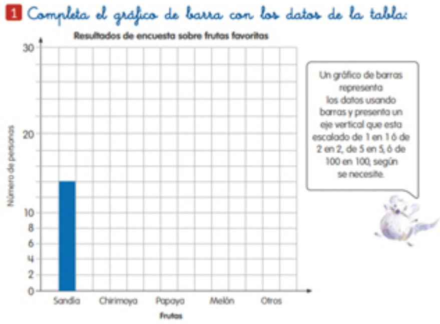


Figura 17. Introducción de la actividad estadística (Isoda y Estrella, 2020c, p. 57).

Es relevante considerar durante la enseñanza que en ocasiones los estudiantes pueden realizar barras inadecuadas, según la Agencia de Calidad de la Educación (2016). Por ejemplo, dentro de los errores de diseño en un gráfico de barras se evidencia barras de distintas dimensiones y no siempre paralelas al eje vertical (ver Figura 18) como también barras juntas o sin separación entre estas (ver Figura 19). De hecho, la Figura 4 presenta estos dos errores combinados en 4° año básico.

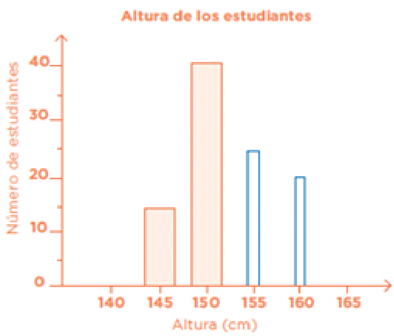


Figura 18. Error en el ancho distinto de barras azules construidas (Agencia de Calidad de la Educación, 2016, p. 89).

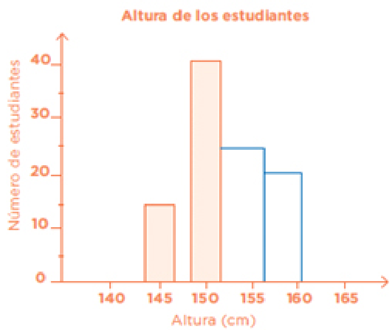


Figura 19. Error en barras azules que se construyen sin separación entre sí (Agencia de Calidad de la Educación, 2016, p. 90).

Es por ello que es importante el uso de hojas cuadriculadas para orientar el diseño del trazado de líneas con alguna herramienta (por ejemplo: regla, escuadra, entre otros) y del coloreo de las barras. El gráfico de barras simples es una representación de datos que permite comparar frecuencias, está constituido por barras rectangulares de igual ancho como base y conservan la misma distancia de separación entre sí y tienen largos como alturas variables y proporcionales a las frecuencias que representan, lo cual es relativo al eje graduado con una escala determinada.

ACTIVIDADES ESTADÍSTICAS PARA 4° AÑO BÁSICO

La actividad que viene es del libro del estudiante para 4° año básico que contempla la representación de datos: tabla de frecuencia y gráfico de barras simples. La Figura 20 exhibe un inventario de los libros que se solicita hacer, por medio de representaciones de datos.

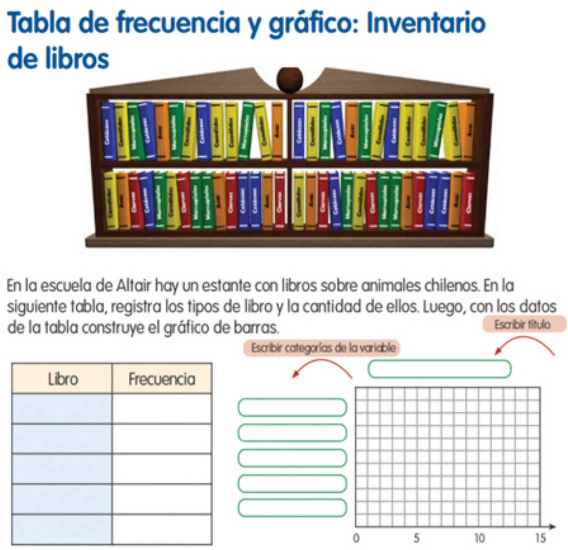


Figura 20. Introducción de la actividad estadística (Isoda y Estrella, 2020d, p. 73).

Esta actividad supone identificar los distintos tipos de libros que existen (observando color y/o materia) y la cantidad que se tiene para cada uno en el estante, lo cual permite completar la tabla de frecuencia sugerida. Luego de ello, se establece un gráfico de barras de forma horizontal para completar con el título (por ejemplo: "Libros sobre animales chilenos", según el contexto de esta actividad), completar con las categorías de la variable (tipos de libro) y construir las barras horizontales (con igual ancho y con largos proporcionales a las frecuencias de cada categoría de la variable que representa). El orden de las categorías de la variable puede hacer variar el gráfico, para lo cual se sugiere establecer un criterio (por ejemplo: orden alfabético, orden según frecuencias de mayor a menor, o bien, de menor a mayor).

Notar que el gráfico de barras es una representación más abstracta que el pictograma. El tránsito desde una representación (pictograma) a otra (en este caso, gráfico de barras simples), supone una complejidad gradual que se espera adquirir en 4° año básico de manera más afianzada (ver Figura 21)

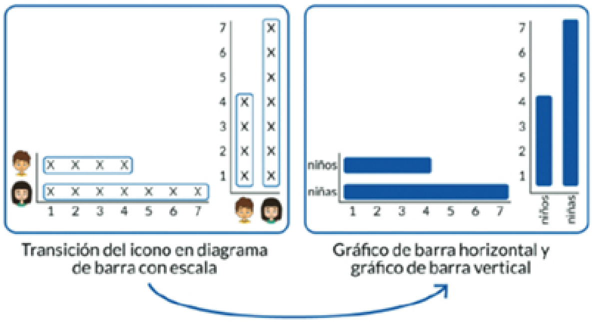
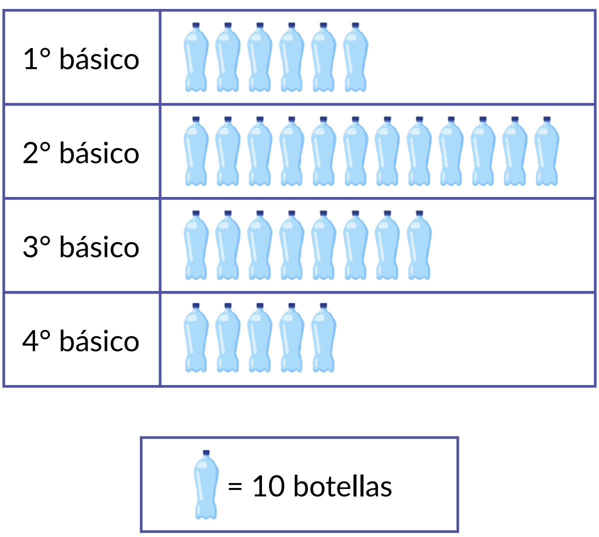


Figura 21. Tránsito de Pictogramas con escala a Gráficos de barras simples (Estrella y Estrella, 2020, p. 24).

Tal como lo reporta la Agencia de la Calidad (2019), un error habitual en la lectura de pictogramas es obviar la clave, esto es, saber cuántos datos representa el ícono (o símbolo). En el ejemplo de la Figura 22, se da una respuesta errónea por el conteo del número de botellas del 3° año básico (8 botellas), sin considerar que cada ícono de botella representa 10 botellas, por lo que la respuesta correcta es 80 botellas recicladas.

El siguiente pictograma muestra la cantidad de botellas plásticas que cada curso recicló durante una campaña ecológica:

Botellas recicladas por cada curso



¿Cuántas botellas plásticas recicló el 3° básico?

Figura 22. Ejemplo extraído de Agencia de Calidad de la educación (2019, p. 38).

CONSIDERACIONES FINALES

Enseñar estadística es un desafío que como docentes debe suponer un tratamiento distinto respecto a la enseñanza de la matemática, pues son disciplinas distintas. En este capítulo se hizo una revisión de las distintas representaciones que hacen estudiantes de 1° a 4° año básico y, en particular, se revisaron dos casos que evidencian la inventiva, funcionalidad y aprendizaje estadístico, en base al diseño de sus propias representaciones de datos. Ello permitió valorar el pensamiento en acción de los estudiantes frente a una actividad que produjo aprendizajes significativos a través del uso de sus propias colaciones fotografiadas que trajeron en un día cualquiera a su escuela.

También, en este capítulo se discutieron algunas diferencias conceptuales entre datos y números, también entre datos e información. Dichas diferencias pueden precisar la enseñanza estadística y dotar de más importancia al contexto de los datos y al conocimiento contextual que poseen los estudiantes al respecto. En ese sentido, para operacionalizar una enseñanza estadística adecuada, que puede significar más de una sola sesión de clase, es oportuno considerar el ciclo investigativo PPDAC, ya que este simula en parte el trabajo estadístico, lo cual hace que la enseñanza pueda ser más cercana y funcional a los escolares en proceso de alfabetizarse y de razonar tempranamente en este ámbito. Por ejemplo, las representaciones de datos que se caracterizaron al principio de este capítulo son evidencias de cómo niñas y niños pueden construir sus propias representaciones a partir de datos reales y buscar respuesta a ¿Qué tan saludable son nuestras colaciones? Esta mirada pragmática hace, en parte, que los aprendizajes estadísticos puedan ser más significativos.

Como proyección, se espera que las profesoras y los profesores puedan hacer uso del ciclo PPDAC como un articulador entre varias asignaturas, por ejemplo, conectando la estadística a la ciencia, a la educación física, a la geografía, entre otras; y así abordar la estadística durante el año escolar y no necesariamente al final, para vincular con tiempo actividades estadísticas con temáticas relacionadas con el trayecto formativo de niñas y niños, potenciando herramientas matemáticas como el conteo, el orden, la clasificación lógica, la comparación numérica, entre otros contenidos implicados en el quehacer estadístico temprano.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2016). *Estudio Preguntas Abiertas Matemática TIMSS 2015: ¿Qué podemos aprender de las equivocaciones de estudiantes de 8° básico en matemática?* Santiago, Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Análisis de errores frecuentes de estudiantes 4° básico en pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas*. Santiago, Chile. Recuperado de https://archivos.agenciaeducacion.cl/Aprendiendo_de_los_errores_4_basico_Final.pdf

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57–69). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Cobb, G., y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801–823. https://doi.org/10.2307/2975286

Estrella, S., y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: de listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(1), 21-34. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20

Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del Estudio de Clase: representaciones de datos en primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *78*, 12–17. Recuperado de https://www.grao.com/es/producto/alfabetizacion-estadistica-a-traves-del-estudio-de-clase

Estrella, S., y Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia metarrepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 143–163. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2143

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 1° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME1_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://

www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020d). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Lupton, D., Pink, S., y LaBond C. H. (2018). Personal Data Contexts, Data Sense, and Self-Tracking Cycling. *International Journal of Communication*, *12*, 647–665. Recuperado de http://hdl.handle.net/1885/154629

Makar, K., y Fielding-Wells, J. (2011) Teaching Teachers to Teach Statistical Investigations. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 347–358). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_33

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Ministerio de Educación: Gobierno de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/orientacion/2012/bases_curricularesbasica_2012.pdf

Moore, D. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, *93*, 1253-1259. Recuperado de http://www.stat.purdue.edu/~dsmoore/articles/LibArts.pdf

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1 y 2), 27–46. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education*, *50*(7), 1113–1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Pfannkuch, M., y Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science*, *15*(2), 132–152. Recuperado de https://projecteuclid.org/euclid.ss/1009212754

Pfannkuch, M., y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 17–46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

Tukey, J. (1977). *Exploratory data analysis*. MA: Addison-Wesley.

Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S., y Montoya, E. (2020). Análisis Cualitativo de un Aprendizaje Estadístico Temprano con la Mirada de los Espacios de Trabajo Matemático orientado por el Ciclo Investigativo. *Revista Educación Matemática*, *32*(2), 216-245. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/2/09REM32-2.pdf

Vidal-Szabó, P., Estrella, S., Morales, S., y Olfos, R. (2016). Espacio de Trabajo Matemático con dominio en la Estadística Temprana. En Estrella et al. (Eds), *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 256–259). Valparaíso, Chile: SOCHIEM. Recuperado de http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2016/03/Acta-XXJNEM-final.pdf#page=256

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–265. https://doi.org/10.2307/1403699

Wild, C., Utts, J., y Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), International *Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_1

Zieffler, A., Garfield, J., y Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

El pensamiento algebraico en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso

CARLOS CAAMAÑO-ESPINOZA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

Se sabe que los egipcios fueron los primeros que desarrollaron algunos conceptos algebraicos elementales (s. XVI a. C.), con el objeto de poder resolver problemas reales que tenían que ver principalmente con la repartición de cosechas, y que después extendieron y generalizaron a diversos tipos de reparticiones. A partir de estos conceptos, se ha investigado que fueron capaces de crear un método para resolver ecuaciones de primer grado, y como no tenían notación simbólica, utilizaron un jeroglífico para designar la incógnita, lo que le otorgó un grado importante de formalización matemática a dicho método.

El desarrollo histórico del Álgebra muestra que la construcción del lenguaje simbólico que se usa actualmente, fue muy lenta y dificultosa, con algunos períodos de mejoramiento progresivos y otros más pausados, lo que explicaría por qué el aprendizaje de este lenguaje sigue siendo dificultoso para algunos estudiantes.

Ahora, con una mirada más experta desde la Didáctica de la Matemática, en su desarrollo como disciplina científica experimental, se ha podido establecer que la enseñanza tradicional del Álgebra no favorece la comprensión de los aprendizajes de los estudiantes. Lamentablemente, se ha comprobado que esta situación continúa predominando en algunos niveles del sistema educativo, además no siempre se relaciona el Álgebra con otras ramas de la Matemática, por ejemplo con la Geometría, lo que permitiría visualizar y comprender no solo conceptos, sino también ciertos procedimientos algebraicos. Por esta razón, hoy adquiere una importancia muy significativa la introducción temprana del desarrollo del pensamiento algebraico, a partir del pensamiento relacional desde los primeros niveles de escolaridad, tal como se ha ido demostrando en diversos estudios recientes sobre esta línea de investigación conocida como "Álgebra Temprana" (Early Algebra). Esta propuesta entrega una orientación que fomenta la forma de actuar con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, que permite que los estudiantes puedan lograr los aprendizajes algebraicos requeridos, tanto para la preparación de su continuación de estudios en la educación secundaria, como para su mejor desempeño en la vida adulta (Kaput, 1999; Molina, 2009).

Por otra parte, se destaca también la importancia del uso del pensamiento relacional en situaciones de igualdad, que es un tema que hoy está siendo objeto de investigación en estudiantes de los primeros niveles de escolaridad, ya que implica tener una visión relacional del signo igual entendido como equilibrio y centrarse en las relaciones existentes entre las operaciones aritméticas y sus propiedades fundamentales, en lugar de considerarlo únicamente en el cálculo (Fernández e Ivars, 2016).

En resumen, según Castro y Molina (2007), para trabajar con el Álgebra Temprana, se considera que los docentes de los primeros niveles escolares promuevan el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico. Ellos deben procurar que sus estudiantes comprendan la importancia que tienen las propiedades, los patrones y las relaciones que están presente en cualquier actividad matemática y que caracterizan este tipo de pensamiento. Lo fundamental es que esta forma de pensar favorezca la comprensión de conceptos, por sobre los aspectos procedimentales involucrados en el trabajo algebraico. Específicamente, existe consenso entre los investigadores en promover un acercamiento estructural del Álgebra con la Aritmética y su relación con la Geometría.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS DE ENSEÑANZA

De acuerdo con Schlieman (2011), el álgebra temprana está directamente relacionada con nuevos enfoques sobre la Aritmética, el Álgebra y su relación entre estas, aclarando que ciertas ideas, técnicas y representaciones son comunes a ambas. Entre las ideas centrales de este capítulo se considera que, en los primeros niveles escolares los estudiantes puedan describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, respectivamente. Para esto, se propone trabajar en lo posible con una balanza tradicional concreta o una pictórica, como lo haremos aquí, para continuar con una representación simbólica de una igualdad y una desigualdad, partiendo en primero básico con los números del 0 al 20 y usando los símbolos "=", ">" ó "<". Esto va a permitir que en este nivel, solo de manera intuitiva, que es la que corresponde, los estudiantes se familiaricen con estas "relaciones" de equivalencia y de orden, respectivamente, iniciando de esta manera el desarrollo de su pensamiento relacional, ya que es precisamente la presencia del concepto de "relación" el que establece una de sus principales diferencias entre el pensamiento algebraico y el pensamiento aritmético. Otro importante uso del pensamiento relacional está orientado a considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones de manera global, en su totalidad, y no solo como procedimientos que han de realizarse paso a paso.

Posteriormente, se usa otro tipo de representación pictórica, por ejemplo, formando columnas de bloques cúbicos, con distintos casos de comparaciones numéricas, y se realiza la confirmación o verificación de las relaciones de igualdad y desigualdad específica, como relaciones de equivalencia y de orden, respectivamente, con el uso de la simbología correspondiente, tal como se presenta en la siguiente figura:

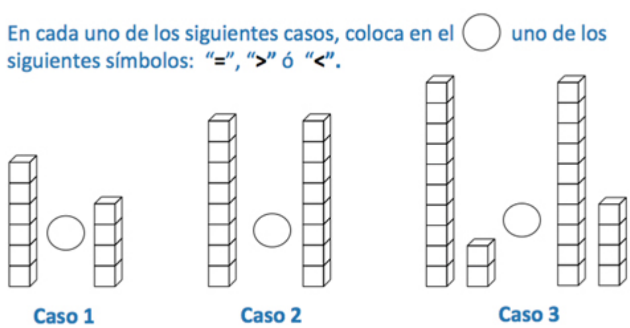


Figura 1. Situaciones pictórico-simbólicas de comparación numérica

Y como estrategia, se presentan ciertas igualdades y desigualdades que tengan la misma secuencia lógica anterior, pero solo con expresiones aritméticas que contengan adición y sustracción. En este caso, se hace necesario, primero, que los estudiantes reconozcan y escriban el símbolo correspondiente de cada relación, y segundo, que puedan determinar el (o los) número(s) que falta(n) para que la respectiva expresión sea una igualdad o desigualdad.

De esta forma se debe intentar que los estudiantes sean capaces de “descubrir” que una ecuación de un paso, como las que se van a trabajar a continuación, corresponde a una igualdad entre dos expresiones, en la cual hay valores conocidos y valores desconocidos y que obviamente se puede resolver en un solo paso. De esta forma podrán identificar el valor desconocido como incógnita o variable, el que se puede representar inicialmente con figuras geométricas, tal como se plantea en la figura del Libro del Estudiante Sumo Primero 3° Básico (Isoda y Estrella, 2020a), que se presenta a continuación:

Amankay regala 6 de sus piedras a Florencia y Amankay se queda con 13 piedras. ¿Cuántas piedras tenía Amankay antes de regalar algunas piedras a Florencia?

(1) Si ● es el número de piedras que tenía Amankay antes de regalar las piedras a Florencia ¿cuál es la ecuación que representa la situación?

$13 - 6 = ●$ $\qquad$ $● - 6 = 13$ $\qquad$ $13 - ● = 6$

Figura 2. Tarea matemática (Isoda y Estrella, 2020a, p. 25)

Además, los estudiantes se darán cuenta que resuelven una ecuación, cuando encuentran el valor de la incógnita, es decir, cuando determinan el valor que hace verdadera la igualdad.

Análogamente, se puede establecer que una inecuación de un paso, como las que se presentarán posteriormente, corresponde a una desigualdad entre dos expresiones, en la cual también hay valores conocidos y valores desconocidos y que también se pueden resolver en un solo paso. Y el(los) valor(es) desconocido(s) sigue(n) llamándose incógnita o variable, que también se puede(n) representar por ahora, en este nivel, con figuras geométricas. Se resuelve una inecuación cuando se encuentra o determina el(los) valor(es) de la incógnita o variable que hace(n) verdadera la desigualdad.

ESTRATEGIAS CON TAREAS MATEMÁTICAS MODELADORAS Y PROPUESTA DE RECURSOS DIDÁCTICOS ESPECÍFICOS

Se inicia este apartado con la presentación de algunas estrategias didácticas específicas y diversas, de cómo abordar la enseñanza para el aprendizaje de las relaciones de igualdad y desigualdad en primero y segundo básico, junto a su uso en la resolución de tareas matemáticas, en forma concreta, pictórica y simbólica.

Las igualdades y desigualdades son unas de las primeras experiencias en el pensamiento algebraico para los estudiantes, en el que se introducen las nociones elementales de algunas relaciones importantes entre objetos matemáticos. En particular, es necesario insistir que en investigaciones recientes se ha establecido que la comprensión del signo “igual” es fuente de dificultades para los alumnos, desde los primeros niveles educativos (Molina, 2006), ya que inician su formación matemática escolar con una tendencia a considerarlo solo como un símbolo operacional, debido a su experiencia con actividades de adición y sustracción. La enseñanza tradicional de este símbolo refuerza esta concepción operacional, la cual se mantiene estable a lo largo de los años y no suele ser desafiada hasta el posterior aprendizaje del Álgebra, cuando se lo presenta como una relación de equivalencia, que es lo que ahora se intenta revertir.

Por lo tanto, una de las razones fundamentales por las cuales es importante el trabajo con tareas matemáticas, que presenten la existencia o no de la relación de igualdad, desde los primeros cursos educativos, es que ayudan a superar las dificultades que tendrán los estudiantes en los siguientes niveles, cuando deben enfrentarse a la resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso.

Son diversas las actividades con igualdades y desigualdades que se pueden llevar a cabo en primero básico y para promover su desarrollo es conveniente emplear distintos sistemas de representación: concreto, pictórico y simbólico. Por ejemplo, comprender e identificar una igualdad como un equilibrio en una balanza de dos brazos (horizontal): consiste en que los estudiantes relaten con sus propias palabras que, a partir del equilibrio que se produce, se puede identificar una igualdad en la cantidad de objetos repetidos en ambos lados (platillos) de ella. En particular, las actividades del Texto del Estudiante Sumo Primero 1° Básico Tomo 2 del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), son propicias para que los estudiantes expliquen esta situación, tal como se muestra en la Figura 3.

PROBLEMA 1

Una pregunta relevante para el desarrollo del pensamiento algebraico en una igualdad, que complementa el problema anterior, es: ¿Qué ocurriría si de ambos platillos de la balanza saco, o agrego, la misma cantidad de objetos?

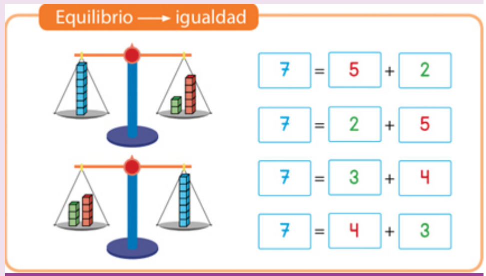


Figura 3. Relación entre equilibrio e igualdad (Isoda, 2020, p. 47)

Ahora, con respecto a la desigualdad, una de las primeras actividades sugeridas para que los estudiantes la reconozcan y la determinen, es por medio de las ideas intuitivas de: "mayor que" y "menor que", usando una balanza en desequilibrio. Los estudiantes intuyen que cuando la balanza está inclinada para un lado, indica que la cantidad representada en ese platillo es mayor que la cantidad representada en el otro. Se sugiere trabajar con materiales concretos o representar las cantidades de los platillos pictóricamente, tal como se muestran en los ejemplos de actividades propuestas por el MINEDUC en el programa de estudio de primero básico.

PROBLEMA 2

Comparar cantidades por medio de una balanza y determinar desigualdades.

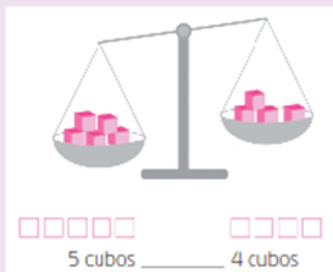


Figura 4. Relación entre equilibrio e igualdad (Isoda, 2020, p. 47)

Es importante que los estudiantes puedan representar verbalmente cuando se produce un desequilibrio en una balanza, ya que de esta forma se les orienta a que se aproximen a la noción de desigualdad. La siguiente actividad del Texto del Estudiante Sumo Primero 1° Básico Tomo 2 (MINEDUC), es apropiada para que los estudiantes expliquen esta situación.

Algunas preguntas que se relacionan con estas actividades son: ¿qué características o cualidades tienen los objetos que están en la balanza? ¿cuántos objetos hay en cada platillo de la balanza?

Y una pregunta que alude al concepto de relación de desigualdad: ¿Cómo podríamos solucionar un desequilibrio en una balanza?

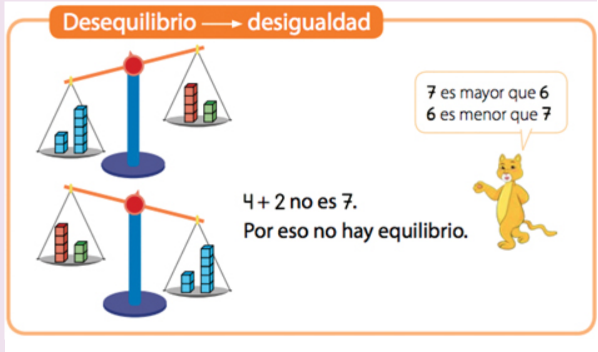


Figura 5. Relación entre equilibrio e igualdad (Isoda, 2020, p. 48)

Ahora, en segundo año se profundiza el trabajo con las relaciones de igualdad y desigualdad y se introduce los símbolos: “igual” (=), “mayor que” (>) y “menor que” (<). El desarrollo de tareas matemáticas (TMs) de comparación de cantidades, representadas pictóricamente, puede ayudar a que los estudiantes logren establecer estas relaciones y, posteriormente, realicen sus representaciones simbólicas.

El trabajo con una balanza pictórica se hace fundamental para comparar y determinar igualdades y desigualdades. Los estudiantes deben ser capaces de relacionar la inclinación del desequilibrio con la cantidad mayor. Es importante que los estudiantes registren simbólicamente las cantidades pictóricas de cada platillo de la balanza.

A continuación, se presenta un problema que pretende que los estudiantes relacionen y comparen equilibrios con desequilibrios, representados en una balanza, que puede ser concreta o pictórica, con igualdades y desigualdades, respectivamente.

PROBLEMA 3

Usando una balanza de Roberval simplificada, compara lo que ocurre en los siguientes casos 1 y 2, y responde las preguntas:

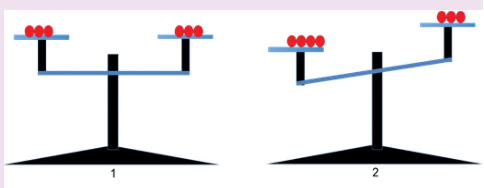


Figura 6. Comparación de equilibrio con desequilibrio

a. ¿Cuál caso representa un equilibrio o igualdad y en cual caso esto no ocurre; es decir, es un desequilibrio o desigualdad?
b. ¿Qué podrías hacer para que en ambos casos se represente una igualdad? Pero que no sea la misma y usa el símbolo “=”.
c. ¿Qué podrías hacer para que en ambos casos se represente una desigualdad distinta? Es decir, que el primer número sea “mayor que” el segundo, usando el símbolo “>” o que el primero sea “menor que” el segundo, usando el símbolo “<”.

De esta forma los estudiantes podrán comprender que el equilibrio en una balanza puede representar una relación de igualdad como la equivalencia entre el número de objetos del mismo tipo en cada lado de ella y que el desequilibrio corresponde a una relación de desigualdad (como negación de la igualdad).

Posteriormente, se presenta un problema del Libro del Estudiante Sumo Primero 2° Básico (Isoda y Estrella, 2020b), en el que los estudiantes deben escribir la igualdad o desigualdad representada.

PROBLEMA 4

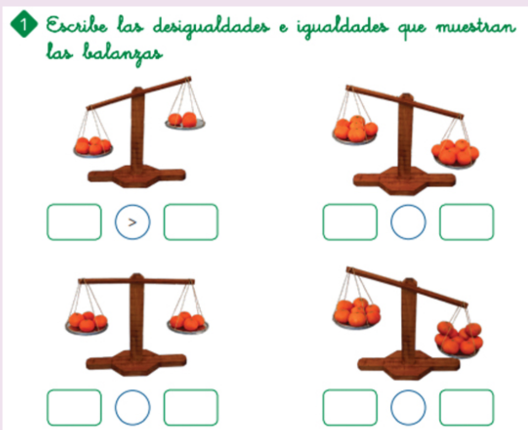


Figura 7. Descubriendo igualdades y desigualdades (Isoda y Estrella, 2020b, p. 39)

Posteriormente los estudiantes pueden realizar tareas matemáticas para comparar cantidades por medio de representaciones simbólicas, tales como:

PROBLEMA 5

Escribe en el cuadrado el símbolo >, < ó =; cuando corresponda:

(1) 2 + 7 $\square$ 1 + 5

(2) 4 + 6 $\square$ 5 + 4

(3) 4 + 5 $\square$ 3 + 6

(4) 6 + 7 $\square$ 6 + 8

Figura 8. Determinando simbólicamente igualdades y desigualdades

Y ahora, corroborar igualdades y desigualdades es una actividad aconsejable en este curso educativo. Para desarrollar este tipo de tareas matemáticas, los estudiantes pueden emplear materiales concretos (fichas, semillas, bloques base diez) o representaciones pictóricas, como en el siguiente ejemplo:

PROBLEMA 6

Corrobora o comprueba las siguientes igualdades o desigualdades, emplea dibujos o material concreto (fichas):

(1) $11 + 13 < 12 + 13$

(2) $22 + 25 > 24 + 21$

(3) $37 + 33 = 32 + 38$

Por otra parte, uno de los objetos matemáticos más importantes, que requiere de un grado mayor de adquisición del nivel de razonamiento matemático por parte de los estudiantes, y que está permitiendo "suavizar" la complejidad del Álgebra con relación a la Aritmética, al término del Primer Ciclo de la Educación Básica, es precisamente el concepto de "ecuación de un paso". Como se sabe, una ecuación de este tipo, no siempre tiene solución en el ámbito de los números naturales, lo que se constituye en un fundamento relevante para plantear posteriormente, en los cursos siguientes, las tareas matemáticas que permitan que la comprensión del concepto de "elemento opuesto", como inverso aditivo, y de esta forma realizar la extensión intuitiva del conjunto de los números naturales al conjunto de los números enteros. Algo análogo ocurre con la "inecuación de un paso", pero claramente con significados de mayor grado de complejidad aún, ya que aparte de que también podría no tener solución en los números naturales, aparece la posibilidad de que la "variable" pueda tomar más de un valor numérico o tener "infinitos valores", como soluciones.

Uno de los aspectos principales por los cuales es importante el trabajo con la resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso en tercero y cuarto año básico, es que ayuda a superar las dificultades que pueden presentar los estudiantes en su continuación de estudios de la Educación Básica, en la modelación y resolución de problemas que involucren ecuaciones e inecuaciones lineales, usando razonamiento directo e inverso, tanto aditivo como multiplicativo.

En tercero y cuarto año básico los estudiantes deben llegar a describir verbalmente la ecuación e inecuación de un paso, identificando claramente la incógnita o variable, según corresponda. Es importante que este trabajo sea con representaciones pictórico-simbólicas en sus inicios (figuras geométricas). Además, se pretende que los estudiantes de este nivel puedan ser capaces de resolver un problema mediante la modelización de la situación, planteando la ecuación o inecuación, según corresponda.

Por esta razón, ahora se presentan algunas estrategias didácticas específicas de cómo abordar la enseñanza para el aprendizaje de los aspectos básicos de la resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso, en tercero y cuarto año básico. En tercero básico son diversas las actividades con ecuaciones de un paso que se pueden llevar a cabo, usando distintas tareas matemáticas en las que esté presente la relación inversa que se produce entre la adición y la sustracción, de tal forma de avanzar en la abstracción y la generalización de conceptos, propia del razonamiento algebraico. Para tal efecto sugerimos continuar empleando distintos sistemas de representación (modelo COPISI).

Lo primero que se pretende es que los estudiantes puedan comprender e identificar una ecuación de un paso como una igualdad, que corresponde al equilibrio en una balanza, tal como se presenta en la Figura 9.

Figura 9. Resolviendo pictórica y simbólicamente una ecuación de un paso

Después de esta resolución pictórica, nos interesa saber si los estudiantes son capaces de escribir la ecuación como:

$$\boxed{} + \boxed{15} = \boxed{17}$$

O mejor aún, "simbólicamente":

$$\blacksquare + 5 = 7$$

En este caso es muy importante que el profesor destaque el hecho de que el valor desconocido pueda estar presente en cualquiera de los dos sumandos (o términos del primer miembro de la ecuación). Lo anterior permite que los estudiantes identifiquen y relaten con sus propias palabras que una ecuación es una igualdad que se produce entre dos expresiones en la cual hay valores conocidos y un valor desconocido llamado incógnita, que puede ser cualquiera de los sumandos y que por ahora se representará con una figura geométrica, tal como se presenta en el Libro del Estudiante Sumo Primero 3° Básico (Isoda y Estrella, 2020a):

Una **ecuación** es una **igualdad entre dos expresiones** en la cual hay valores conocidos y valores desconocidos. Llamaremos **incógnita** al valor desconocido de una ecuación y se puede representar con figuras o letras.

Por ejemplo:

$6 + \blacktriangle = 10$

6 y 10 son los valores conocidos. $\blacktriangle$ es la incógnita.

Figura 10. Definiendo ecuación de un paso (Isoda y Estrella, 2020a, p. 25)

RESOLVIENDO ECUACIONES

Aquí se espera que los estudiantes comprendan que resolver una ecuación de un paso, con razonamiento aditivo (directo e inverso) corresponde a determinar el valor de la incógnita para que la igualdad se verifique (se cumpla). Es decir, se hace presente la necesidad de reemplazar en la ecuación, el valor de la incógnita con el valor concreto encontrado y comprobar la igualdad, lo que es muy importante para consolidar el aprendizaje. Esto se puede hacer en el ejemplo anterior de ecuación, representada por una balanza en equilibrio, ya que basta hacer uso de la descomposición aditiva 17 = 2 + 15, para concluir que el valor de la variable es 2, y que es la solución de la ecuación.

Ahora se propone continuar con la realización de tareas matemáticas orientadas a la resolución de ecuaciones de un paso, como las que se presentan en el Libro del Estudiante Sumo Primero 3° Básico (Isoda y Estrella, 2020a).

PROBLEMA 7

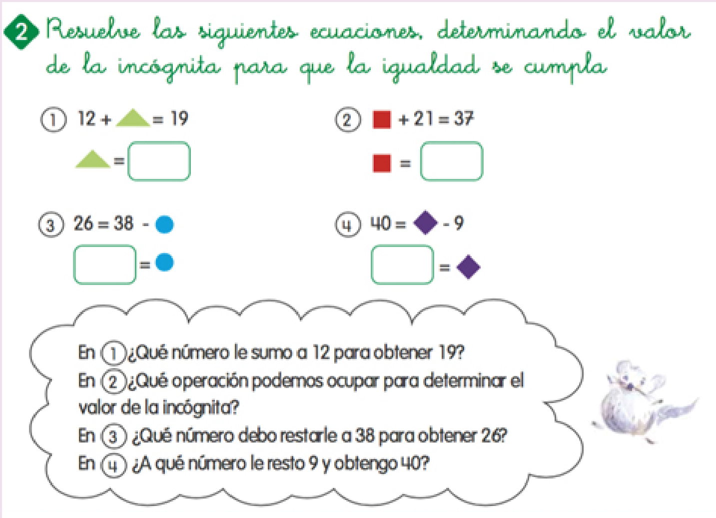


Figura 11. Resolviendo ecuaciones de un paso (Isoda y Estrella, 2020a, p. 27).

Con el objeto de entregar una orientación a los estudiantes para que enfrenten con éxito su tarea matemática, se sugiere tener presente algunas preguntas relevantes para el desarrollo del razonamiento algebraico en una ecuación de un paso, tales como:

¿Qué ocurriría si se reemplaza la incógnita de una ecuación de un paso por un valor cualquiera?
¿Qué debo hacer cuando en la ecuación hay una incógnita con una adición o una sustracción?

Una vez superada esta etapa, el nivel siguiente es aquel en que los estudiantes se enfrentan a la resolución de un problema, en el que tengan que determinar la respectiva ecuación. Es decir, haciendo uso de los datos dados en el problema, que escriban la respectiva frase matemática, que ahora llamaremos "modelo matemático", que corresponde al enunciado y que les permite resolver el problema. Para tal efecto, también se hace necesario plantear algunas preguntas orientadoras que se relacionan con la actividad anterior, tales como:

¿Cuáles son los datos conocidos y cuál es la incógnita en este problema?
¿Cuál es la operación que se requiere para plantear la ecuación de un paso? ¿Por qué?

PROBLEMA 8
En el 3° B hay 27 estudiantes. ¿Cuántos de ellos pudieron participar en la clase de Matemática de hoy, si 9 no pudieron conectarse?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA
Variable: número de estudiantes que participaron en la clase, que se designa por:

$$\blacktriangle$$

Datos conocidos: en el 3° B hay 27 estudiantes y 9 no pudieron conectarse.
Luego, el modelo matemático es:

$$\blacktriangle + 9 = 27$$

Y como: 27= 18 + 9, tenemos que: $\blacktriangle = 18$

Por lo tanto, el número de estudiantes que participaron en la clase fue: 18.

Ahora, en cuarto básico, se profundiza el trabajo con las ecuaciones de un paso y se introduce el concepto de inecuación de un paso. Para tal efecto existen diversas actividades con inecuaciones de un paso que se pueden llevar a cabo, usando nuevamente la relación inversa que se produce entre la adición y la sustracción y continuar avanzando en la abstracción y la generalización de conceptos para el desarrollo del razonamiento algebraico por parte de los estudiantes. También sugerimos emplear distintos sistemas de representación.

De forma análoga al trabajo realizado con las ecuaciones de un paso, lo primero es lograr que los estudiantes puedan comprender e identificar una inecuación de un paso como una desigualdad, que ya saben que corresponde a un desequilibrio en una balanza, tal como se presenta en la Figura 12.

Figura 12. Resolviendo pictóricamente una inecuación de un paso

Después de esta representación pictórica, nos interesa saber si los estudiantes son capaces de escribirla como:

$$\square + 25 > 30$$

O mejor aún, "simbólicamente":

$$\blacksquare + 25 > 30$$

Lo anterior permite que los estudiantes identifiquen y relaten con sus propias palabras que una inecuación de un paso es una desigualdad entre dos expresiones, que se puede resolver en un solo paso, en la cual hay valores conocidos y valores desconocidos, llamados incógnita o variable, el(los) que se puede(n) representar con figuras geométricas, tal como se presenta en el Libro del Estudiante Sumo Primero 4° Básico (Isoda y Estrella, 2020c):

A las desigualdades con un valor desconocido las llamaremos **inecuaciones.**

$\square + 2 < 9$ es una inecuación

Figura 13. Definiendo inecuación de un paso (Isoda y Estrella, 2020c, p. 70)

RESOLVIENDO INECUACIONES

Aquí se espera que los estudiantes comprendan que resolver una inecuación de un paso, con razonamiento aditivo (directo e inverso) corresponde a determinar el valor de la variable para que la desigualdad se verifique (se cumpla). Es decir, se hace presente la necesidad de reemplazar el valor de la variable, con el valor concreto encontrado en la inecuación y comprobar la desigualdad, lo que es muy importante para consolidar el aprendizaje. Esto lo podrán hacer en el ejemplo anterior con la inecuación que representa la balanza en desequilibrio del ejemplo anterior, ya que haciendo uso de la descomposición aditiva 30 = 5 + 25, la idea es que los estudiantes puedan concluir que la variable puede ser reemplazada por cualquier número natural mayor que 5, con lo que se resuelve la inecuación. Lo que responde a un tipo de razonamiento algebraico que se espera que los estudiantes puedan lograr en este curso, es decir, que sean capaces de darse cuenta que esta inecuación tiene infinitas soluciones.

Ahora la idea es continuar con la realización de tareas matemáticas orientadas a la resolución de inecuaciones de un paso, como las que se presentan a continuación. Para tal efecto, se sugiere que se planteen algunas preguntas que permitan consolidar el desarrollo del razonamiento algebraico requerido en una inecuación de un paso, tales como:

¿Por qué en una inecuación el o los valor(es) desconocido(s) se llama(n) variable?
¿Qué ocurriría si reemplazo la variable de una inecuación de un paso por un valor cualquiera?
¿Qué debo hacer cuando en la inecuación hay una variable con una adición o una sustracción?

PROBLEMA 9
Resuelve las siguientes inecuaciones, determinando los valores de la variable para que la desigualdad se cumpla:

1) $\blacksquare + 21 < 25$

$\blacksquare = \square$

2) $42 + \blacktriangle > 50$

$\blacktriangle = \square$

3) $\blacklozenge - 16 < 9$

$\blacklozenge = \square$

Figura 14. Resolviendo inecuaciones de un paso.

Finalmente, tal como se hizo con las ecuaciones de un paso en tercero básico, se pretende que, una vez superada esta etapa en que los estudiantes de cuarto básico son capaces de resolver inecuaciones de un paso, se transite al nivel siguiente, en que se enfrenten a la resolución de un problema, en el que deban comenzar por determinar la respectiva inecuación (modelo matemático) y la resuelvan como ya lo han aprendido. Para tal efecto, también se hace necesario plantear algunas preguntas orientadoras que se relacionan con la actividad anterior, tales como:

¿Cuáles son los datos conocidos y cuál es la variable en este problema?
¿Cuál es la operación que se requiere para plantear la inecuación de un paso? ¿Por qué?

PROBLEMA 10
León tiene 24 bolitas. ¿Cuántas bolitas deberá ganar en el próximo juego para tener un número mayor que el de su hermano Pedro que llegó a 30?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA
Datos conocidos: León tiene 24 bolitas y Pedro que llegó a 30.

Variable: número de bolitas que deberá ganar León para tener un número de bolitas mayor que el de Pedro, que designaremos por:

$$\blacktriangle$$

Luego, el modelo matemático es:

$$\blacktriangle + 24 > 30$$

Y como: 30 = 6 + 24, tenemos que, el problema se resuelve con:

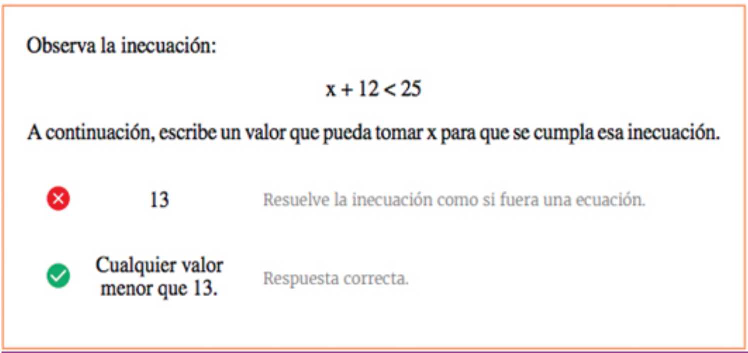
$$\blacktriangle = 7$$

Por lo tanto, el número de bolitas que deberá ganar León en el próximo juego es 7. Pero también podría ganar cualquier otro número mayor que 6.

POSIBLES DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE

En este apartado se muestran unos ejemplos de errores comunes que presentan los estudiantes, relacionados con la comprensión de los símbolos “igual” (=), “mayor que” (>) y “menor que” (<). Aunque cuesta creerlo, aún en cuarto básico los estudiantes continúan presentando los siguientes errores específicos asociados a sus respuestas incorrectas a problemas de las pruebas SIMCE y TIMSS de Matemática (Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 24-25):

1. Resuelven inecuaciones como si fueran ecuaciones, tal como se observa en la siguiente figura:


Observa la inecuación:

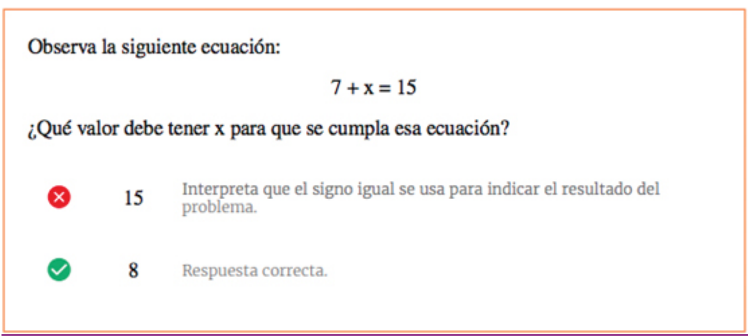
$x + 12 < 25$

A continuación, escribe un valor que pueda tomar x para que se cumpla esa inecuación.

✗	13	Resuelve la inecuación como si fuera una ecuación.
✓	Cualquier valor menor que 13.	Respuesta correcta.

Figura 15. Resolviendo una inecuación
(Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 24)

Interpretan el signo igual como un indicador del resultado de operación en el problema y no como la relación de igualdad entre dos expresiones equivalentes, tal como se observa en la siguiente figura:


Observa la siguiente ecuación:

$7 + x = 15$

¿Qué valor debe tener x para que se cumpla esa ecuación?

✗	15	Interpreta que el signo igual se usa para indicar el resultado del problema.
✓	8	Respuesta correcta.

Figura 16. Resolviendo una ecuación
(Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 25)

Por esta razón adquiere relevancia corroborar igualdades y desigualdades, que es una actividad indispensable para el desarrollo del pensamiento relacional en los primeros cursos del sistema escolar. De esta forma los estudiantes podrán comprender, en primer lugar, que el signo igual indica una relación, de tal modo que las cantidades que se representan en cada lado de la igualdad tienen el mismo valor (son equivalentes) y que no solo lo entiendan como un resultado de algo. Es decir, no logran darse cuenta que, por ejemplo: 6 + 2 = 5 + 3. Este es un error que suele ocurrir, especialmente cuando los estudiantes no han realizado un trabajo adecuado con la estrategia de la descomposición aditiva de un número.

Por ejemplo, si los estudiantes realizan las cuatro distintas descomposiciones aditivas del número 8, en dos sumandos, usando material concreto, esto es, un conjunto o grupo de 8 objetos del mismo tipo y tamaño, tales como: bloques, canicas, tapillas, entre otros, pueden determinar fácilmente las distintas formas de separarlos en dos grupos. Incluso, podrán hacer una representación pictórica de esta situación.

Y de forma simbólica, a partir de la idea de sucesor, podrán obtener las siguientes descomposiciones:

(1) 8 = 7 + 1
(2) 8 = 6 + 2
(3) 8 = 5 + 3
(4) 8 = 4 + 4

Y podrán verificar que las sumas “6 + 2” y “5 + 3”, corresponden al mismo número 8 y que, por lo tanto, es posible escribir: 6 + 2 = 5 + 3. Lo que es una conclusión muy intuitiva de la transitividad de la igualdad, como relación de equivalencia.

En las descomposiciones anteriores, también se sugiere orientar a los estudiantes para que puedan relacionarlas de tal forma que: a partir de la primera (que es la más simple), obtengan las otras, disminuyendo el primer sumando en 1, 2 ó 3, y aumentando el otro en la misma cantidad. Esto les permitirá llegar, por ejemplo a que: 7 + 1 = 4 + 4. Esto es, partiendo de 7 + 1, disminuye el 7 en 3 y aumenta el 1 en 3, para llegar a 4 + 4.

Por otra parte, también es claro que los problemas verbales promueven en los estudiantes la justificación lógica relativa a la igualdad, no solo como la que se ha señalado en el ejemplo anterior, sino en otras más complicadas.

Ahora, uno de los errores más importantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso, nace de una enseñanza tradicional, algorítmica y sin significado, cuando los estudiantes memorizan la siguiente regla que su profesor puede presentarles: “En toda ecuación, un término que se está sumando en un lado, pasa para el otro lado restando y si se está restando pasa sumando”. Ocurre que esta memorización sin sentido no hace aporte alguno al desarrollo del pensamiento algebraico y además, cuando se olvida, provoca serios errores en los estudiantes.

Lo anterior es más difícil que ocurra cuando los estudiantes se pueden dar cuenta que si las cantidades que se comparan son iguales en un comienzo, se conserva la equivalencia cuando se produce la misma transformación en ambos lados de la igualdad. Por ejemplo, cuando se agrega o se quita una misma cantidad a aquello que se está comparando. De lo contrario, si se agregan cantidades diferentes la equivalencia no es conservada. Lo mismo ocurre cuando las cantidades que se comparan no son iguales, es decir, si se tiene una desigualdad y se agrega o se quita una misma cantidad, se mantiene la misma desigualdad. Esto permite concluir en la siguiente institucionalización, que se puede plantear como: “La suma de un número (cualquiera) en ambos lados de una igualdad o desigualdad, se “anula” con la resta del mismo número y recíprocamente la resta de un número se “anula” con la suma del mismo”. Tal como se muestra en la siguiente figura:

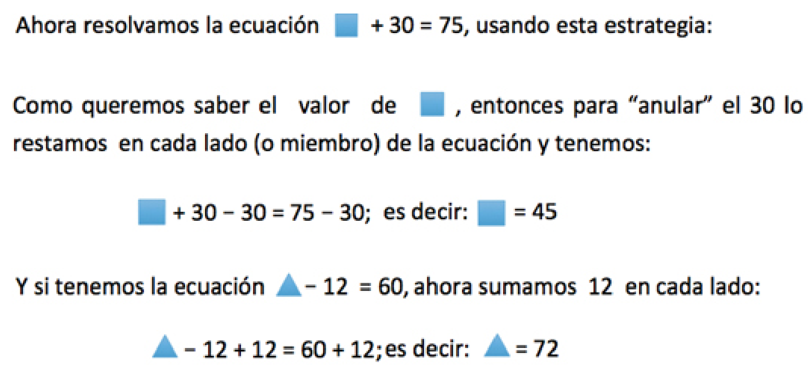


Figura 17. Resolviendo ecuaciones de un paso

Por esta razón, las ecuaciones e inecuaciones de un paso son las primeras experiencias de pensamiento algebraico, en que los estudiantes se introducen en los conceptos de incógnita y variable. Al mismo tiempo, podrán reconocer que las ecuaciones de este tipo pueden tener solo una solución, a diferencia de las inecuaciones, que normalmente tienen más de una solución y, en algunos casos infinitas.

REFLEXIONES FINALES

En este capítulo se ha abordado un tema relevante para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de Primer Ciclo de la Educación Básica. Por esta razón, se ha intentado establecer que, en la enseñanza para el logro de los aprendizajes de las ecuaciones e inecuaciones de un paso, desde los primeros años, se debe procurar que los estudiantes relacionen equilibrios y desequilibrios, que pueden ser representados en una balanza, con la igualdad y desigualdad, respectivamente. Y posteriormente, de acuerdo con sus respectivos significados, y haciendo uso de variados sistemas de representación concreto, pictórico y simbólico, poder introducir los símbolos: “igual” (=), “mayor que” (>) y “menor que” (<), junto a su interpretación como relaciones de equivalencia y de orden cuando corresponda. De esta forma, los estudiantes podrán comprender que estos símbolos indican una relación entre las cantidades de cada lado de respectiva expresión.

Por último, se ha querido establecer que los estudiantes sean capaces de relacionar igualdades y desigualdades, representadas en una balanza pictórica o simbólicamente, con sus respectivas ecuaciones e inecuaciones e introducir los conceptos de “incógnita” y “variable”. Lo que, junto con los significados que están en juego en los procedimientos de resolución de ecuaciones e inecuaciones de un paso, permita que los estudiantes logren resolver problemas que promuevan el desarrollo de su pensamiento algebraico.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas.* Santiago, Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf.

Carpenter, T. P., *Franke*, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and Algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo del Pensamiento Relacional mediante trabajo con igualdades numéricas. *Educación Matemática*, *19*(2), pp. 67-94.

Fernández, C., e Ivars, P. (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *Revista Uno*, *73*, 14-22.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transformations from Arithmetic to Algebra. *From Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 415-422). Bergen: University College.

Isoda, M. (2020). *Sumo Primero: Texto del Estudiante Primero Básico Tomo 2*. Chile: Ministerio de Educación de Chile.

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), Mathematics *classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico visión histórica. *IRICE*, *13*, 105-132.

Ministerio de Educación de Chile (2013). *Programa de estudio primer año básico: Matemática.* Santiago, Chile.

Molina, M., y Castro, E. (2005). *Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional.* En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.), IX simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, (pp. 205-213). Córdoba: SEIEM.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Schliemann, A., Carraher, D., y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética.* Buenos Aires: Paidós.

SUMO primero EN TERRENO

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO