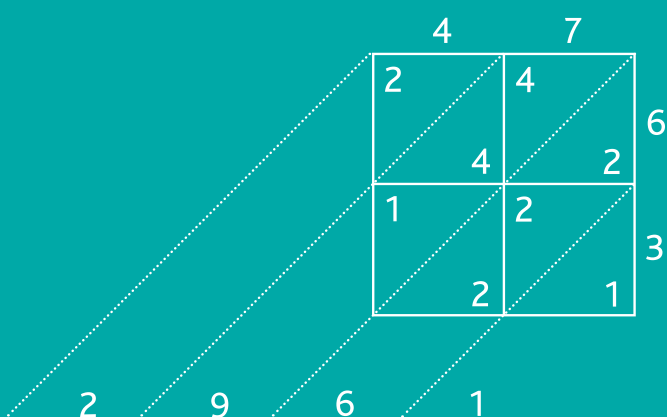
Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

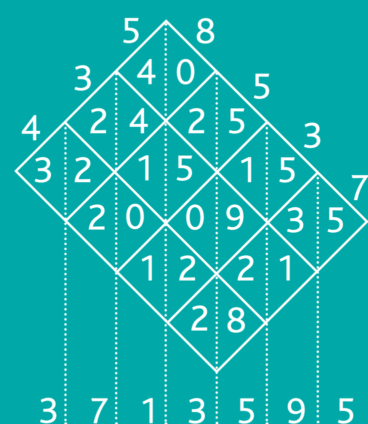
Desarrollo de habilidades:

Aprender a pensar matemáticamente

7º y 8º año de Educación Básica

Habilidad de **resolver problemas**





DESARROLLO DE HABILIDADES:
APRENDER A PENSAR MATEMÁTICAMENTE

7° y 8° año de Educación Básica

Ministerio de Educación

Material elaborado por Alejandro Pedreros Matta,
Unidad de Currículum y Evaluación y Profesionales del
Nivel de Educación Media de la División de Educación General.

Ministerio de Educación de Chile
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago – Chile

Coordinación Editorial:
Jasnaya Carrasco Segura
Sandra Molina Martínez
División de Educación General MINEDUC

Diseño:
Verónica Santana
Sebastián Olivari

Registro de Propiedad Intelectual N° 266188
ISBN: 978-956-292-547-1

mayo, 2016

Índice

Desarrollo de Habilidades:

Aprender a Pensar Matemáticamente

ANTECEDENTES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Las Bases Curriculares que abordan los años académicos de 7º año de Educación Básica a 2º año de Educación Media[1], comprenden en forma transversal habilidades de pensamiento en que subyace la habilidad de solucionar situaciones diversas. En la asignatura de Matemática, se señala:

> "Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas" (p.104).

Del mismo modo y con respecto a los Estándares de Aprendizaje, descritos para 8º año de Educación Básica, el Nivel de Aprendizaje Adecuado en el contexto de la resolución de problemas en la asignatura de Matemática establece que las y los estudiantes deben:

> "(...) mostrar generalmente que son capaces de aplicar conocimientos y habilidades de razonamiento matemático en situaciones directas y en problemas de varios pasos en los que se requiere elección de datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado"[2] (p. 10).

Asimismo, el currículum nacional potencia el logro de objetivos de aprendizaje que articulan el desarrollo de contenidos, habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática. En este contexto, es importante analizar y ejemplificar cómo las habilidades matemáticas descritas para 7º y 8º año de Educación Básica aportan a la formación de un ciudadano para resolver e

---

1. Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.
2. Ministerio de Educación de Chile (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática.

interpretar problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, para lo cual se requiere de un alto nivel de comprensión de las matemáticas y de razonamiento matemático.

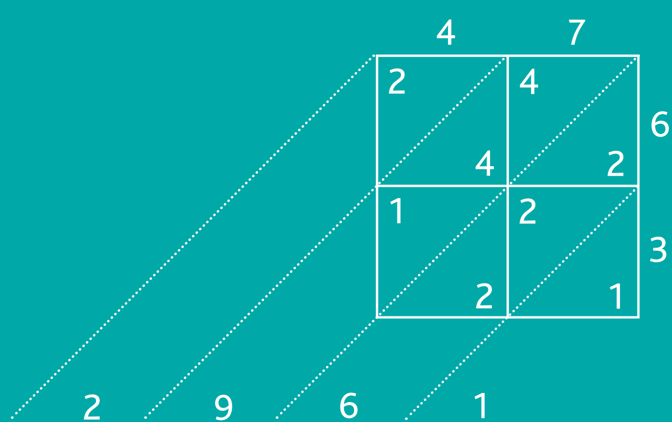
Por otra parte, la formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (Mineduc, 2013). Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

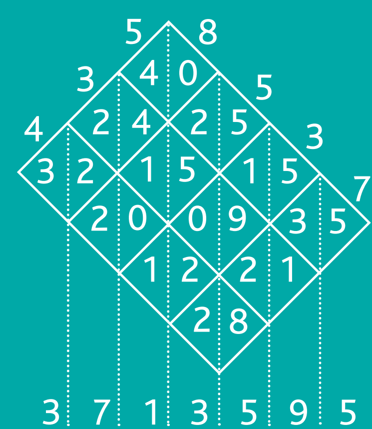
Para lograrlo, es necesario que los ciudadanos desarrollen el razonamiento matemático, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a un estudiante que aplique la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos matemáticos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él, que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite aplicar conocimiento y comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la resolución de problemas. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por una parte, que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. Otro de los énfasis del currículum de matemática consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal, o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Las Bases Curriculares dan relevancia al modelamiento matemático. El objetivo de desarrollar la habilidad de modelamiento matemático es lograr que las y los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos. Asimismo, las habilidades comunicativas y argumentativas son centrales en este escenario, estas se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

Por lo tanto, aprender a ser docente de matemáticas implica desarrollar, entre otras, la competencia de planificar, aplicar y analizar estrategias e instrumentos de evaluación adaptados a las características de las competencias matemáticas desarrolladas por las y los estudiantes (Font y Godino, 2011). Además, como docentes de matemáticas, sabemos que debemos escuchar más a las y los estudiantes y, sobre todo, formular preguntas que permitan al docente generar oportunidades de aprendizaje. Es responsabilidad nuestra ir avanzando en el manejo del cuaderno como un instrumento de trabajo y un registro que permite obtener evidencia de aprendizaje.

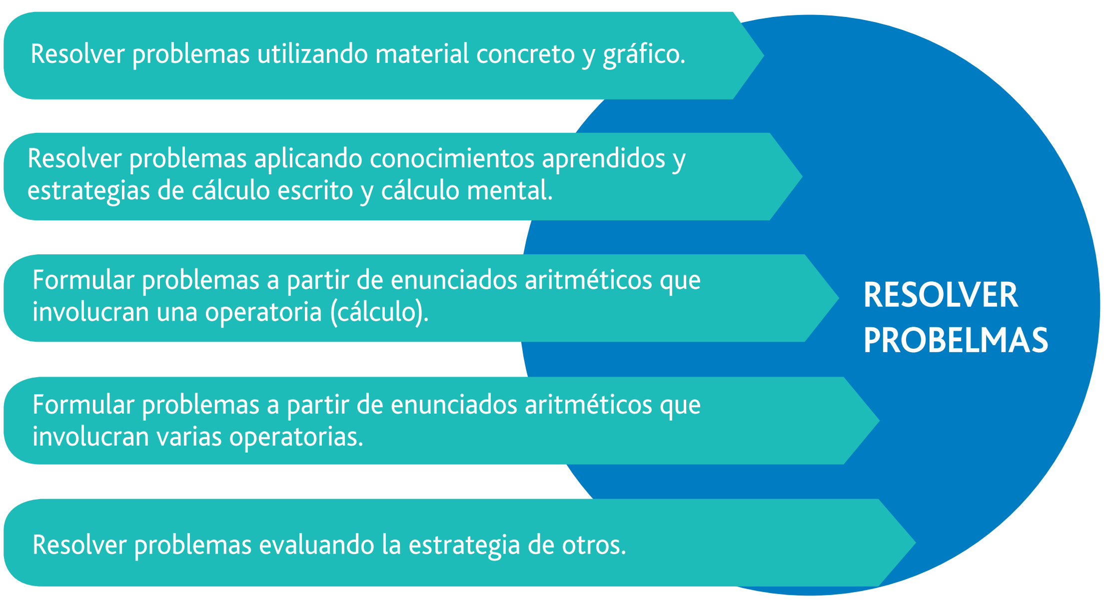
Habilidad de **resolver problemas**





¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que procuren el desarrollo de la **habilidad de Resolver Problemas**?

Esta habilidad implica resolver problemas utilizando material concreto y gráfico, aplicando conocimientos aprendidos y diferentes estrategias de cálculo escrito y/o cálculo mental, que involucran una o varias operatorias, y evaluar estrategias de otros. A continuación se presentan procesos clave que procuran desarrollar la habilidad de Resolver Problemas.



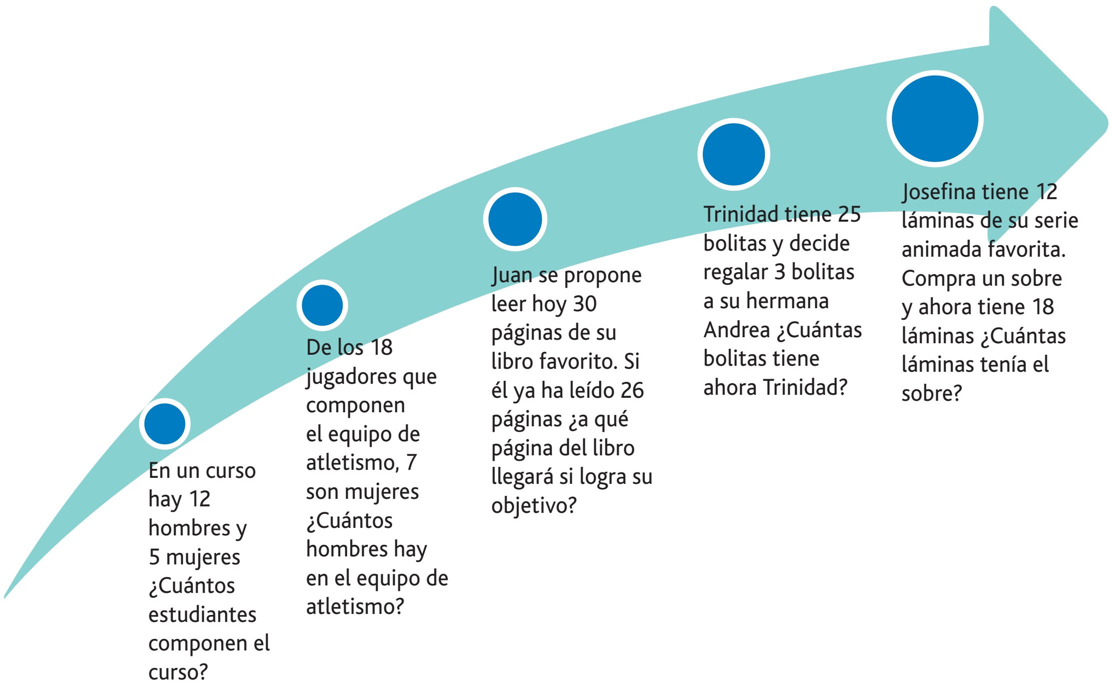
Uno de los grandes objetivos de la enseñanza elemental de las matemáticas es enseñar a resolver problemas. Cuando se habla del cálculo se está ante una de las grandes herramientas que ofrecen las matemáticas precisamente para eso, resolver problemas. No se debe olvidar que se trata de enseñar las operaciones, no solo el cálculo, por lo que no se puede abordar esta tarea sin un planteamiento riguroso y completo de los problemas que dan sentido a la operatoria aritmética (Chamorro, 2009).

El proceso de aprendizaje debe procurar resolver problemas que cumplan con las siguientes características:

- Ser coherentes con el objetivo de aprendizaje y los indicadores de evaluación planteados;
- su resolución implica analizar y/o evaluar diferentes representaciones;
- su solución debe implicar algún nivel de justificación matemática;
- su enunciado debe incluir contextos significativos para los estudiantes;
- los estudiantes deben explicar el significado de la solución o los resultados obtenidos, y
- su resolución debe implicar resolver una progresión de actividades que impliquen diferentes niveles de demanda cognitiva o dificultad disciplinar.

A continuación se presentan progresiones de problemas para cada curso, de tal manera de ejemplificar y dar una orientación disciplinar-pedagógica acerca de qué problemas podrían ser utilizados como oportunidad de aprendizaje para resolver problemas de adición y sustracción.

Sugerencia de progresión de problemas aditivos: **parte 1**



Problema composición de medida (juntar / separar) → Problema composición de medida (juntar / separar) → Transformación de medidas (agregar / quitar) → Transformación de medidas (agregar / quitar) → Transformación de medidas (agregar / quitar)

Por otra parte, todo proceso de resolución de problemas debe permitir una comprensión profunda de los procedimientos aritméticos. Lo anterior nos recuerda que en los primeros niveles educativos, los y las estudiantes, deben comprender la relación entre la adición y la sustracción. Por ejemplo: En un curso hay 12 hombres y 5 mujeres ¿Cuántos estudiantes componen el curso?

Problema Inicial	Modelo A
En un curso hay 12 hombres y 5 mujeres ¿Cuántos estudiantes componen el curso?	12 + 5 = ?

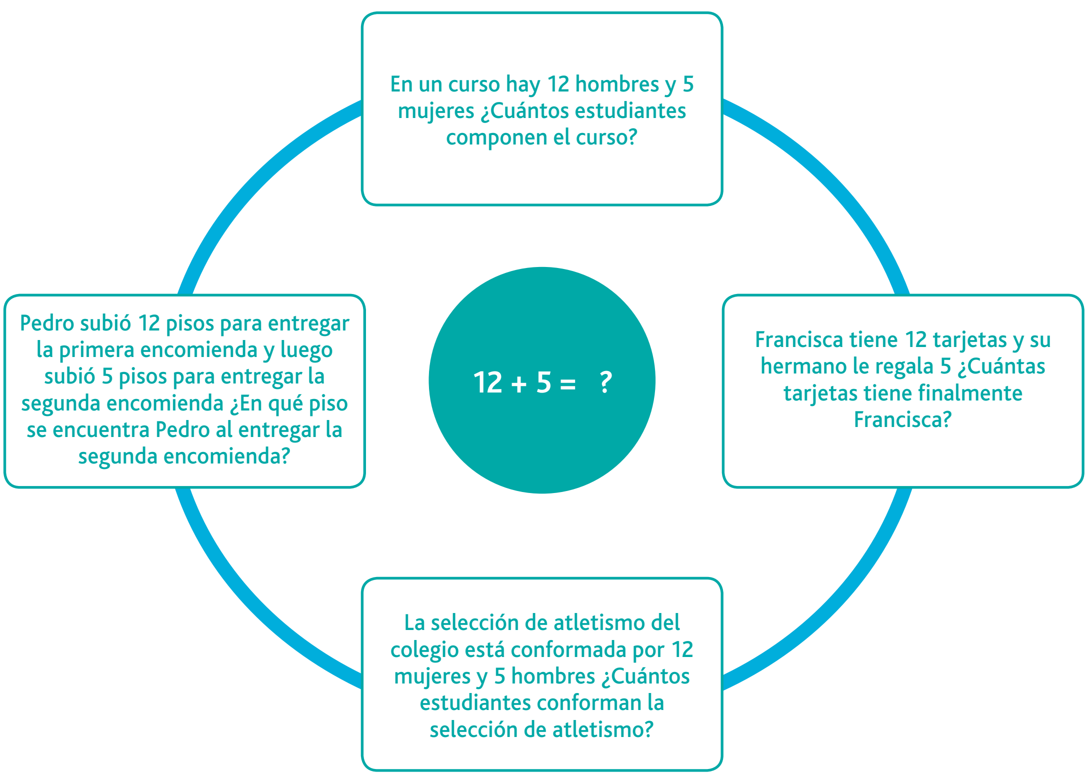
Problema inicial modificado	Modelo B
Un curso está conformado por 17 estudiantes. Si 5 son mujeres ¿cuántos hombres hay en el curso?	? + 5 = 17

Problema inicial modificado	Modelo C
Un curso está conformado por 17 estudiantes. Si 12 son hombres ¿cuántas mujeres hay en el curso?	12 + ? = 17

Formular nuevos problemas que se puedan resolver a través de los modelos A, B y C.	
La selección de atletismo del colegio está conformada por 12 mujeres y 5 hombres ¿cuántos estudiantes conforman la selección de atletismo?	12 + 5 = ?
La selección de atletismo del colegio está conformada por 17 estudiantes. Si 5 son hombres ¿cuántas mujeres hay en la selección de atletismo?	? + 5 = 17
La selección de atletismo del colegio está conformada por 17 estudiantes. Si 12 son mujeres ¿cuántos hombres hay en la selección de atletismo?	12 + ? = 17

En este mismo contexto resolución y formulación de problemas, podremos analizar cómo el proceso particular de formulación de problemas nos permite desarrollar de manera integrada la habilidad de modelamiento matemático y de resolución de problemas. Uno de los principales focos del modelamiento matemático dice relación con ofrecer oportunidades de aprendizaje a las y los estudiantes para que comprendan que diferentes situaciones de la vida cotidiana se pueden resolver bajo un mismo modelo aritmético. Por ejemplo, las y los estudiantes deberían poder responder la siguiente interrogante ¿Qué situaciones o fenómenos de la vida cotidiana se pueden resolver mediante $12 + 5 = x$? ¿Qué situaciones o fenómenos de la vida cotidiana se pueden resolver mediante $x + 5 = 17$?

Modelo A: $12 + 5 = x$



Modelo B: $x + 5 = 17$

Un curso está conformado por 17 estudiantes. Si 5 son mujeres ¿cuántos hombres hay en el curso?

Pedro debía entregar dos encomiendas y subió 17 pisos en total. Si al entregar la segunda encomienda subió 5 pisos ¿Cuántos pisos subió cuando entregó la primera encomienda?

$? + 5 = 17$

La hermana de Francisca le regala 5 tarjetas y su colección aumenta a 17 tarjetas ¿Cuántas tarjetas tenía inicialmente Francisca?

La selección de atletismo del colegio está conformada por 17 estudiantes. Si 5 son hombres ¿cuántas mujeres hay en la selección de atletismo?

Modelo C: 12 + x = 17

12 + ? = 17

Un curso está conformado por 17 estudiantes. Si 12 son mujeres ¿cuántos hombres hay en el curso?

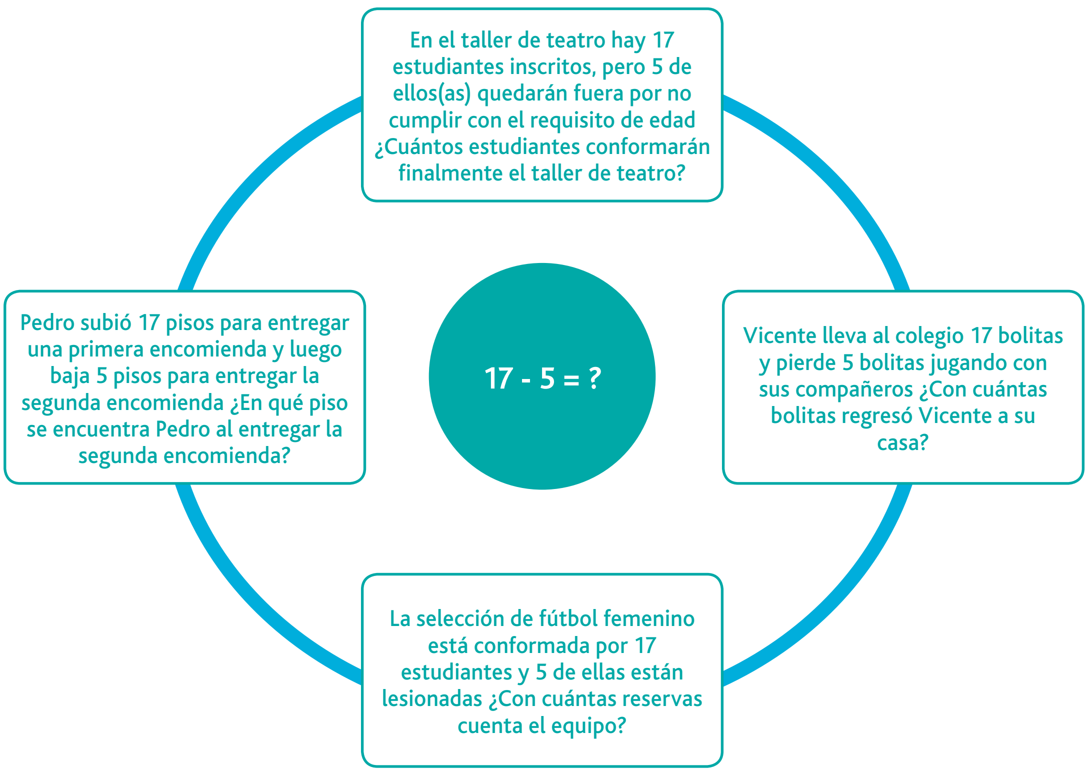
Pedro debía entregar dos encomiendas y subió 17 pisos en total. Si al entregar la primera encomienda subió 12 pisos ¿cuántos pisos subió cuando entregó la segunda encomienda?

Francisca tiene 12 tarjetas. Su hermana le regala algunas tarjetas, logrando reunir un total de 17 tarjetas ¿cuántas tarjetas le regaló la hermana a Francisca?

La selección de atletismo del colegio está conformada por 17 estudiantes. Si 12 son mujeres ¿cuántos hombres hay en la selección de atletismo?

Dado que las y los estudiantes deben resolver y formular problemas con diferentes niveles de demanda cognitiva o dificultad conceptual-procedimental, el o la docente debe generar oportunidades de aprendizaje que permitan relacionar los modelos A, B y C con la familia de operaciones. Por ejemplo, relacionar $12 + 5 = 17$ con $17 – 5 = 12$ y $17 – 12 = 5$.

Modelo D: 17 - 5 = x



Modelo E: 17 - 12 = x

En el taller de teatro hay 17 estudiantes inscritos, pero solo 12 de ellos(as) cumplen con el requisito de edad ¿Cuántos estudiantes quedarán fuera del taller de teatro?

Pedro subió hasta el piso 17 para entregar una primera encomienda y luego bajó algunos pisos para entregar la segunda encomienda ¿Cuántos pisos bajó Pedro si al entregar la segunda encomienda se encuentra en el piso 12?

17 - 12 = ?

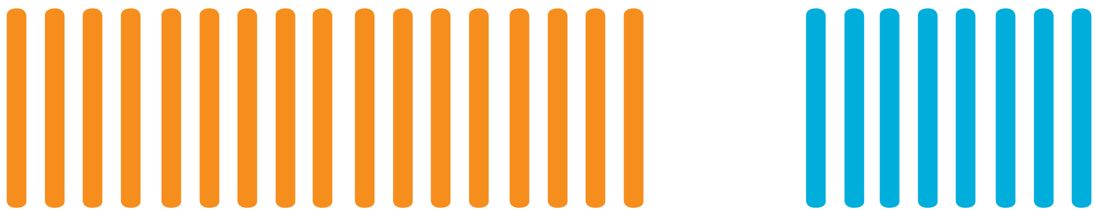
Vicente lleva al colegio 17 bolitas y pierde algunas al jugar con sus compañeros ¿Cuántas bolitas perdió Vicente si regresó con 12 bolitas a su casa?

La selección de fútbol femenino está conformada por 17 estudiantes y 12 de ellas no tienen ningún tipo de lesión ¿Cuántas integrantes del equipo sufren algún tipo de lesión?

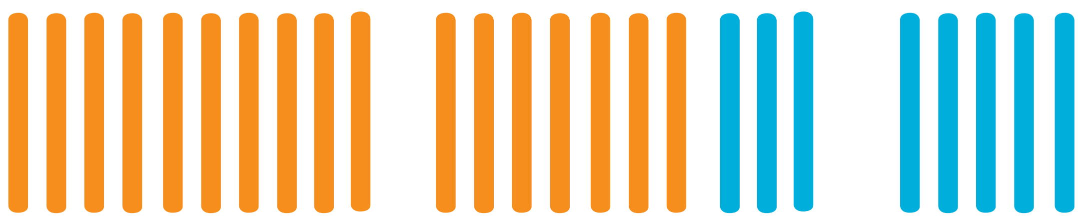
A continuación se presentan diferentes formas de abordar con material concreto un problema, y cómo potenciar la comprensión del algoritmo extendido y algoritmo resumido aplicando el concepto de valor posicional.

Problema: "En un curso hay 17 hombres y 8 mujeres ¿Cuántos estudiantes componen el curso?

Entendiendo que el foco es resolver problemas, esta oportunidad de aprendizaje nos permite potenciar la habilidad de representar y modelar con material concreto (palos de helados).



17 + 8

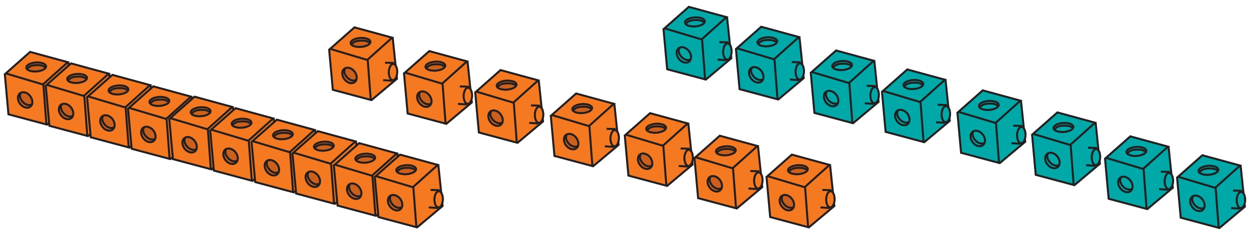


10 + (7 + 3) + 5

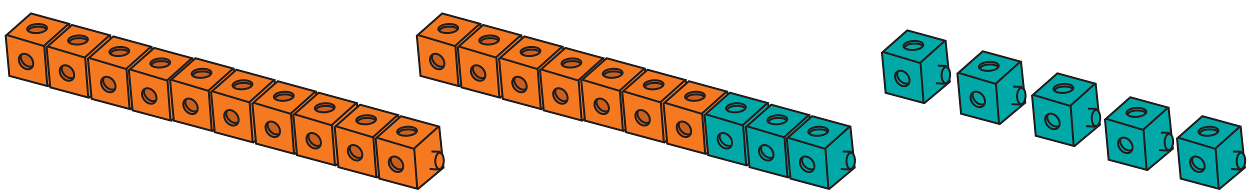
10 + 10 + 5

20 + 5 = 25

Entendiendo que el foco es resolver problemas, esta oportunidad de aprendizaje nos permite potenciar la habilidad de representar y modelar con material concreto (cubos encajables).



$$17 + 8$$



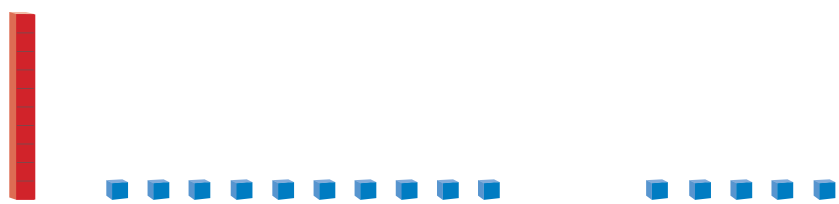
$$10 + (7 + 3) + 5$$

$$10 + 10 + 5$$

$$20 + 5 = 25$$

Entendiendo que el foco es resolver problemas, esta oportunidad de aprendizaje nos permite potenciar la habilidad de representar y modelar con material concreto (bloques multibase).

$17 + 8$



$10 + (7 + 3) + 5$

$10 + 10 + 5$

$20 + 5 = 25$

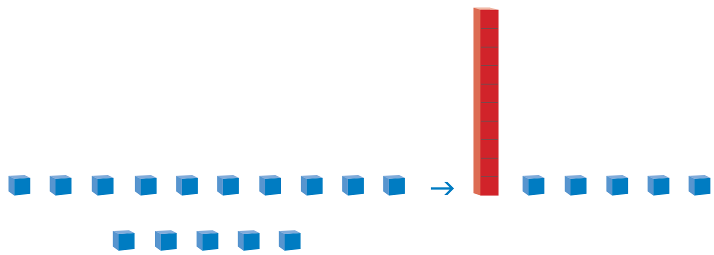
A continuación se presenta un problema que puede ser abordado con diferentes estrategias de cálculo (algoritmo extendido o algoritmo resumido justificado en el valor posicional). Cabe señalar que cada estrategia debe ser descubierta y comprendida por cada estudiante. El siguiente problema permitirá comprender cómo generar oportunidades de aprendizaje que permitan resolver problemas aplicando conocimientos aprendidos y estrategias de cálculo escrito.

Algoritmo extendido de la adición

Paso 1: sumar las unidades 7 + 8

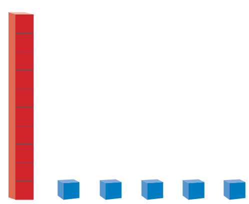
	1 7
+	8

7 + 8 →



1 5

7 + 8 →



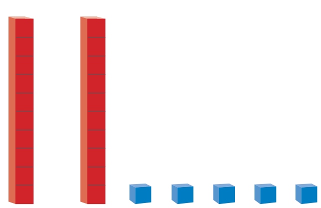
+ 1 0

→

Paso 2: sumar los grupos de 10

2 5

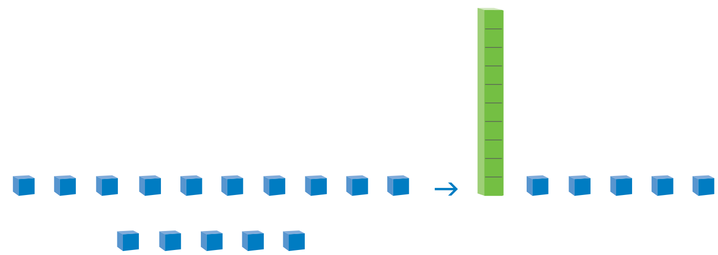
→



Algoritmo resumido de la adición

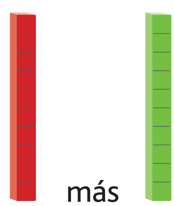
Paso 1: sumar las unidades 7 + 8

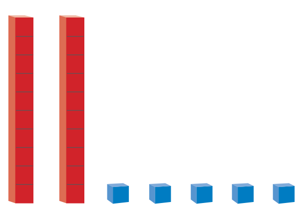
	1	
	1	7
+		8
		5

7 + 8 → 

Paso 2: sumar los grupos de 10

+	2	0
	2	5

10 + 10 → 

20 + 5 → 

Sugerencia de progresión de problemas aditivos: **parte 2**

Problema de transformación de medida → Problema de transformación de medida → Transformación de medidas → Problema de comparación de medidas

Problema Inicial	Modelo A
El censo señala que el pueblo donde vivo tiene 740 habitantes. Si el número de habitantes aumentó en 210 personas ¿cuántas personas habitaban el pueblo para el censo anterior?	740 - 210 = ?

Problema inicial modificado	Modelo B
El censo señala que el pueblo donde vivo tiene 740 habitantes. Si el número de habitantes para el censo anterior era 530 habitantes ¿en cuántos aumentó el número de habitantes?	740 - 530 = ?

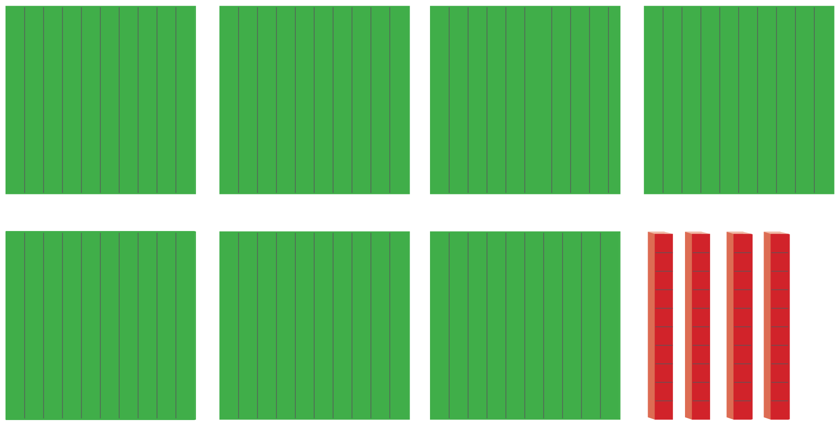
Problema inicial modificado	Modelo C
Si el número de habitantes para el censo anterior era 530 personas y el censo actual señala que el pueblo donde vivo aumentó en 210 la cantidad de habitantes ¿cuántas personas viven ahora en el pueblo?	530 + 210 = ?

Problema inicial modificado	Modelo D
El censo señala que el pueblo donde vivo aumentó en 210 la cantidad de habitantes. Si el número de habitantes para el censo anterior era 530 personas ¿cuántas personas viven ahora en el pueblo?	210 + 530 = ?

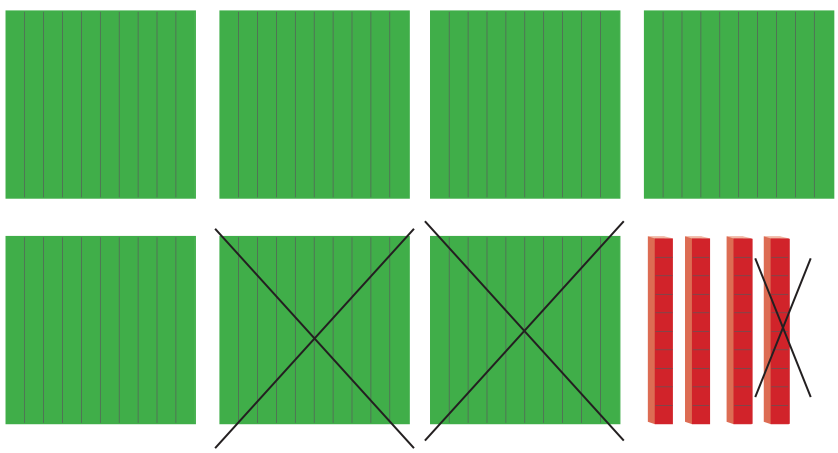
Algoritmo extendido de la sustracción

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 7 & 4 & 0 \\
- & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & & 3 & 0 \\
+ & 5 & 0 & 0 \\
\hline
 & 5 & 3 & 0
\end{array}
$$

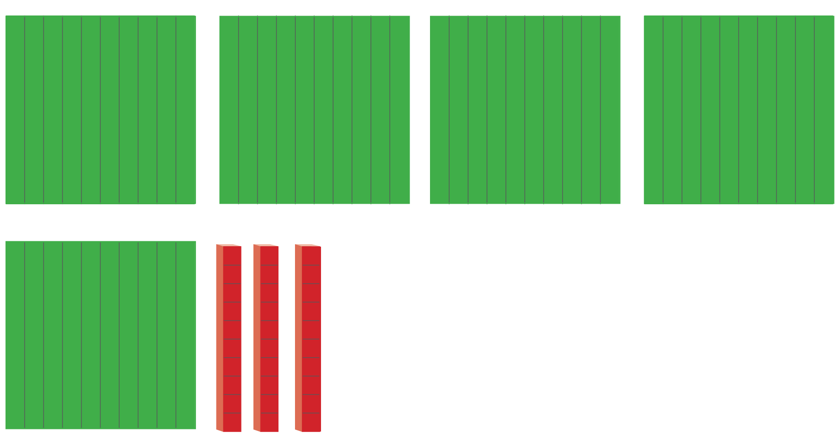
Paso 1: Representar con material concreto 740



Paso 2: Quitar 210 a los 740



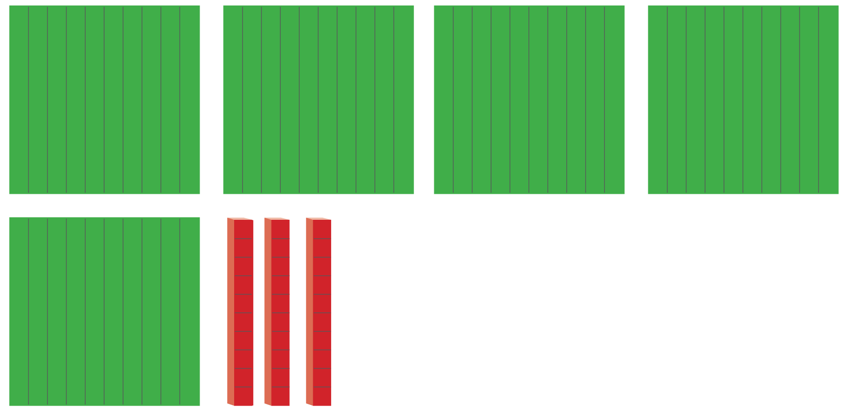
Paso 3: Calcular la cantidad final



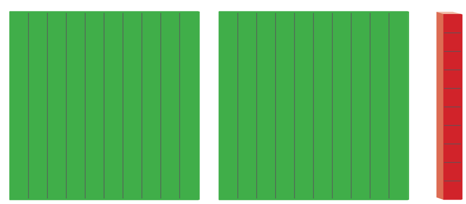
Algoritmo extendido de la adición

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 5 & 3 & 0 \\
+ & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & & 4 & 0 \\
+ & 7 & 0 & 0 \\
\hline
 & 7 & 4 & 0
\end{array}
$$

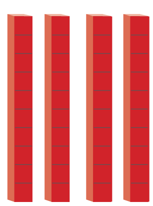
Paso 1: Representar con material concreto 530



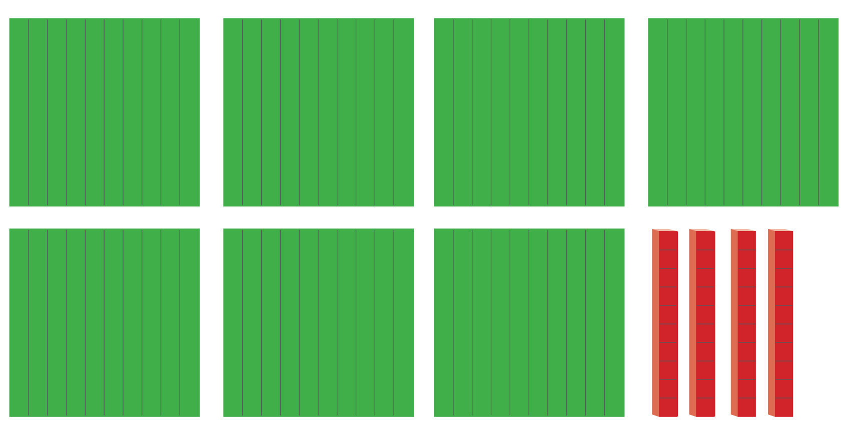
Paso 2: Representar con material concreto 210



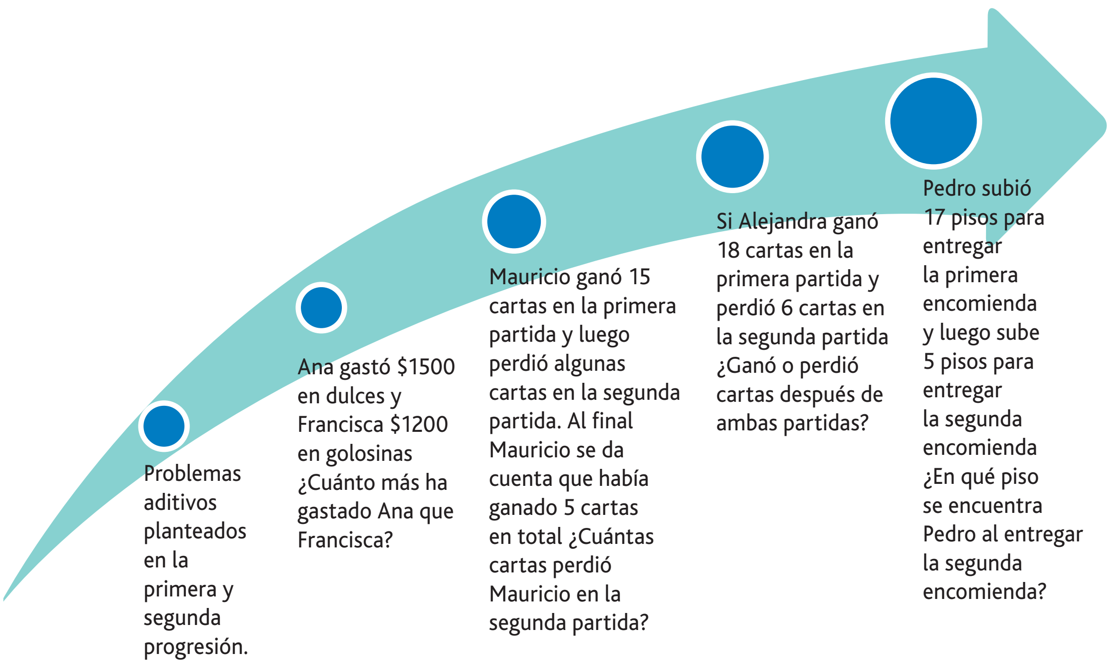
Paso 3: Relacionar cada suma parcial con el material concreto



Paso 4: Verificar el resultado obtenido con el material concreto



Sugerencia de progresión de problemas aditivos: **parte 3**



Problema de comparación de medida → **Problema de composición de transformaciones** → **Problema de transformación de estados relativos**

Problema Inicial	Modelo A
Ana gastó $1 500 en dulces y Francisca $1 200 en golosinas ¿Cuánto más ha gastado Ana que Francisca?	1 500 - 1 200 = ?

Problema inicial modificado	Modelo B
Ana gastó $1 500 en dulces y Francisca gastó $300 menos que Ana ¿Cuánto dinero gastó Francisca?	1 500 - 300 = ?

Problema inicial modificado	Modelo C
Francisca gastó $1 200 y Ana gastó $300 más que Francisca ¿Cuánto dinero gastó Ana?	1 200 + 300 = ?

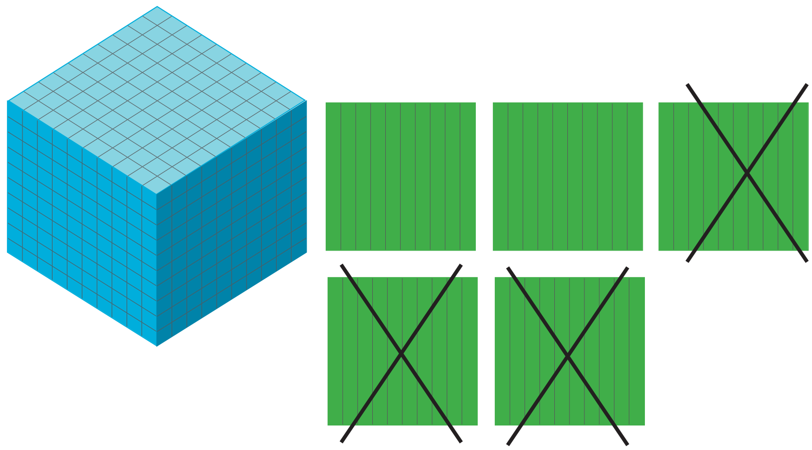
Problema inicial modificado	Modelo D
Ana y Francisca gastaron $2 700 en golosinas. Si Ana gastó $1 500 ¿cuánto dinero gastó Francisca?	2 700 - 1 500 = ?

Problema inicial modificado	Modelo E
Ana gastó $1 500 en dulces y Francisca $1 200 en golosinas ¿Cuánto dinero gastaron Ana y Francisca en total?	1 500 + 1 200 = ?

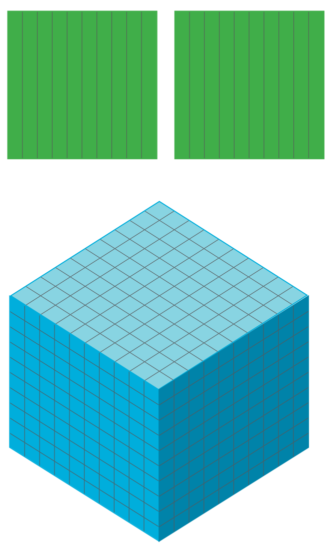
Algoritmo extendido de la sustracción

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 5 & 0 & 0 \\
- & & 3 & 0 & 0 \\
\hline
 & & 2 & 0 & 0 \\
 & & & & \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0
\end{array}
$$

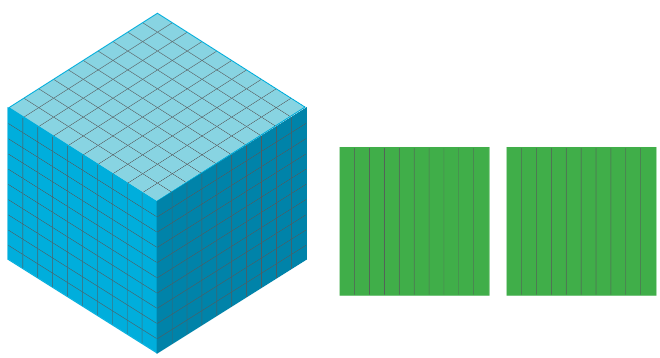
Paso 1: Representar con material concreto 1 500 y quitar 300



Paso 2: Representar las restas parciales



Paso 3: Calcular la cantidad final



Sugerencia de progresión de problemas multiplicativos: **parte 1**

Valeria ordena sus juguetes en 5 cajas con 7 juguetes cada una ¿Cuántos juguetes guardó en las cajas? ¿Es correcto decir que Valeria tiene 35 juguetes en total?

Pedro ordena sus témperas en 3 filas y cada fila está conformada por 4 frascos de témpera ¿Cuántas témperas tiene Pedro?

Ignacio ordena cajas en columnas. Si cada columna está conformada por 7 cajas y el camión permite colocar 5 columnas de cajas ¿Cuántas cajas logró ordenar Ignacio?

Cecilia tiene 3 poleras de diferente color y 4 *jeans* de diferentes colores ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir Cecilia al combinar una polera con un jean?

Relacionar el problema de arreglo bidimensional discreto (filas y columnas) con el problema de arreglo bidimensional continuo (área).

Nota: resolver problemas de área.

Problema de suma iterada → Problema de arreglo bidimensional discreto → Problema de arreglo bidimensional discreto → Problema de combinación o espacio único de medida → Problema de arreglo bidimensional continuo (área)

Problema Inicial	Modelo A
Ignacio ordena cajas en columnas. Si cada columna está conformada por 7 cajas y el camión permite colocar 5 columnas de cajas ¿cuántas cajas logró ordenar Ignacio?	5 x 7 = ?

Problema inicial modificado	Modelo B
Ignacio debe ordenar 35 cajas en un camión. Si cada columna está conformada por 7 cajas ¿cuántas columnas de cajas logró ordenar Ignacio?	35 : 7 = ?

Problema inicial modificado	Modelo C
Ignacio debe ordenar 35 cajas en un camión; con 5 columnas de cajas se llena el camión ¿Cuántas cajas conforman cada columna?	35 : 5 = ?

Problema inicial modificado	Modelo D
Ignacio ordena cajas en columnas. Si cada columna está conformada por 5 cajas y el camión permite colocar 7 columnas de cajas ¿cuántas cajas logró ordenar Ignacio?	7 x 5 = ?

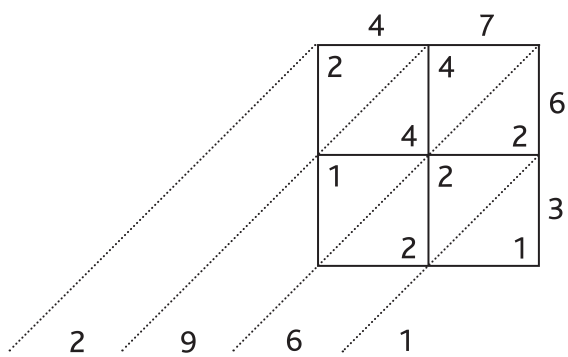
Entendiendo que el foco es resolver problemas, esta oportunidad de aprendizaje nos permite potenciar la habilidad de representar e interpretar el cálculo escrito de diferentes maneras.

Algoritmo extendido de la multiplicación

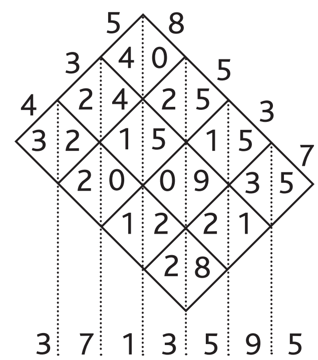
1 2 x 3 5		1 2 x 3 5
1 0	5 x 2 = 10	1 0
5 0	5 x 10 = 50	5 0
6 0	2 x 30 = 60	6 0
+ 3 0 0	30 x 10 = 300	+ 3 0 0
1 2 0	10 + 50 + 60 = 120	1 2 0
+ 3 0 0		+ 3 0 0
4 2 0	120 + 300 = 420	4 2 0

Otros algoritmos de multiplicación

Algoritmo Árabe

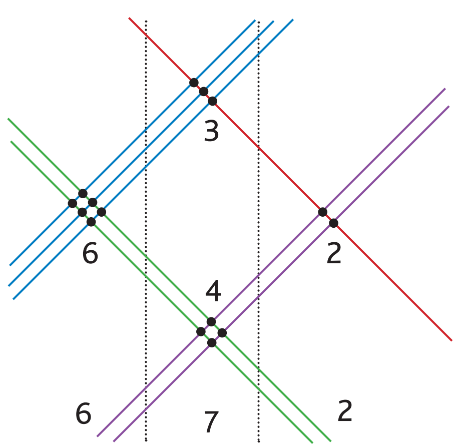


Algoritmo Árabe

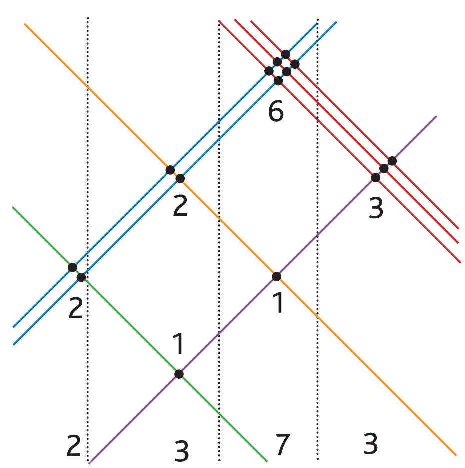


Algoritmo Maya

3 2 x 2 1

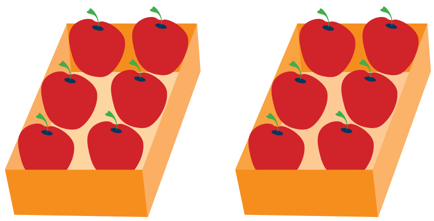


2 1 x 1 1 3



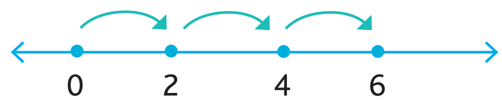
Entendiendo que el foco es resolver problemas, esta oportunidad de aprendizaje nos permite potenciar la habilidad de representar e interpretar el cálculo escrito de diferentes maneras

Suma iterada



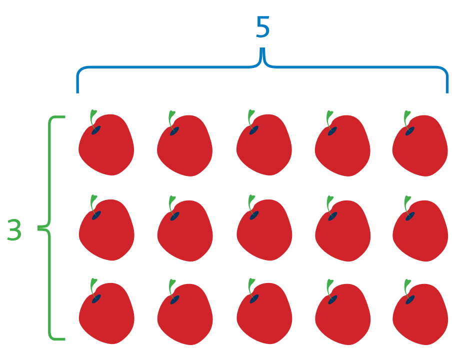
2 veces 6 → 2 x 6 = 12

Recta numérica



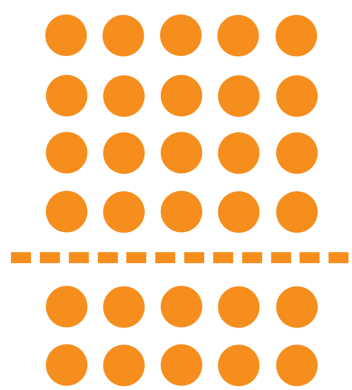
3 x 2

Arreglo bidimensional discreto



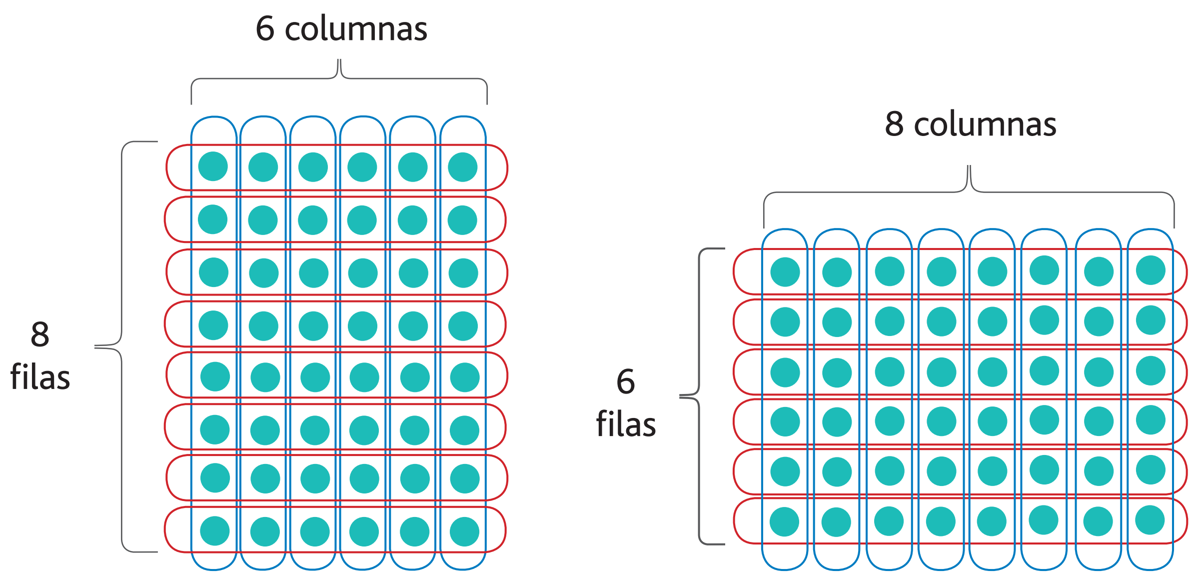
15 manzanas

Multiplicación: Propiedad distributiva

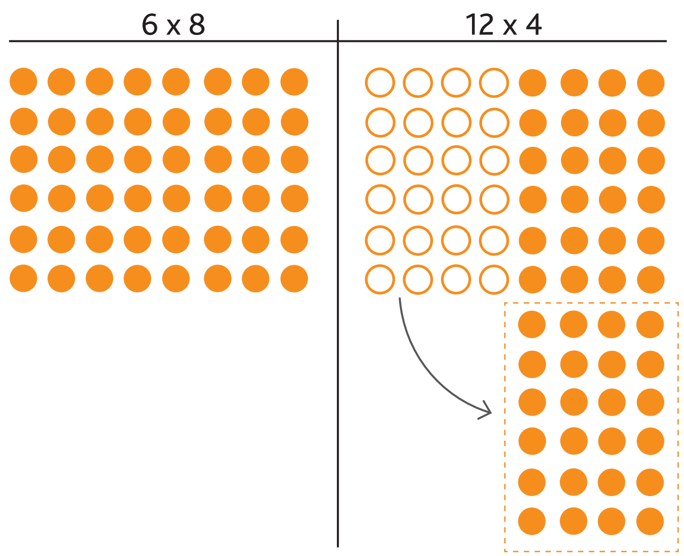


4 x 5 + 2 x 5 = (2 + 4) x 5

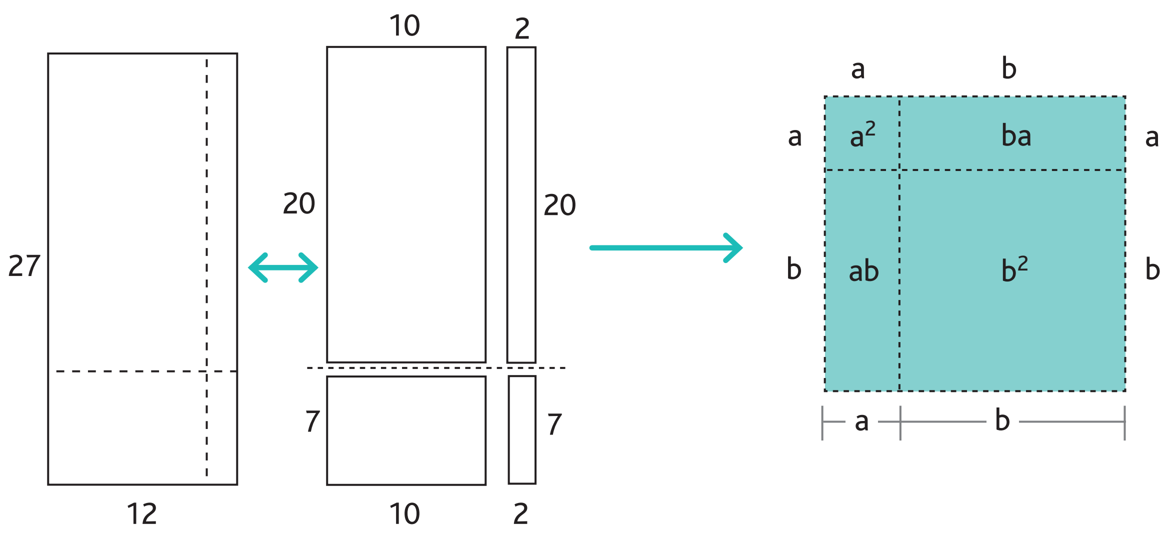
Propiedad conmutativa



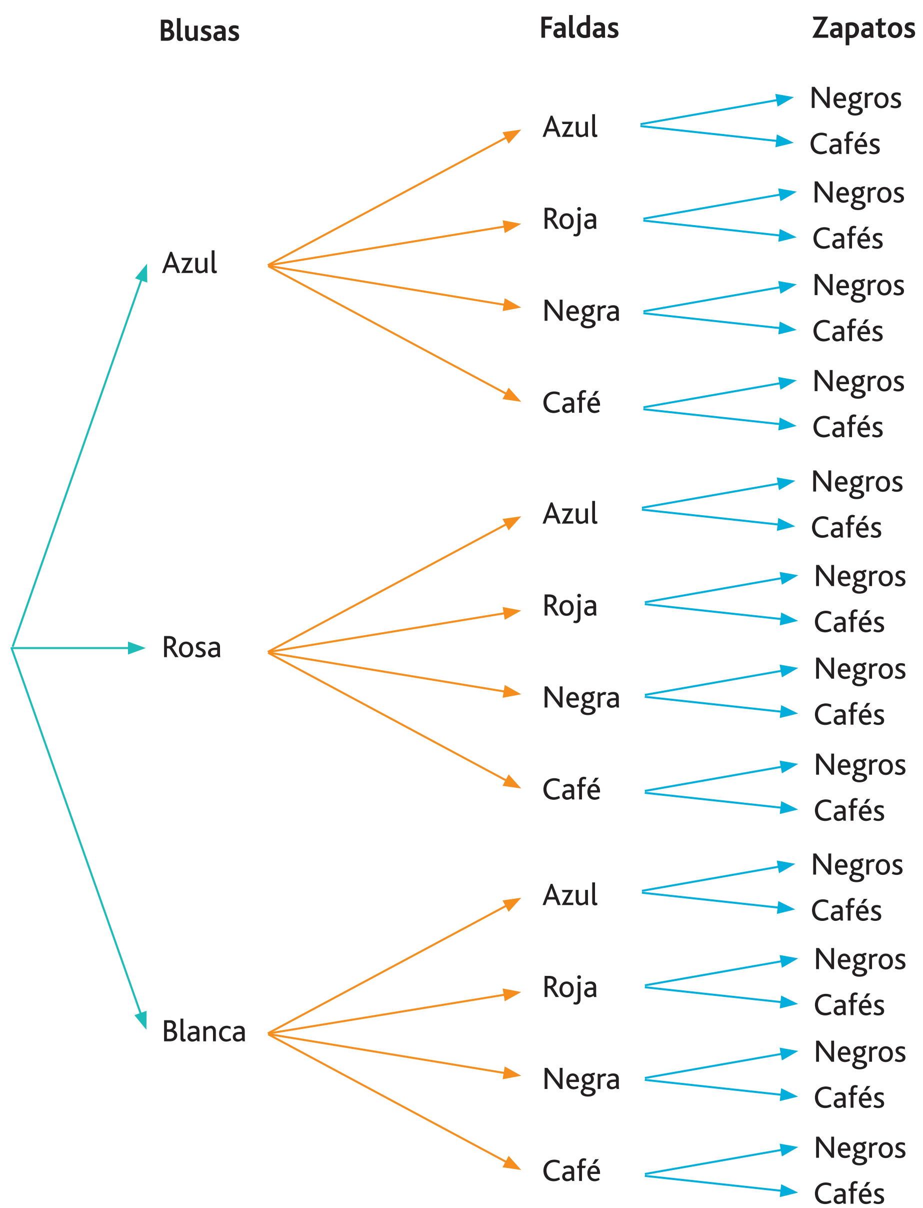
Arreglo bidimensional: 6 x 8 = 12 x 4



Arreglo bidimensional continuo



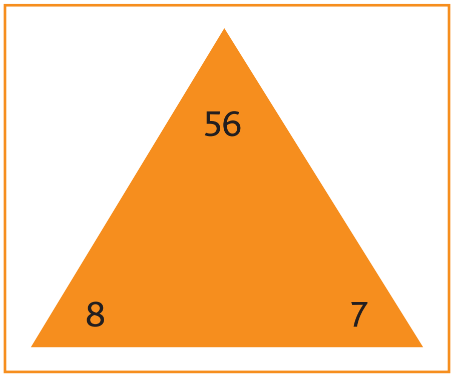
Combinaciones



Sugerencia de progresión de problemas multiplicativos: **parte 2 (la división)**

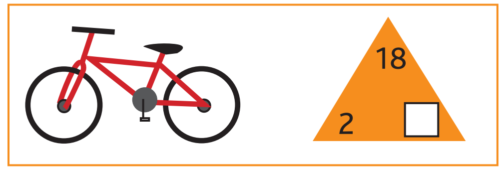
Resolver una división es buscar el factor que falta en una multiplicación conociendo uno de los factores y el resultado. Una buena estrategia para acercarse a la división como inversa de la multiplicación son los triángulos multiplicativos. Los triángulos multiplicativos son simplemente una manera de simbolizar una multiplicación escribiendo en los dos vértices inferiores los factores y en el tercer vértice el producto. Los triángulos multiplicativos pretenden ayudar a comprender la relación entre los tres números involucrados en una multiplicación-división. Es decir, saber que 8 x 7 = 56 implica poseer como hechos conocidos simultáneamente las siguientes tres situaciones:

7 x 8 = 56, **56 : 7 = 8** y **56 : 8 = 7**

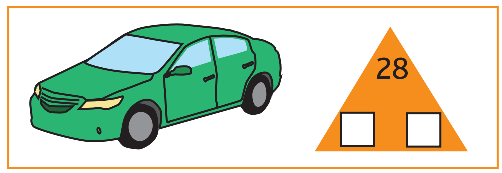


Resolver problemas de división debe ser un proceso presentado de manera contextualizada, por lo cual se pueden proponer ejercicios como los siguientes:

¿Cuántas bicicletas hay si he contado 18 ruedas?



¿Cuántos coches de juguete puedo fabricar con 28 ruedas?

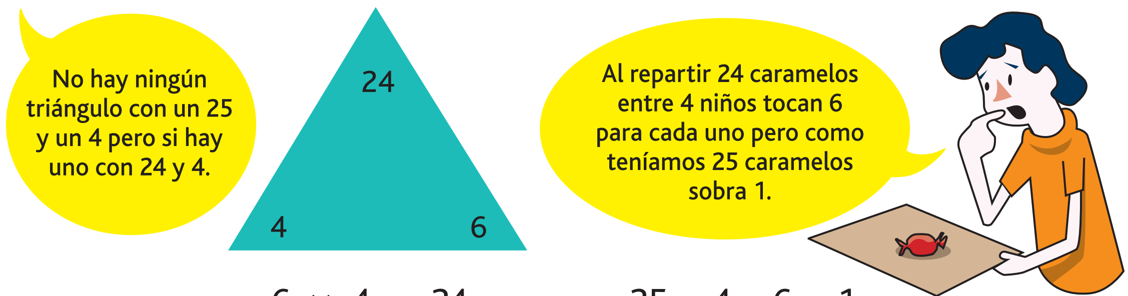


He contado 15 dedos ¿Cuántas manos hay?

De esta manera, cuando se introduce la notación 18 : 2 = 9 para simbolizar la situación del recuento de bicicletas del primer ejercicio, favorecemos la vinculación entre multiplicación y división que pretendemos destacar con el uso del triángulo multiplicativo.

En ocasiones no es posible encontrar ningún triángulo multiplicativo que responda al problema de reparto o agrupamiento que queremos resolver. Por ejemplo, pensemos en el problema:

Si tenemos 25 caramelos para repartir entre 4 niños ¿cuántos caramelos tocan a cada uno?



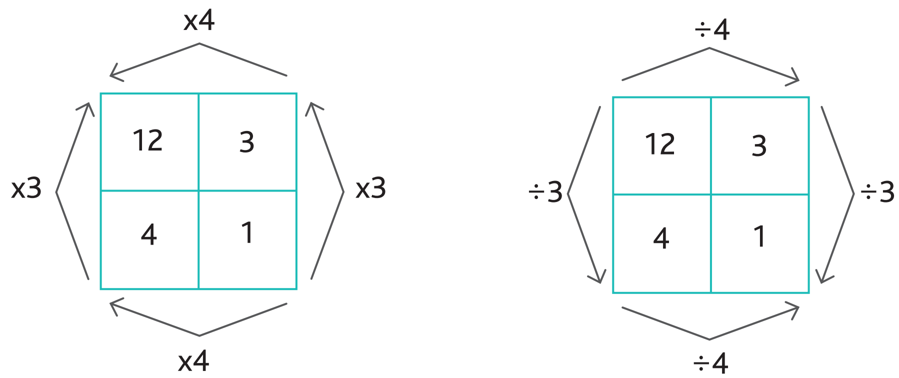
$6 \times 4 = 24$ $\quad$ $25 : 4 = 6 : 1$

En este ejemplo aparece la noción de residuo como el sobrante de un reparto, su verdadero significado antes de la presentación de cualquier algoritmo de la división. En la línea de reconocer los distintos contextos en que se aplica la división, y que, por tanto, deberían aparecer en las actividades de clase, encontramos que un mismo cálculo; por ejemplo, 18 : 3 puede ser la forma de resolver dos tipos de problemas bastante diferentes:

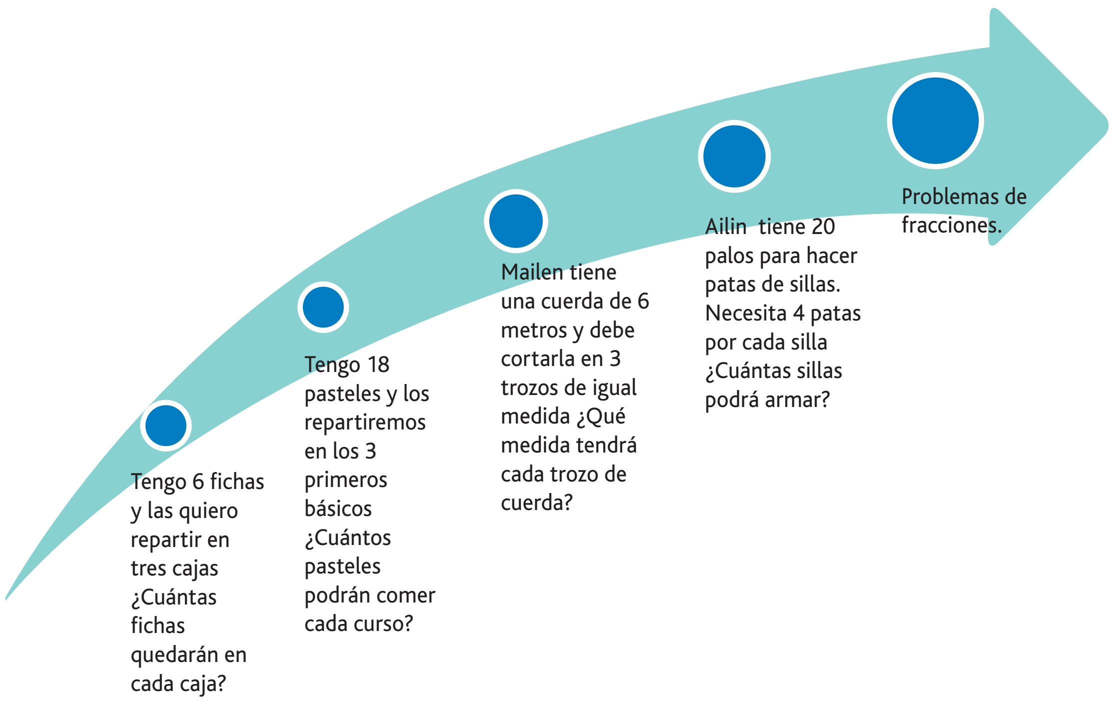
Problemas de reparto, en los que, conociendo el total de elementos a repartir entre un determinado número de grupos, se busca el número de elementos en cada grupo. Por ejemplo: Tengo 18 bombones para repartir entre 3 compañeros ¿Cuántos bombones recibirá cada uno de ellos?

Problemas de agrupamiento, en los que, conociendo el total de elementos a repartir y el número de elementos que tendrá cada grupo, se busca el número de grupos resultantes. Por ejemplo: Tengo 18 bombones y los pongo en bolsas de 3 bombones cada una ¿Cuántas bolsas llenaré?

Finalmente, el o la docente debe orientar a los y las estudiantes a comprender la relación entre la multiplicación y la división de números naturales como operaciones inversas.



Progresión de problemas de división

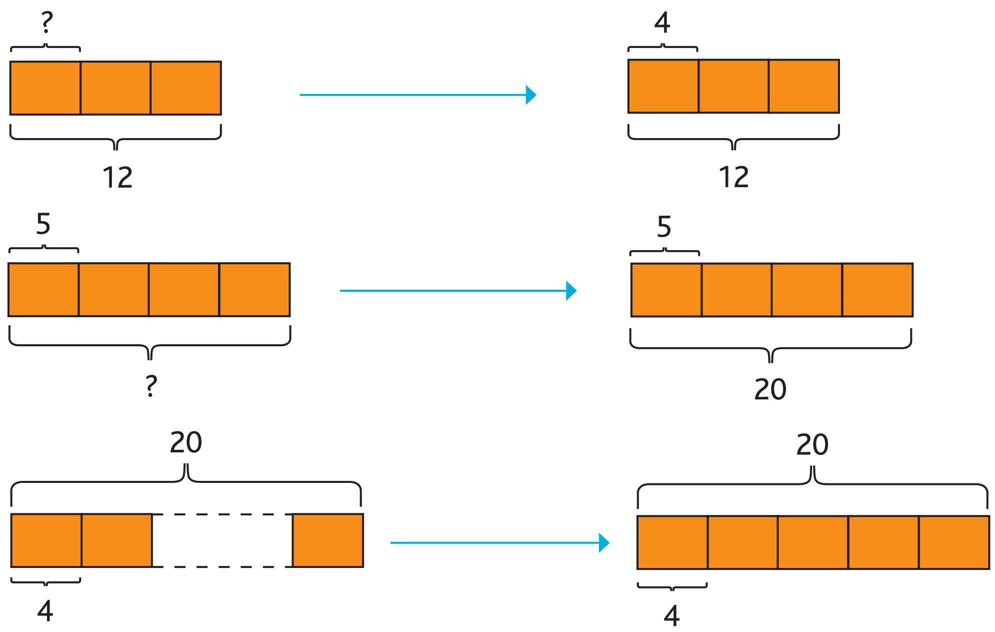


Problema Inicial	**Modelo A**
Ailin tiene 20 palos para hacer patas de sillas; necesita 4 patas por cada silla ¿Cuántas sillas podrá armar?	20 : 4 = ?

Problema inicial modificado	**Modelo B**
Ailin tiene 20 palos para hacer patas de sillas; logró armar 5 sillas ¿Cuántas patas utilizó en cada silla?	**20 : 5 = ?**

Problema inicial modificado	**Modelo C**
Ailin tiene algunos palos para hacer patas de sillas; necesita 4 patas por cada silla. Si logra armar 5 sillas ¿Cuántos palos tenía para hacer patas de silla?	4 x 5 = ?

¿Cuál es la relación entre problemas de multiplicación y división?



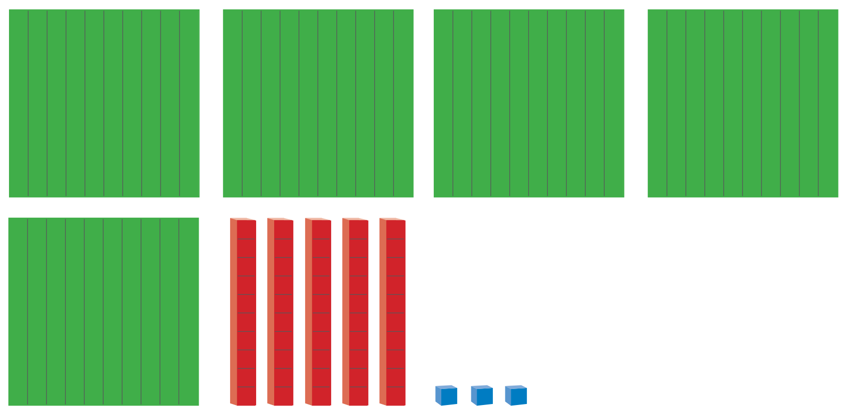
El o la docente debe promover que las y los estudiantes puedan formular problemas cotidianos de división y/o multiplicación de números naturales, dado un modelo aritmético de referencia:

$18 : \blacktriangle = 3$, $\blacktriangle : 6 = 3$, $\blacktriangle : 3 = 6$, $\blacktriangle \cdot 4 = 20$, $5 \cdot \blacktriangle = 20$, $\blacktriangle + 12 = 20$, $8 + \blacktriangle = 20$, entre otro.

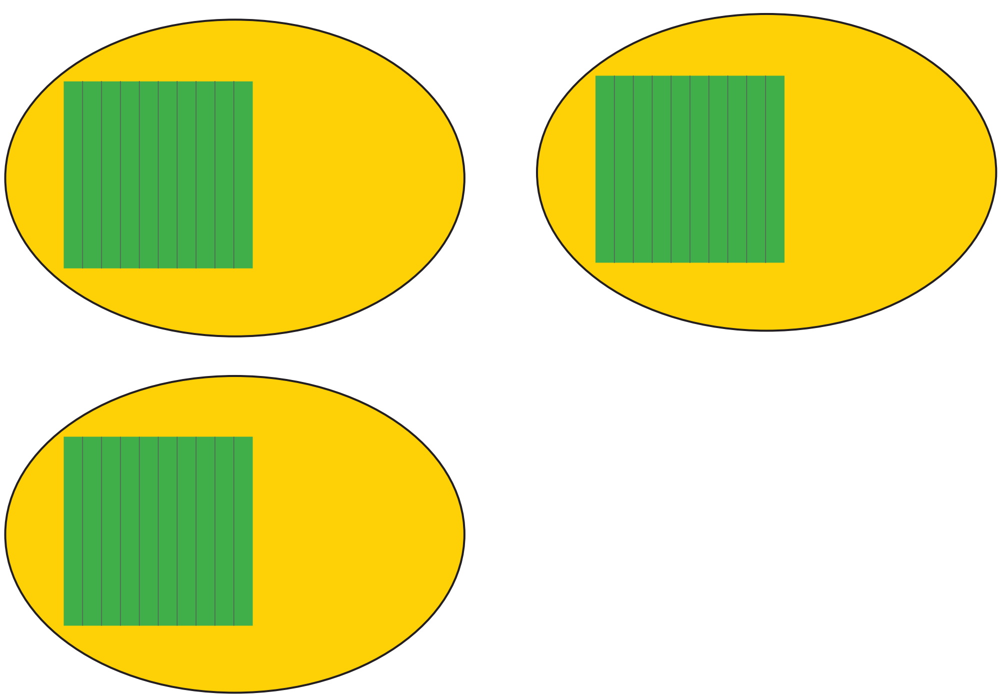
Algoritmo de la división y uso de material concreto

A continuación explicaremos el algoritmo de la división utilizando los bloques multibase. Ejemplo 1: A continuación dividiremos 553 : 3 para explicar el lenguaje disciplinar asociado a dicho algoritmo.

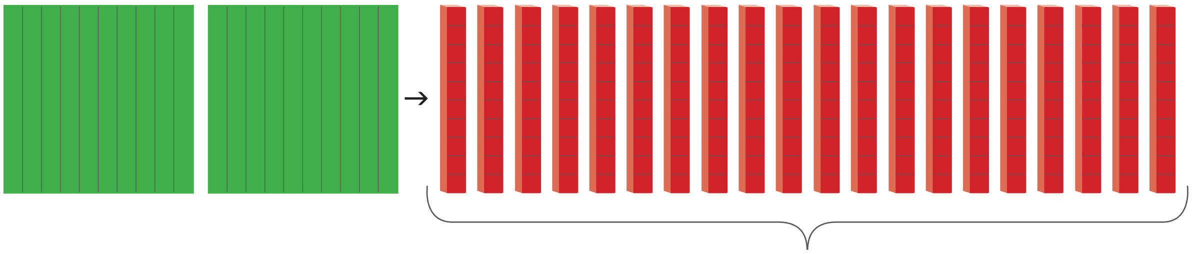
5 5 3 : 3 = ? La división 553 : 3 implica realizar un reparto equitativo en 3 grupos.



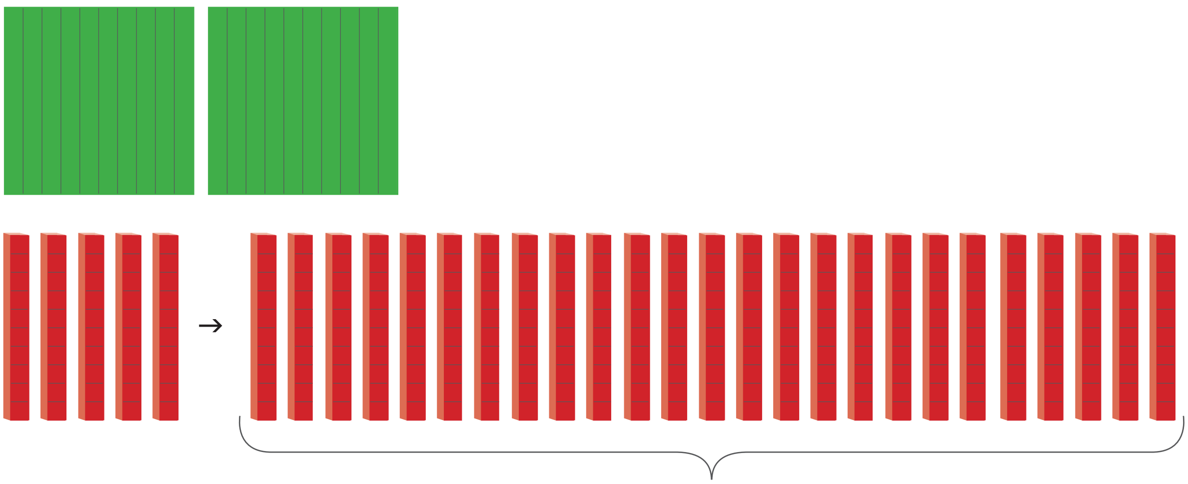
Procederemos a repartir en los tres grupos los bloques que representan los 500.



Como podemos observar, solamente logramos repartir tres placas equivalentes a 300 (al quedar 2 placas de 100 para repartir en 3 grupos no se puede realizar el reparto, por ende, hay que realizar canje). Las otras dos placas de 100 deberán ser canjeadas por 20 barras de 10, obteniendo un total de 25 barras de 10 ya que inicialmente hay 5 barras de 10.

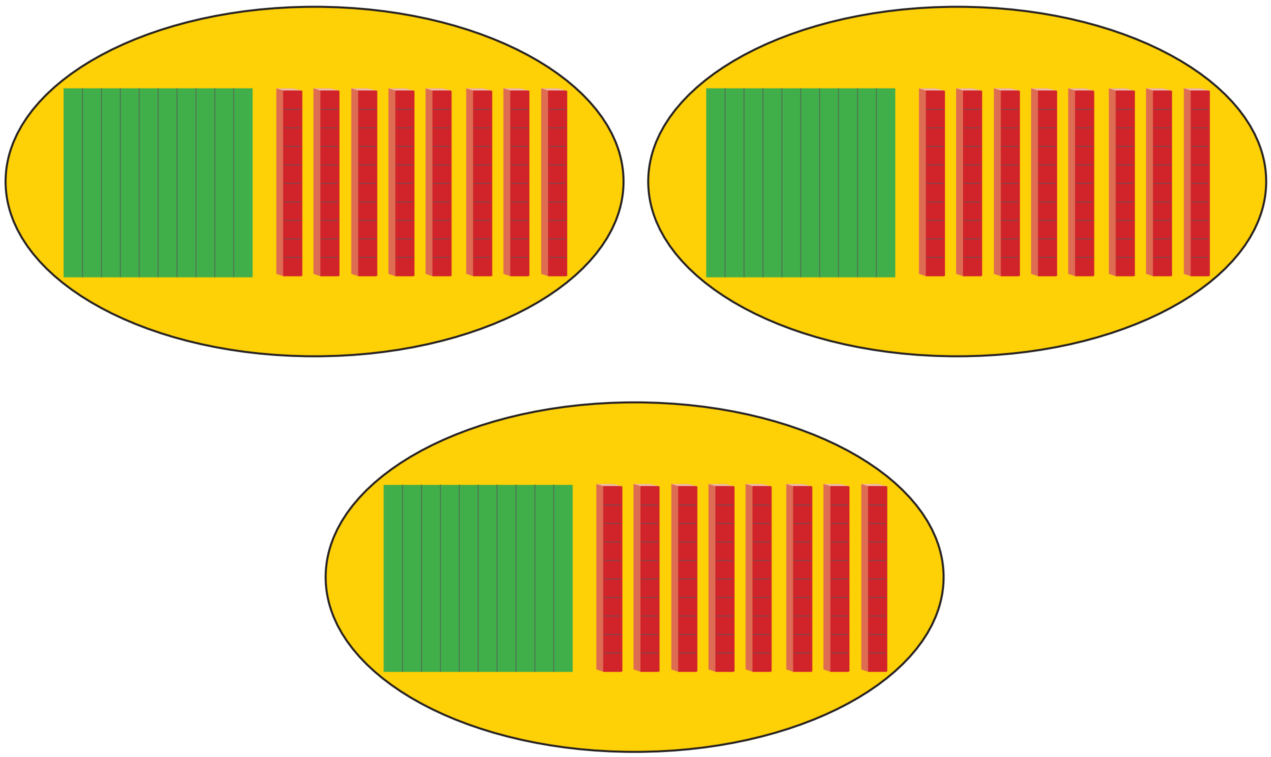


20 barras de 10

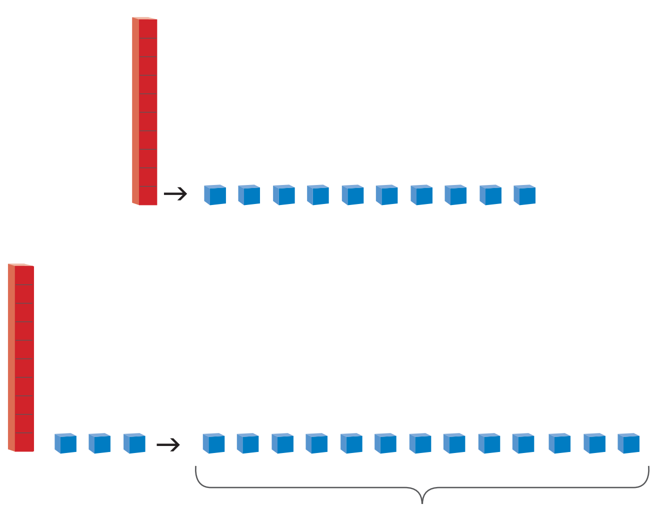


25 barras de 10

Ahora corresponde repartir equitativamente en 3 grupos las 25 barras de 10.

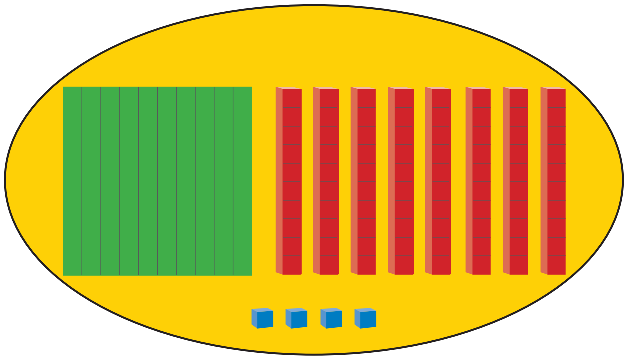


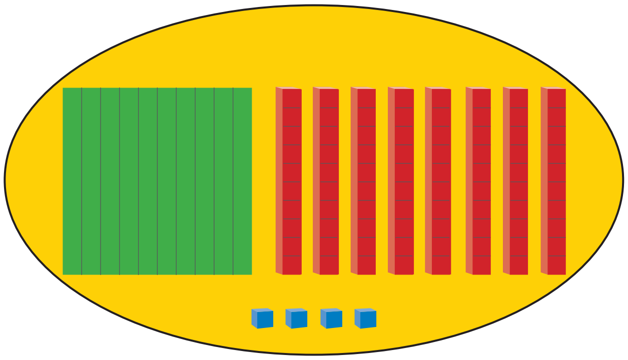
Al repartir equitativamente las 25 barras de 10, podemos observar que en cada grupo hay 8 barras de 10 y queda 1 barra por repartir. Por ende, el siguiente paso es canjear la barra de 10 solamente por unidades.

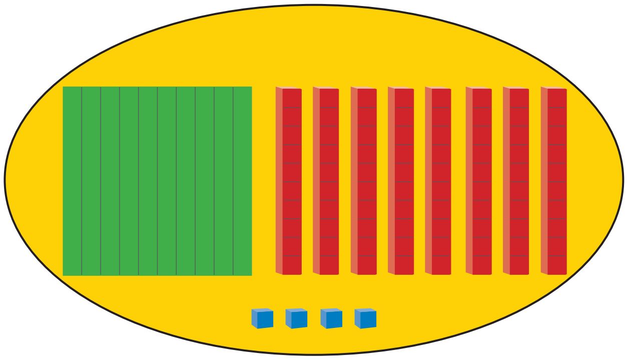


13 unidades

Ahora nos corresponde repartir equitativamente las 13 unidades en los tres grupos.







Al repartir las 13 unidades en los 3 grupos, podemos observar que el resto de la división es 1 (se reparten 12 unidades y queda 1 unidad sin repartir). Por ende, el algoritmo de la división 5 5 3 : 3 es el siguiente:

Paso 1:

$$\begin{array}{rl} 5\ 5\ 3 & :\ 3 = 1 \\ -\ 3\ 0\ 0 & \\ \hline 2\ 0\ 0 & \end{array}$$

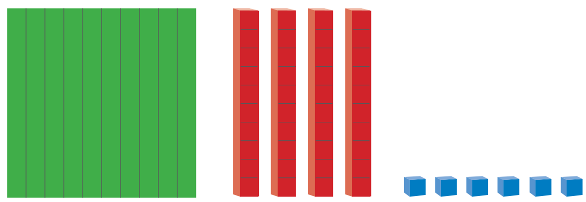
Paso 2:

$$\begin{array}{rl} 5\ 5\ 3 & :\ 3 = 18 \\ -\ 3\ 0\ 0 & \\ \hline 2\ 5\ 0 & \\ -\ 2\ 4\ 0 & \\ \hline 1\ 0 & \end{array}$$

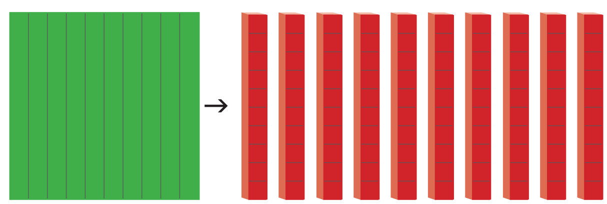
Paso 3:

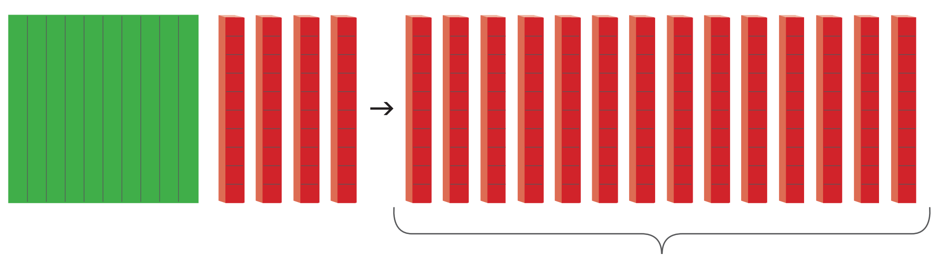
$$\begin{array}{rl} 5\ 5\ 3 & :\ 3 = 184 \\ -\ 3\ 0\ 0 & \\ \hline 2\ 5\ 0 & \\ -\ 2\ 4\ 0 & \\ \hline 1\ 3 & \\ -\ 1\ 2 & \\ 1 & \end{array}$$

Ejemplo 2: Ahora procederemos a dividir 1 4 6 : 2 = ? La división 146 : 2 implica realizar un reparto equitativo en 2 grupos.



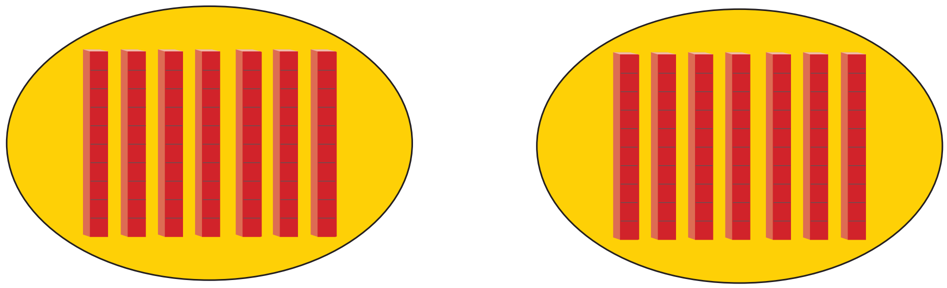
Como podemos observar, no podemos repartir 1 placa en dos grupos, por ende, hay que realizar canje. La placa de 100 deberá ser canjeada por 10 barras de 10, obteniendo un total de 14 barras de 10 ya que inicialmente hay 4 barras de 10.



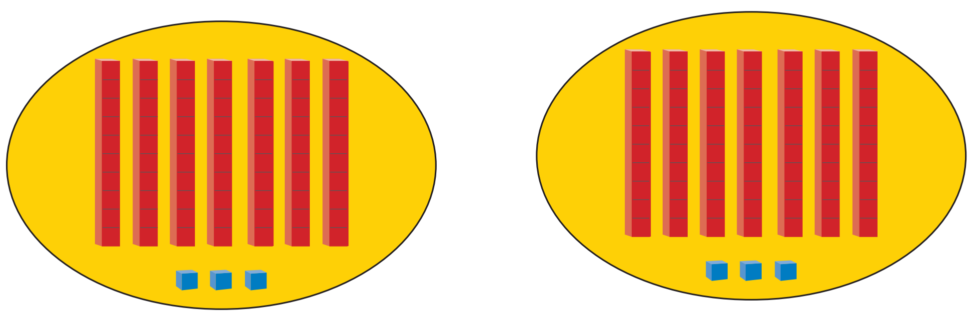


14 barras de 10

Ahora corresponde repartir equitativamente en 2 grupos las 14 barras de 10.



Ahora nos corresponde repartir equitativamente las 6 unidades en los dos grupos.



Al repartir las 6 unidades en los 2 grupos podemos observar que el resto de la división es 0.

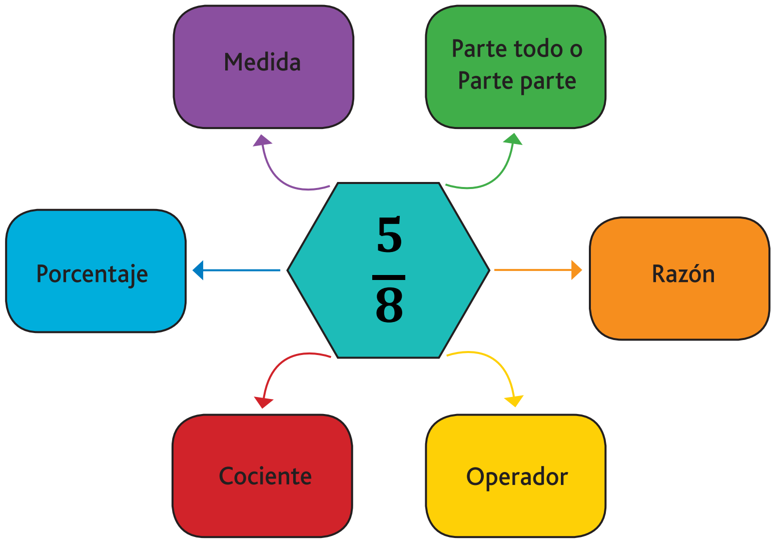
Por ende, el algoritmo de la división 1 4 6 : 2 es el siguiente:

$$
\begin{array}{r}
14'6 : 2 = 73 \\
-\ 140 \\
\hline
6 \\
-\ 6 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Tipos de problemas de fracción

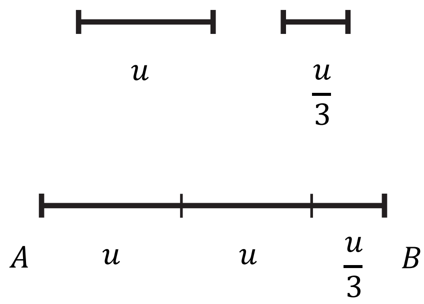
El origen de las fracciones se remonta a la Antigüedad y es posible encontrar muestras de su uso en diversas culturas de ese período histórico. Los babilonios las utilizaron teniendo como único denominador al número 60, en cambio los egipcios, por su parte, las emplearon con sólo el 1 como numerador. Por ejemplo, si querían representar $\frac{5}{8}$ escribían: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$, considerando que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{4}{8}$.

Asimismo, los números racionales poseen variadas representaciones que confluyen en su definición como concepto matemático.



De esta manera, una de las necesidades por las cuales surgen "las fracciones es como consecuencia de la división y comparación de magnitudes continuas (longitudes, áreas, tiempo), es decir, de mediciones. Por ejemplo, tres hombres es algo que tiene sentido, no así un tercio de hombre."[1] En este proceso de medición puede ocurrir que la unidad no esté contenida una cantidad entera de veces en la magnitud a comparar, por lo que, para expresar la magnitud con mayor exactitud en partes de la unidad de medida buscada, se hace necesario fraccionar la unidad de medida.

1. A. D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, N. A. Laurentiev y otros: La Matemática: su contenido, métodos y significado. Alianza Editorial S. A. Madrid, 1987.



$$\therefore \overline{AB} = 2u + \frac{u}{3}$$

Continuando el análisis de los problemas de fracción parte-todo, se presenta esta situación cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "de igual superficie o área" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de objetos). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios todos).

El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes o trozos iguales. La fracción aquí es siempre "fracción de un objeto". Sobre esta interpretación se basan generalmente las secuencias de enseñanza cuando se introducen las fracciones (normalmente en su representación continua). Parece ser que ella tiene una importancia capital para el desarrollo posterior de la idea global de número racional.

Para una comprensión profunda del concepto de fracción se necesita previamente el desarrollo de algunas habilidades tales como:

- Tener la identificación de la unidad (que "todo" es el que se considera como unidad en cada caso concreto).
- Realizar divisiones (el todo se conserva aun cuando lo dividamos en trozos: conservación de la cantidad) de diferente forma pero igual superficie/área.
- Manejar la idea de área (en el caso de las representaciones continuas).

Los tipos de problemas de fracciones utilizan con frecuencia diagramas en contextos continuos, discretos. Por ende, el desarrollo integrado de habilidades es inherente a toda gestión de clases de matemática.

Tipos de problemas de fracciones

Problemas de división o reparto equitativo

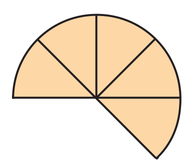
Problema 1: Cuatro hermanos recibieron una herencia de 3 millones. Si la repartieron en partes iguales ¿cuánto dinero recibió cada uno?

Problema 2: Ignacio logró cocinar 45 galletas y debe repartirlas equitativamente en 9 cajas para regalar a su familia y amigos ¿Cuántas galletas debe colocar en cada caja?

Problema 3: Se estima que en un campeonato de tenis se gastan 750 pelotas. En una caja caben 6 pelotas ¿Cuántas cajas de pelotas de tenis deben encargar los organizadores del campeonato?

Problema 4: Florencia compró 240 empanadas para la fiesta del colegio. Ella repartió equitativamente las empanadas, logrando armar 30 bandejas ¿Cuántas empanadas hay en cada bandeja?

Problemas de fracción parte-todo (contexto continuo)



Problema 1: Las pizzas medianas vienen cortadas en 8 trozos iguales. Si mi hermano se comió 5 trozos ¿qué fracción de la pizza quedó?

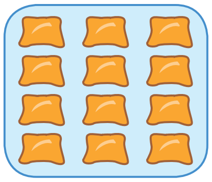
Problema 2: De una clase de 90 minutos se dedica un sexto a la revisión de las tareas del día anterior ¿Por cuántos minutos se revisaron las tareas?

Problema 3: En una empresa los empleados trabajan en turnos de 15 días. En un turno un grupo ya trabajó 12 días ¿Qué fracción del turno queda por trabajar? Simplifique el resultado.

Problema 4: El minutero de un reloj avanza 10 minutos ¿Qué fracción de una hora queda por cumplir? Simplifique el resultado.

Problemas de fracción parte–todo (contexto discontinuo)

Problema 1: En la reunión se comieron 4 empanadas del total que había ¿Qué fracción representan las empanadas que quedaron?



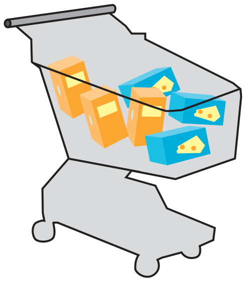
Relación PARTE-TODO

Problema 2: Ayer faltaron 5 estudiantes a clases. Si el curso está conformado por 30 alumnos ¿cuál es la fracción que representa los estudiantes que fueron a clases?

Problema 3: Agustín compró una bandeja con una docena de huevos. Al caerse la bandeja se rompieron 4 huevos ¿Qué fracción de huevos queda sin daño?

Problemas de razón

Problema 1: En una promoción de un supermercado, por cada 3 productos que se lleve uno es gratis ¿Cuánto debe comprar una persona para obtener 5 productos gratis?



Como RAZÓN

Problema 2: Se estima que 2 de cada 5 vuelos se reservan por internet. En un día, una aerolínea recibió 800 reservas por internet ¿Cuántas reservas por otra vía recibió, aproximadamente?

Problema 3: En la receta de una comida se necesitan 100 g de carne roja por cada 125 g de carne blanca. Para una fiesta se prepara la comida ingresando 5 000 g de carne blanca ¿Cuántos gramos de carne roja se añadieron?

Problema 4: Se sabe que aproximadamente una de cada 7 personas es zurda. Al inicio del año escolar se matricularon 105 nuevos estudiantes ¿Con cuántos estudiantes zurdos más podría contar el colegio?

Problemas de fracción como operador

Problema 1: Dos tercios de los 30 estudiantes del 4° A realizan actividades extraprogramáticas ¿Cuántos estudiantes del curso realizan actividades extraprogramáticas?

Como
OPERADOR

Problema 2: De un grupo de 120 estudiantes universitarios, tres cuartas partes reprobaron un ramo en su primer año de estudios ¿Cuántos estudiantes reprobaron al menos un ramo en el primer año de estudio?

Problema 3: Se estima que la décima parte de los niños de un colegio son miopes. En un colegio que tiene 800 estudiantes ¿cuántos de ellos tienen miopía?

Problemas de fracción como medida

Como
MEDIDA

Problema 1: En una carrera de 15 kilómetros se debe ubicar un juez con agua para los corredores cada medio km ¿Cuántos jueces necesita la carrera?

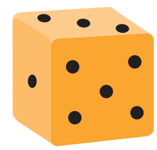
Problema 2: Se reparten 25 l de tinta negra en cartuchos que caben $\frac{1}{16}$ l.
¿Cuántos cartuchos de este tipo se pueden llenar?

Problema 3: Un centímetro mide aproximadamente $\frac{2}{5}$ pulgadas.
En un plano de construcción se indica el diámetro de un tubo conductor con 12 pulgadas ¿Cuál es aproximadamente la medida del diámetro en centímetros?

Problema 4: En las vías del ferrocarril se arman los durmientes cada $\frac{3}{5}$ m.
¿Cuántos durmientes caben en un tramo de 1 km?

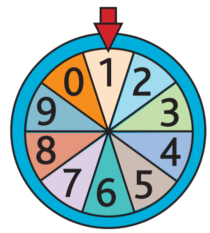
Problemas de probabilidades

Problema 1: Se lanza 1 vez un dado ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 5?



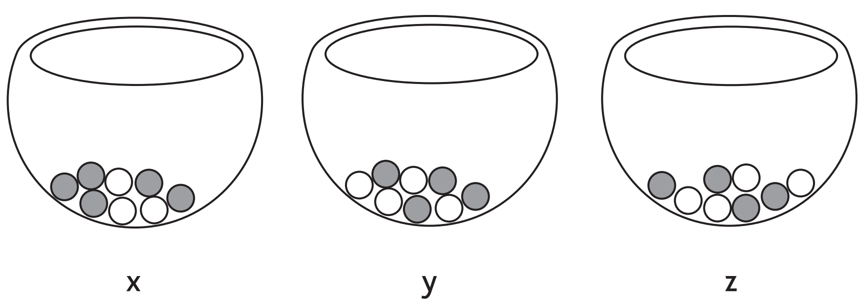
Como PROBABILIDAD

Problema 2: Se gira la rueda de fortuna al azar ¿Cuál es la probabilidad de que resulte un número impar?



Problema 3: Se divide un círculo en 8 sectores iguales de los cuales se pintan 5 de azul. El círculo se utiliza como rueda de fortuna. Determina la probabilidad de que resulte un sector que no esté pintado de azul.

Problema 4: Tres urnas, X, Y y Z tienen bolitas blancas y bolitas grises. De cada urna se quiere sacar una bolita al azar. Determina la probabilidad de sacar una bolita gris para cada una de las urnas X, Y, y Z.



Problemas de porcentaje

Problema 1: El 25% de los 40 estudiantes del curso obtuvo una calificación sobresaliente en la evaluación del curso ¿Cuántos estudiantes tuvieron una calificación sobresaliente?

Como
PORCENTAJE

Problema 2: Se aumenta el sueldo mensual por 5% ¿Con qué sueldo adicional puede contar un empleado si antes tenía un sueldo mensual de $ 750 000?

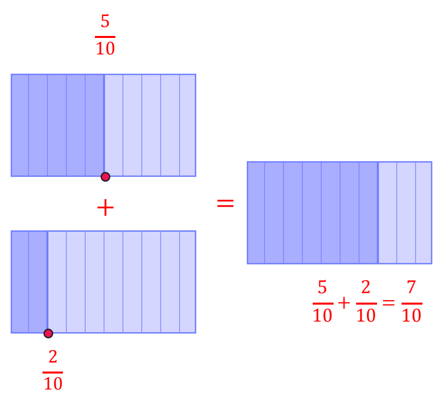
Problema 3: El agua salada del Océano Pacífico tiene una concentración aproximada de 3,5% de la sal ¿Cuánta sal se obtiene al evaporar 5 litros de agua salada?

Problema 4: El queso fresco tiene 75% de “masa líquida”. En la descripción del producto dice que el porcentaje de grasa en la “masa seca” es de 25% ¿Cuántos gramos de grasa tiene un trozo de 500 g de queso fresco?

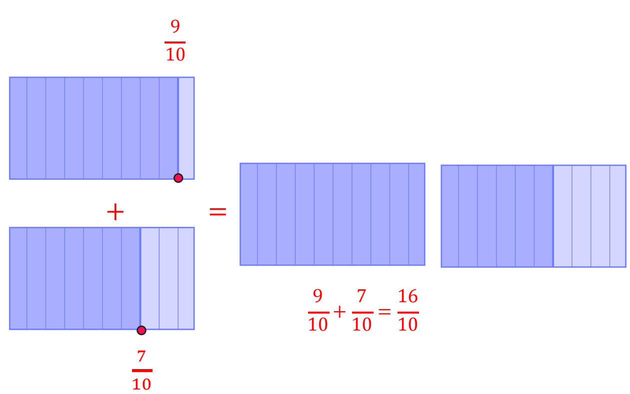
Operatoria con fracciones

Es importante promover la comprensión conceptual y procedimental a través de la incorporación de tecnología, por ejemplo a través del uso de programas computacionales tales como GeoGebra, Cabrie Geometre o algún otro manipulador virtual. A continuación se presentan diferentes ejemplos que permiten comprender la adición, multiplicación y división de fracciones.

Ejemplo GeoGebra: adición de fracciones

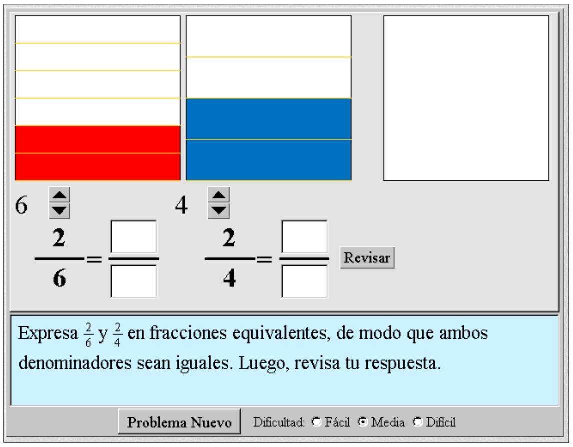


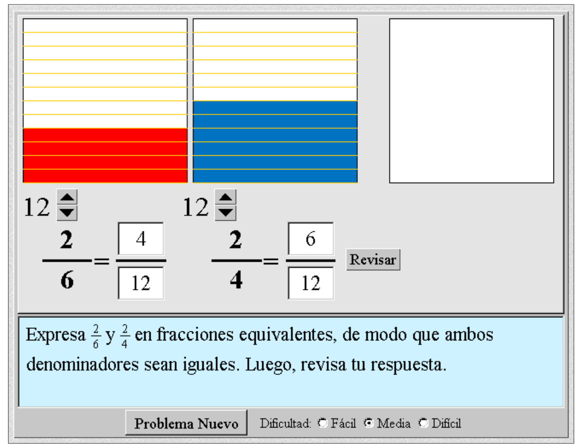
Ejemplo GeoGebra: adición de fracciones

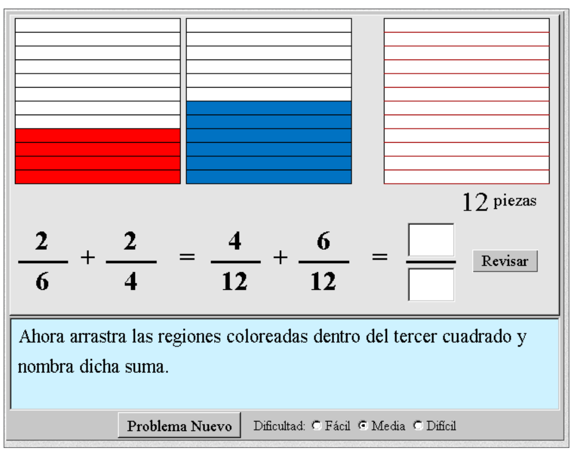


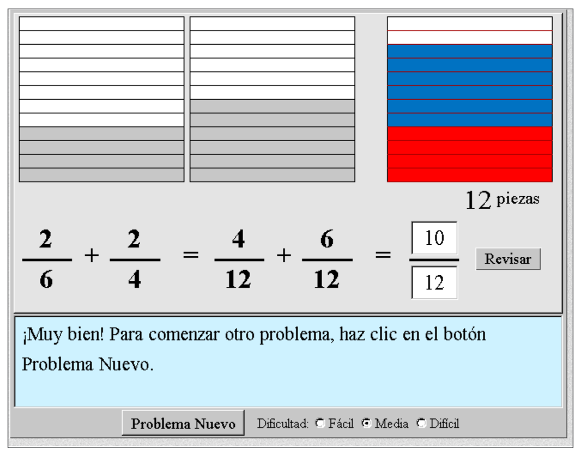
Habilidad de resolver problemas

Ejemplo Manipulador virtual: adición de fracciones

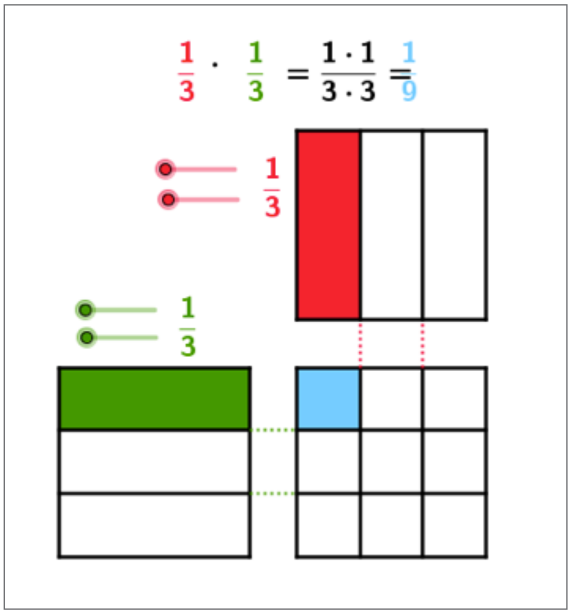




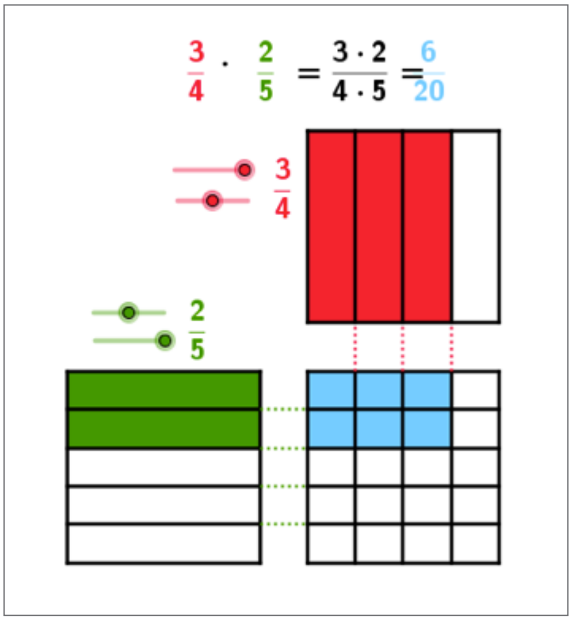




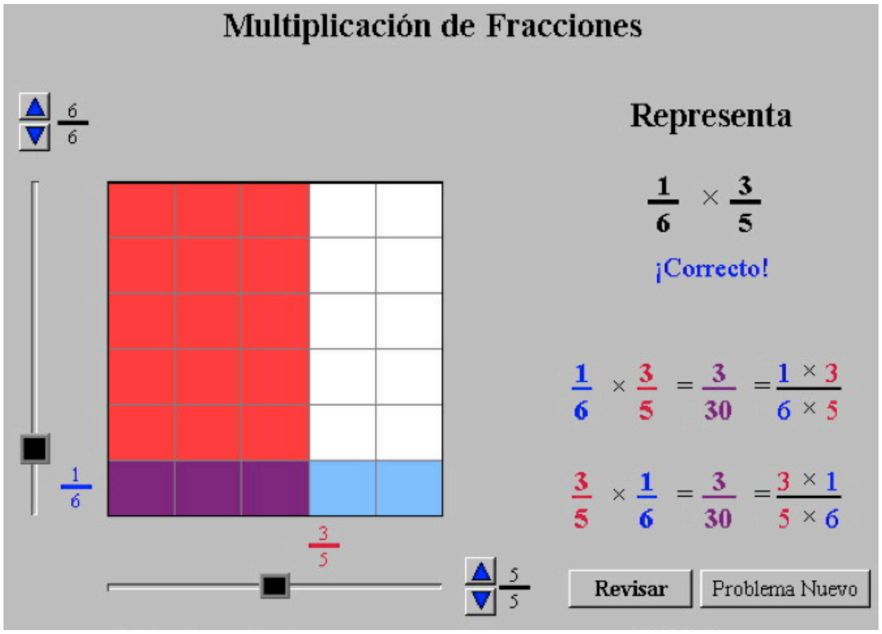
Ejemplo GeoGebra: multiplicación de fracciones



Ejemplo GeoGebra: multiplicación de fracciones



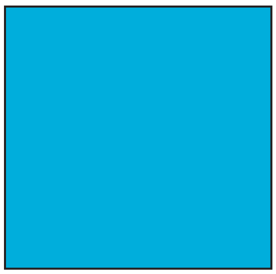
Ejemplo Manipulador virtual: multiplicación de fracciones



http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html

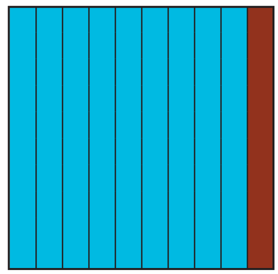
Operatoria con decimales

La expresión decimal es otra forma de expresar números racionales, y se relacionan con el sistema de numeración decimal utilizando sus mismas reglas.



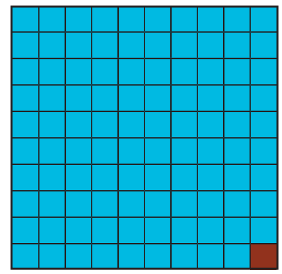
Un entero
Una unidad

$$\frac{1}{1}$$



Un décimo
0,1

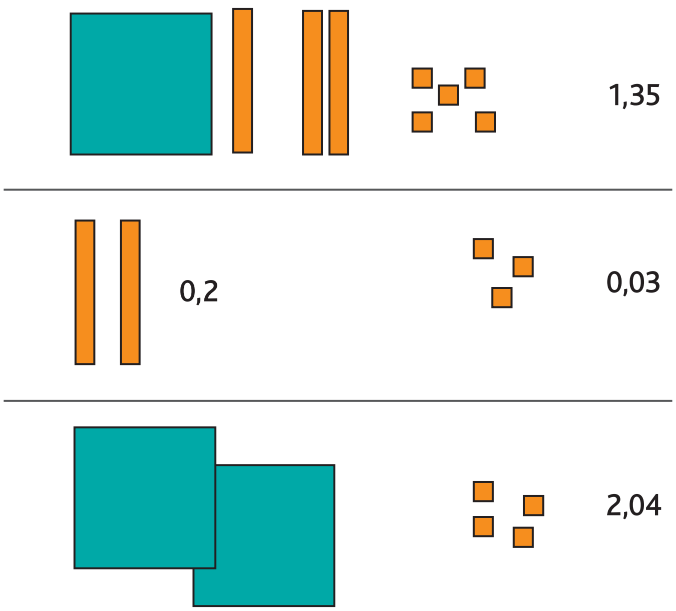
$$\frac{1}{10}$$



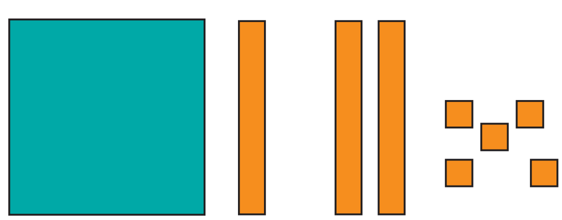
Un centésimo
0,01

$$\frac{1}{100}$$

El o la docente debe orientar a los y las estudiantes a representar diferentes números decimales con los bloques Multibase.

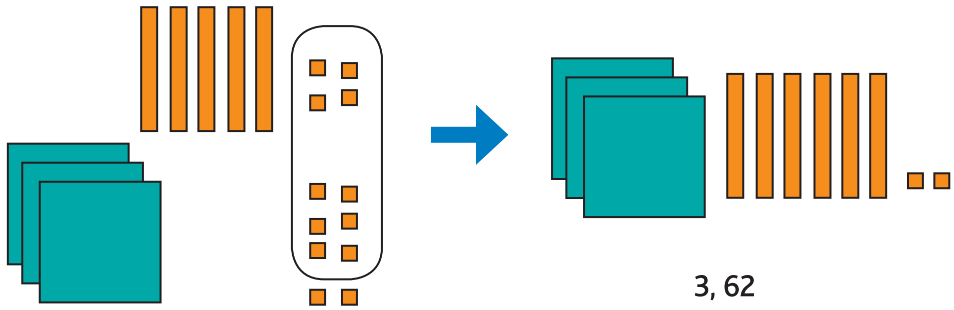


Cabe señalar que las y los estudiantes han trabajo con los bloques multibase entendiendo que la unidad es el cubo unitario, la barra corresponde a 10 y la placa corresponde a 100. En cambio, al estudiar los números decimales y representarlos con material concreto, la unidad está representada por la placa, los décimos por las barras y los centésimos por los cubos unitarios. Por lo tanto, el o la docente debe orientar a las y los estudiantes que vean que la representación:



corresponde a 135 en el conjunto de los números naturales, pero representa 1,35 en los números **decimales.**

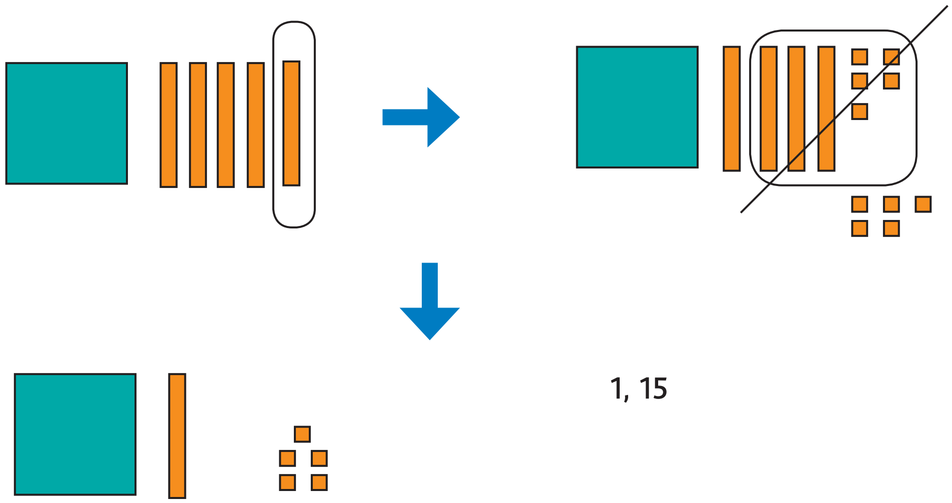
Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se comportan de manera similar que en los números naturales. Por ejemplo: 0,54 + 3,08



3, 62

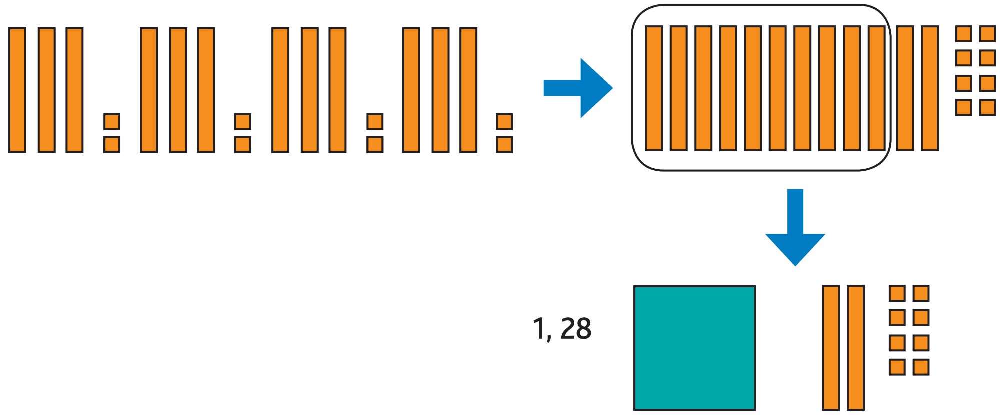
Las y los estudiantes deben comprender que al realizar operaciones aritméticas con números decimales se cumplen los mismos principios aritméticos que en los números naturales, es decir, cada vez que hay 10 centésimos obtenemos 1 décimo, y cada vez que tenemos 10 décimos obtenemos 1 unidad.

Por ejemplo: 1,5 - 0,35

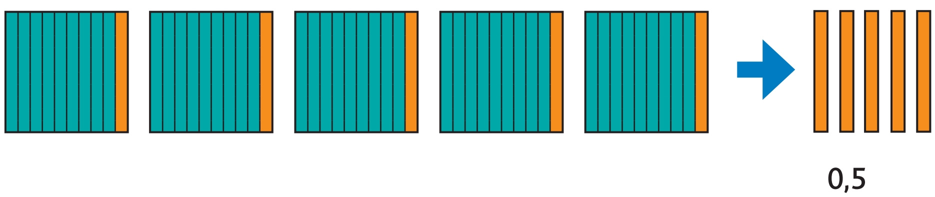


1, 15

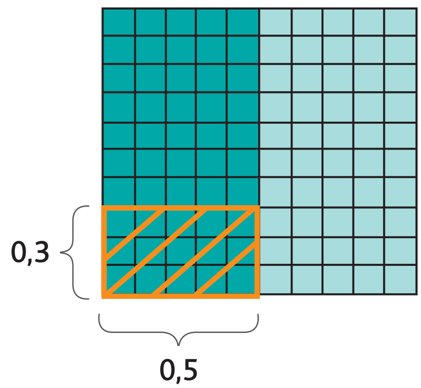
Por ejemplo: 4 x 0, 32



Por ejemplo: 5 x 0,1

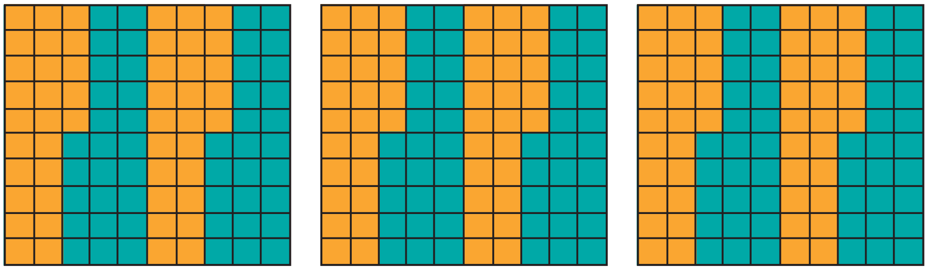


Por ejemplo: 0,5 x 0,3

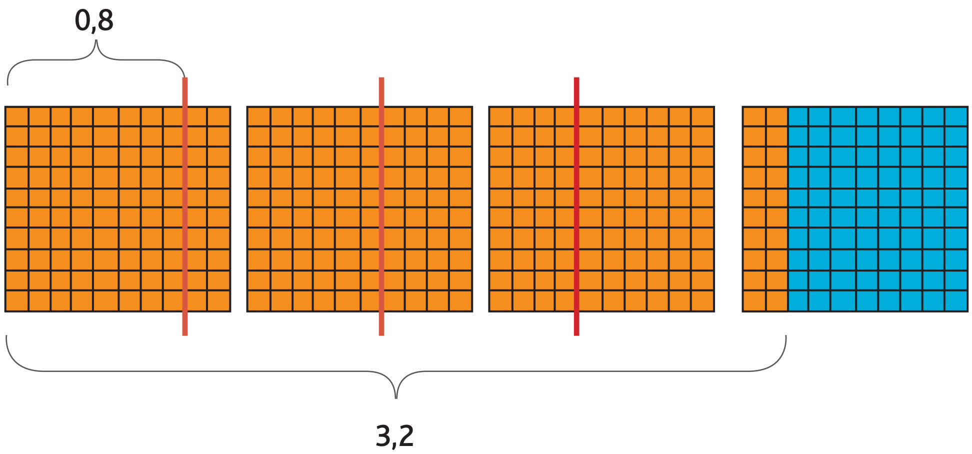


Habilidad de resolver problemas

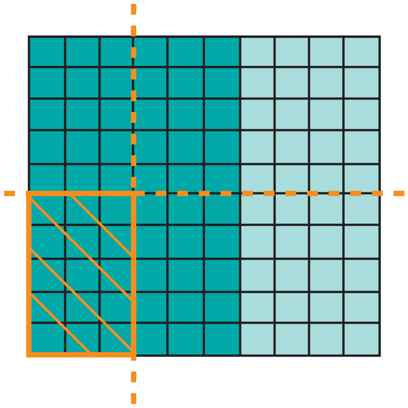
Por ejemplo: 3: 0,25



Por ejemplo: 3,2 : 0,8



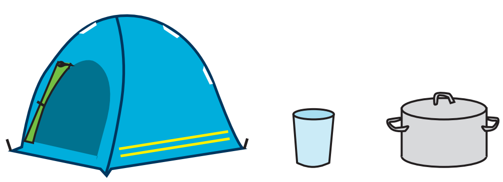
Por ejemplo: 0,6 : 4



Resolución de problemas y el uso de diferentes estrategias

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en la formación de las personas. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades, en parte porque el entorno social lo valora y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior, pero sobre todo porque faculta para confiar en el propio razonamiento y para usar de forma efectiva diversas estrategias para resolver problemas significativos relacionados con su vida. Así, el proceso de aprender matemática ayuda a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso en la sociedad (Mineduc, 2013).

Problema: Tres amigos están haciendo camping. En la noche preparan una sopa que requiere $\frac{3}{4}$ litro de agua. Para medir la cantidad del agua, tienen un vasito de $\frac{1}{8}$ litro ¿Cuántos vasitos de agua hay que echar en la olla?



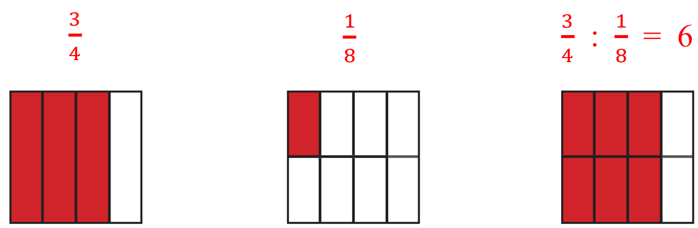
Estrategia 1 (ensayo y error): Sumar $\frac{1}{8}$ en forma iterada hasta obtener $\frac{3}{4}$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{2}{4}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{3}{4}}$$

6 sumandos → se necesitan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ l.

Estrategia 2: Repartir una cantidad en envases más pequeños del tamaño conocido y determinar la cantidad necesaria de envases.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = 6$ → Se necesitan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ l.



Estrategia 3: Amplificar la fracción que corresponde al recipiente más grande: al denominador de la fracción (que corresponde al recipiente más pequeño) y representarla como suma de fracciones.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \qquad \frac{6}{8} = \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{6 \text{ sumandos}}$$

→ Se echan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ l.

Estrategia 4: Descomposición del divisor $\frac{3}{4}$ en sumandos iguales.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \underbrace{\overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}}_{6 \text{ sumandos}}$$

→ Se echan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ l.

Estrategia 5: Restar iteradas veces a $\frac{3}{4}$, la fracción $\frac{1}{8}$, hasta llegar a 0.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$ $\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ $\frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$

Se realizan 6 restas

→ Se necesitan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ *l*.

Estrategia 6: Elaborar y resolver una ecuación que representa la situación.
Formular en palabras: "¿Cuántas veces $\frac{1}{8}$ es igual a $\frac{3}{4}$?"

$$x \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \quad \Big| \cdot \frac{8}{1}$$

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1}$$

$$x = 6$$

Se necesitan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ *l*.

Estrategia 7: Considerar la definición de una fracción y aplicar la propiedad de la proporcionalidad inversa.

Considerar que $\frac{3}{4}$ de litro son 3 partes iguales del tamaño $\frac{1}{4}$ de litro.

Considerar que $\frac{1}{8}$ de litro es la mitad de $\frac{1}{4}$ de litro.

¿Cuántas partes iguales de la mitad del tamaño anterior serían $\frac{3}{4}$ de litro?

Antes eran 3 partes iguales y ahora deben ser el doble (entonces 6 partes iguales).

→ Se necesitan 6 vasitos de $\frac{1}{8}$ de litro.

Estrategia 8: Variar factores de un producto manteniendo el producto.

Considerar el siguiente producto $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} \\ \downarrow (:2) \quad \downarrow (\cdot 2) \\ \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$$ el producto queda igual

→ Se necesitan 6 vasitos de $\frac{3}{4}$ de litro.

¿Qué relación hay entre los conceptos de fracciones, probabilidad, número decimal y operatoria de fracciones?

Para Borrás (2014), conocer el azar implica conocer, al menos, sus características y manifestaciones. Dos son las características de las experiencias aleatorias:

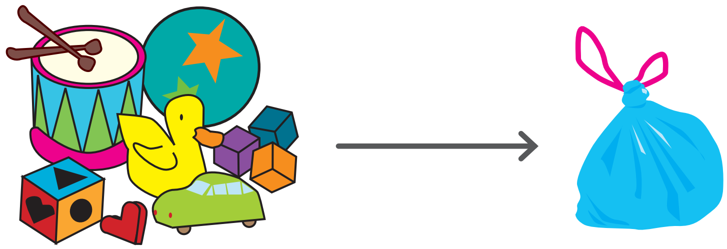
- Cada experiencia puede tener una variedad de posibles resultados: el azar produce indeterminación.
- El resultado actual de cada prueba depende de influencias no controlables. Pero presenta regularidades (que pueden ser previstas mediante el cálculo de probabilidades). El azar se manifiesta, por ejemplo, a través de sorteos más o menos explícitos. Son estos sorteos los que producen o modelan multitud de fenómenos naturales y sociales.

De acuerdo con la naturaleza de lo aleatorio y su modelización, es crucial para el aprendizaje analizar sorteos en situaciones diversas con grados crecientes de dificultad y utilizando una amplia variedad de generadores aleatorios: monedas y discos, dados poliédricos, discos y dados sesgados, ruletas... en los que es transparente el tipo de sorteo. Después, pueden utilizarse ventajosamente, por la facilidad y rapidez con que se sortea, tablas de números y programas de ordenador o calculadoras que generen números aleatorios.

El desarrollo de una clase típica podría ser este:

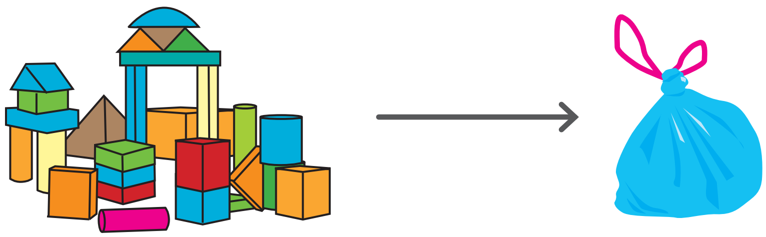
- Establecimiento de una conjetura previa acerca de los posibles resultados de la experiencia aleatoria propuesta.
- Exposición y defensa de las diferentes conjeturas. En algunos casos puede llegarse a la previsión teórica de lo que sucederá.
- Construcción del modelo y realización de la simulación, repitiendo varias veces la experiencia y recogiendo los datos de todos los grupos de alumnos en una tabla.
- Análisis e interpretación de los datos de la tabla.
- Revisión de las conjeturas iniciales en función de los resultados obtenidos.
- Justificación teórica de los resultados, si no se hizo previamente, y si es posible y adecuado a los conocimientos de las y los estudiantes.

Problema 1: Francisca debe ordenar sus juguetes y guardarlos en una bolsa.



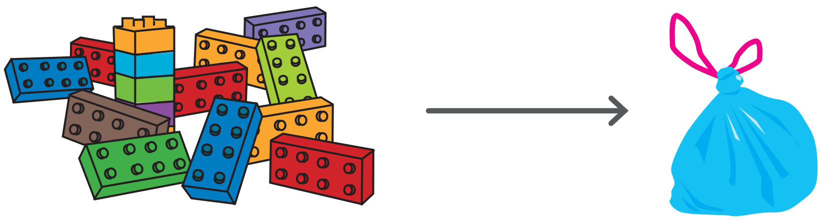
Luego, ella decide sacar el tambor ¿Es posible que pueda sacar, al primer intento, el tambor con los ojos cerrados?

Problema 2: Francisca debe ordenar sus bloques de madera y guardarlos en una bolsa.



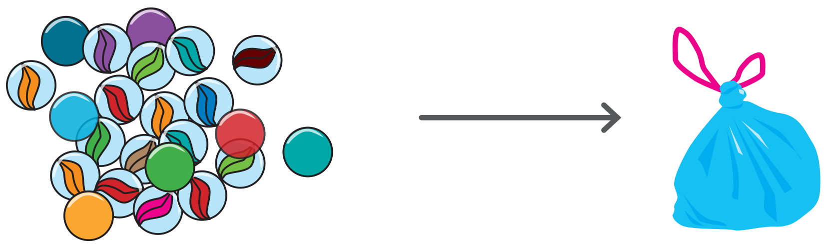
Luego, ella decide sacar un bloque ¿Es posible que pueda sacar, al primer intento, un bloque de forma rectangular con los ojos cerrados?

Problema 3: Francisca debe ordenar y guardar sus bloques en una bolsa.



Luego, ella decide sacar un bloque rojo ¿Es posible que pueda sacar, al primer intento, un bloque rojo con los ojos cerrados?

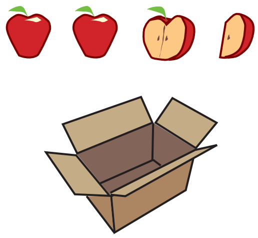
Problema 4: Francisca debe ordenar y guardar sus bolitas en una bolsa.



Luego, ella quiere tener una bolita de color amarillo ¿Es posible que pueda sacar, al primer intento, una bolita amarilla con los ojos cerrados?

Al resolver los problemas 1 y 2 hay certeza de sacar un tambor y un bloque rectangular, ya que mediante el tacto el o la estudiante podría identificar dichos objetos. Sin embargo, los problemas 3 y 4 representan una situación de incertidumbre al intentar sacar de la bolsa un bloque rojo o una bolita amarilla.

Problema 5: En una caja se colocarán manzanas y trozos de manzanas. Si una persona con los ojos vendados tiene la oportunidad de sacar una manzana o trozo de manzana de la caja ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) Es posible sacar una manzana entera.

b) Es posible sacar un trozo de manzana.

c) Es seguro sacar una manzana entera.

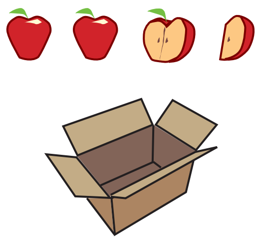
e) Es seguro sacar un trozo de manzana.

Problema 6: En una mesa hay manzanas y trozos de manzanas, las cuales están fuera de una caja.

a) ¿Qué fracción representan las manzanas enteras en total?

b) ¿Cuántas manzanas representan $\frac{1}{4}$?

c) ¿Qué manzanas representan $\frac{1}{2}$?

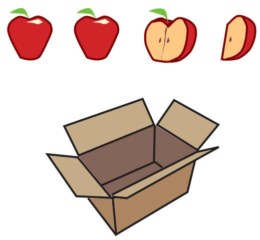


Problema 7: En una mesa hay manzanas y trozos de manzanas. Luego se colocan en una caja que se sella.

a) ¿Qué probabilidad hay de sacar una manzana?

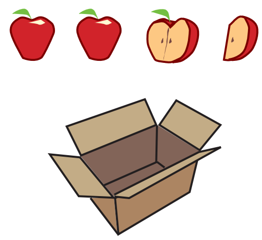
b) ¿Qué probabilidad hay de sacar "media manzana"?

c) ¿Qué probabilidad hay de sacar "un cuarto de manzana"?



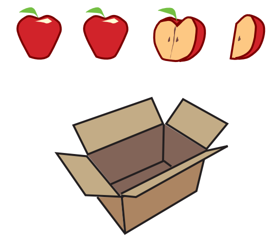
Problema 8: ¿Cuál de los siguientes eventos es seguro y cuál es evento posible?

¿Qué evento es seguro?



Respuesta: Sacar manzana

¿Qué fracción representa la totalidad de manzanas?

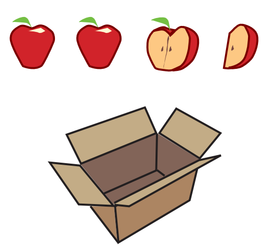


Respuesta: La fracción $\frac{4}{4}$

¿Cuáles son las opciones? → Aquí se debe explicar la diferencia entre casos favorables y espacio muestral.

Por lo tanto, un evento seguro implica probabilidad 1.

¿Qué evento es posible?

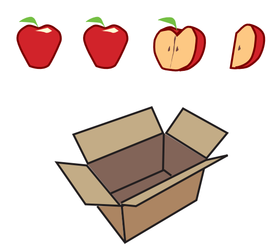


Respuestas: Sacar manzana entera.

Sacar media manzana.

Sacar un cuarto de manzana.

¿Qué fracción representa a las manzanas enteras y los trozos?

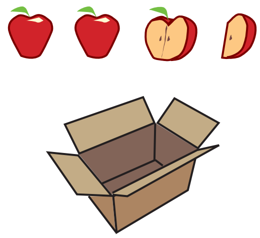


Respuesta: Manzana entera $\frac{2}{4}$

Media manzana $\frac{1}{4}$

Un cuarto de manzana $\frac{1}{4}$

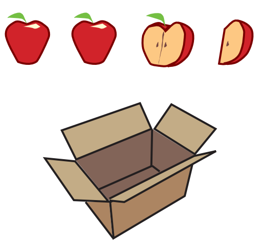
¿Qué evento es seguro? ¿Qué evento es posible?



a) Un evento **seguro** implica probabilidad 1.

b) Un evento **posible** implica una probabilidad menor que 1 y mayor que 0.

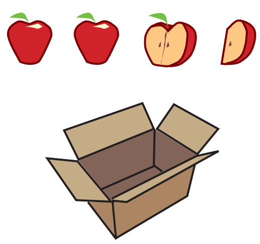
¿Qué evento es imposible?



Respuesta:

Sacar una manzana o trozo de manzana diferente a manzana roja.

¿Qué fracción representa a las manzanas verdes?



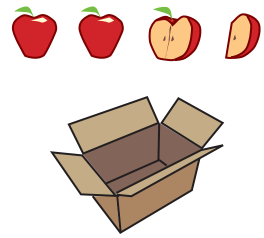
Respuesta:

Manzana verde $\frac{0}{4}$

¿Cuáles son las opciones? → Aquí se debe explicar la diferencia entre casos favorables y espacio muestral.

Por lo tanto, un evento imposible implica una probabilidad 0.

¿Qué evento es seguro? ¿Qué evento es posible?



a) Un evento **seguro** implica probabilidad 1.

b) Un evento **posible** implica una probabilidad menor que 1 y mayor que 0.

c) Un evento **imposible** implica una probabilidad 0.

Habilidad de resolver problemas

Para explicar el concepto de experimento aleatorio, determinístico, espacio muestral, suceso y probabilidad de un suceso, ejemplificaremos con un dado de 6 caras.

Experimento determinístico: "Se deja caer un dado".
Resultado: El dado se cae (es predecible).

Experimento aleatorio: "Se deja caer un dado".
Resultado: Se observa la cara superior del dado después de estar en reposo. Por ende, no es predecible).

Espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio: Es el conjunto de todos los resultados posibles.

Ejemplo: Lanzamiento de un dado; E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso (evento) de un experimento aleatorio: Es cada subconjunto del espacio muestral E del experimento aleatorio.

Ejemplos de sucesos al dejar caer un dado de 6 caras.

- sucesos "elementales": {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}
- sucesos "compuestos": A "sale un número par" A = {2, 4, 6}
- suceso "seguro": B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E
- suceso "imposible": C "sale un número mayor que 6" C = { }

Probabilidad P(A) de un suceso A de un experimento aleatorio:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{(número de casos posibles)}}$$

$P(A) = 1 \rightarrow$ Suceso seguro

$0 < P(A) < 1 \rightarrow$ Suceso posible

$P(A) = 0 \rightarrow$ Suceso imposible

Ejemplos:

- suceso D "salir un múltiplo de 2"; D = {2, 4, 6} $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- suceso F "salir un número primo"; F = {2, 3, 5} $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- suceso seguro E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; P(E) = 1
- suceso imposible C = { } ; P(C) = 0

Habilidad de resolver problemas

Problema 9: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado?
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 4 al lanzar un dado?

Al lanzar un dado, ¿Qué probabilidad hay de obtener un número par?

1	2
3	4
5	6

Respuesta: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Al lanzar un dado, ¿Qué probabilidad hay de obtener un número mayor que 4?

1	2
3	4
5	6

Respuesta: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Al lanzar un dado, ¿Qué probabilidad hay de obtener "un número par mayor que 4"?

1	2
3	4
5	6

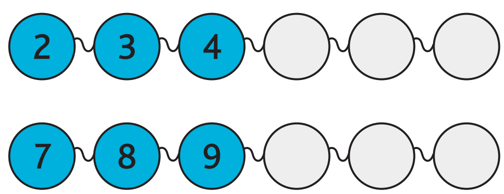
Respuesta: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Gestión de problemas

La siguiente secuencia de problemas ejemplifica cómo generar oportunidades de aprendizaje que permitan a los y las estudiantes resolver y formular problemas que impliquen operatoria con números naturales, fracciones y números enteros.

Resolución de problemas de números naturales

Problema 1: Completa las secuencias numéricas.



Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) ¿Ambas secuencias comienzan con el mismo número?

b) ¿Son secuencias crecientes? ¿Son secuencias decrecientes?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) ¿Es correcto afirmar que el 5º término de la primera secuencia es el número 5?

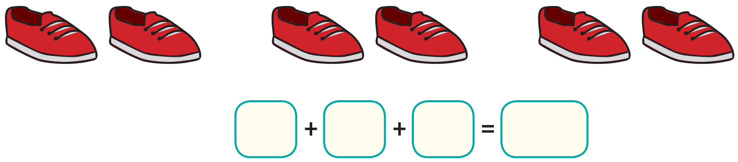
b) ¿Es correcto afirmar que dos secuencias numéricas (crecientes) son diferentes si comienzan de números diferentes?

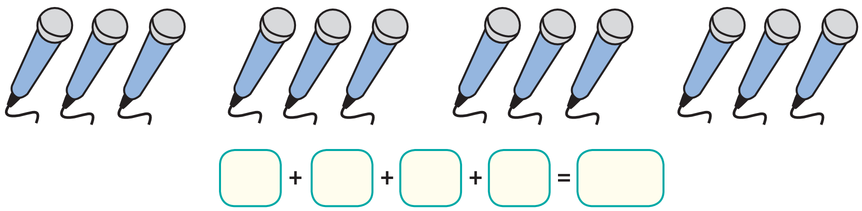
Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:

a) Si el nuevo patrón es sumar 2, ¿qué secuencias se obtienen si el primer término es el número 6.

b) Si el nuevo patrón es sumar 2, ¿qué secuencias se obtienen si el primer término es el número 1?

Problema 2: Observa cada representación y completa.





Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) ¿De qué forma están ordenadas las zapatillas? ¿De qué forma están ordenados los micrófonos?

b) ¿Cuántos pares de zapatillas y cuántos tríos de micrófonos hay?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) ¿Es correcto afirmar que hay tres pares de zapatillas? ¿debemos sumar 2 + 2 + 2?

b) ¿Es correcto afirmar que hay cuatro tríos de micrófonos? ¿debemos sumar 3 + 3 + 3 + 3?

Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:

a) Si ordenamos las zapatillas en tríos ¿cuántos grupos se forman?

b) Al sumar ahora, ¿obtenemos la misma cantidad de zapatillas?

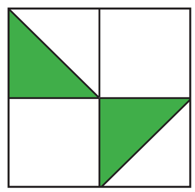
c) Y si los micrófonos los ordenamos de dos en dos ¿cuántos grupos se forman?

d) Al sumar ahora ¿obtenemos la misma cantidad de micrófonos?

Resolución de problemas de fracciones

Problema 1: Manuel observa la siguiente figura:

¿Qué fracción representa la parte achurada?



Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) ¿Qué figuras son utilizadas para subdividir el cuadrado de mayor área?

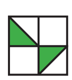
b) ¿Es correcto decir que dos triángulos son equivalentes a la superficie de un cuadrado?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) ¿Es correcto decir que el cuadrado fue dividido en 6 partes?

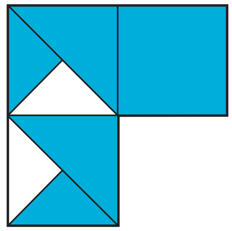
b) ¿Es correcto decir que el cuadrado fue dividido en 6 partes, de las cuales 4 son triángulos y 2 son cuadrados?

c) ¿Es correcto entonces señalar que el cuadrado de mayor área fue dividido en sextos?

d) ¿Es correcto decir que  y  representan $\frac{2}{8}$?

e) ¿Ambas figuras fueron divididas en partes de igual forma e igual tamaño?

Problema 2: Javiera observa la siguiente imagen:



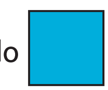
Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

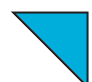
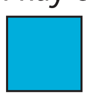
a) ¿Qué fracción representa lo achurado en celeste?

b) ¿Cuáles tienen la misma superficie?

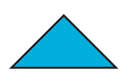
c) ¿Qué relación hay entre la superficie del triángulo  y la superficie del triángulo  ?

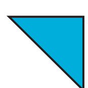
d) ¿Esos triángulos tienen la misma superficie?

e) ¿Qué relación hay entre la superficie del cuadrado  y la superficie del triángulo  ?

f) ¿Qué relación hay entre la superficie del triángulo  y la superficie del cuadrado  ?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) ¿Es correcto decir que la superficie del triángulo  corresponde a $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{12}$?

b) ¿La superficie del triángulo  corresponde a $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{6}$?

Problema 3: La profesora Angélica dibuja en la pizarra las siguientes figuras:

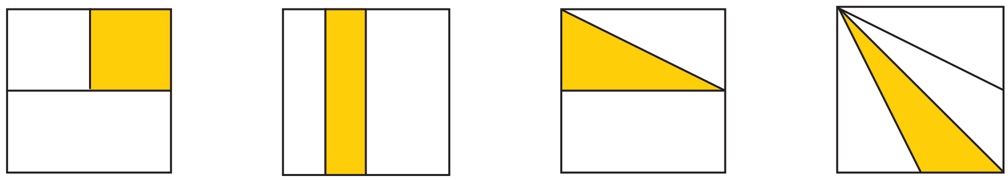


Figura 1 figura 2 Figura 3 figura 4

Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) ¿Cuál de las figuras anteriores representa la fracción $\frac{1}{4}$? Justifica para cada figura tu respuesta.

b) ¿Es correcto decir que la figuras 1, 2 y 3 están divididas en tercios?

c) Si en la figura 1 trazamos el eje de simetría vertical, ¿es correcto aseverar que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$?

d) Si ahora trazamos otra línea que no es eje de simetría, ¿podemos aseverar que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) Si en la figura 2 trazamos una línea paralela de la siguiente manera  ¿es correcto decir que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$?

b) Si ahora trazamos otra línea que no es una paralela, ¿podemos aseverar que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$?

c) Si en la figura 3 trazamos una línea diagonal de la siguiente manera  ¿es correcto decir que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$? Si ahora trazamos otra línea que no es una diagonal ¿podemos aseverar que la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$?

d) ¿Es correcto afirmar que solamente la figura 4 está dividida en cuartos?

Resolución de problemas de números enteros

Problema 1: El profesor Patricio construye una tabla con números negativos con medidas:

-416,5m	-18,3 mm/m^2	33,3%	8,9°C	-0,35%	-12,4V

A continuación, solicita a las y los estudiantes relacionar los datos anteriores con las siguientes magnitudes:

Temperatura	Variación IPC en un mes	Voltaje de carga negativa	Profundidad del lago	Rebaja del precio	Déficit de agua caída

Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) Si queremos medir la altura o el largo de un objeto, ¿es correcto afirmar que las medidas son siempre positivas?

b) ¿Por qué al medir la temperatura debemos utilizar números negativos?

c) ¿Cómo se interpreta 0° C?

d) ¿Qué significa que el resultado de medir el voltaje es negativo?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) La rebaja del precio de un producto, ¿puede ser un porcentaje negativo?

b) La variación de IPC ¿puede ser positiva y negativa?

c) ¿Cuál es la interpretación en cada caso?

Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:

Busca tres datos que permiten relacionar e interpretar cada una de las siguientes afirmaciones:

a) "Este año hay déficit de lluvia".

b) "El nivel de agua del lago aumentó significativamente con respecto al año anterior".

c) "La temperatura promedio en el norte de Chile es el doble de la temperatura promedio en el sur".

¿Cómo abordar el desarrollo de las habilidades de forma integrada?

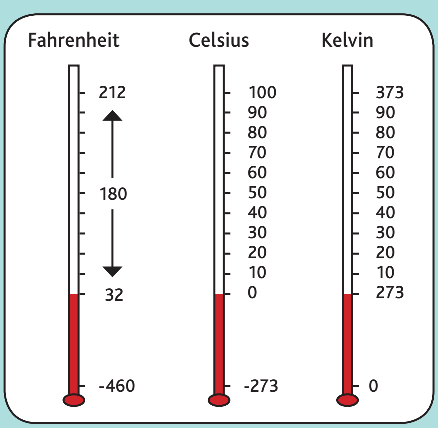
Para potenciar la **Habilidad de Representar**, las y los estudiantes pueden reflexionar respecto de las siguientes interrogantes:

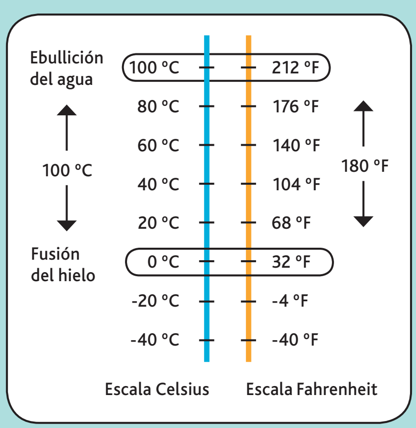
a) La recta numérica, ¿permite representar e interpretar datos relativos a un contexto de temperatura?
b) La recta numérica, ¿permite interpretar datos relativos a un contexto de profundidad del mar?
c) Se aconseja dibujar una recta numérica e interpretar datos reales.

Para potenciar las **Habilidades de Representar y Argumentar**, las y los estudiantes pueden reflexionar respecto de las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué la recta numérica no es la mejor representación para interpretar datos de déficit de agua caída?
b) ¿Por qué la recta numérica no es la mejor representación para interpretar datos de rebaja de precios?
c) Se aconseja dibujar una recta numérica para analizar la "incoherencia" al interpretar datos de déficit de agua caída o rebaja de precios con dicha representación.

Para potenciar las **Habilidades de Representar, Argumentar y Modelar**, las y los estudiantes pueden reflexionar (solamente interpretar el modelo) respecto de la relación cuantitativa entre grados Celsius (C°), grados Fahrenheit (F°) y grados Kelvin (K°):

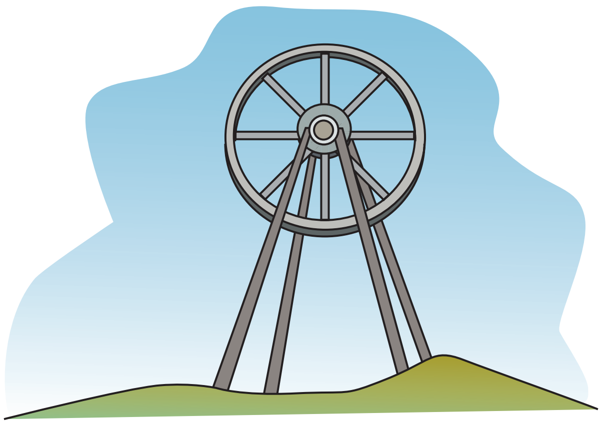




$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Cabe destacar que el valor constante 32 no corresponde a grados Celsius y no corresponde a grados Fahrenheit.

Problema 2: La imagen muestra la rueda de un ascensor que sube y baja la cabina en una mina de carbón. Con cada giro completo de la rueda en el sentido del reloj, la cabina sube 15 m; por cada giro completo en el sentido contrario al reloj, la cabina baja 15 m. Las profundidades bajo la tierra se expresan con números negativos.



La cabina está a una profundidad de -330 m; desde ahí, la rueda gira 18 veces ¿A qué profundidad llegó?

Pregunta para analizar o comprender el enunciado:

La empresa ENACAR administraba la explotación de los principales yacimientos carboníferos del país, ubicados en la VIII Región: Lebu, Cólico (cerrada en 1992), Trongol (cerrada en 2006), Lota (cerrada en 1997) y Schwager (privatizada en 1988 y cerrada en 1995)[2].

> Si -330 *m* significa 330 *m* de profundidad bajo tierra ¿es correcto afirmar que +330 *m* significa que el ascensor subirá 330 *m* sobre la tierra (superficie)?

---

2. Cuando el enunciado del problema lo permita, se aconseja dar una pequeña contextualización respecto de alguna región de nuestro país.

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) Si la rueda gira 18 veces ¿es correcto afirmar que debemos multiplicar 18 x 15 *m* y luego restar el resultado a 330 *m*?

$$\begin{array}{r} \underline{\quad 18} \cdot 15 \\ 40 \\ 50 \\ 80 \\ \underline{+\ 100} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \underline{\quad 15} \cdot 18 \\ 40 \\ 50 \\ 80 \\ \underline{+\ 100} \end{array}$$

Lo anterior permite evaluar la comprensión del sistema de numeración decimal y la aplicación comprensiva del concepto de valor posicional.

18 · 15 *m* = 270 *m*

b) ¿Qué procedimiento (cálculo) debemos realizar ahora?

i) 330 *m* - 270 *m*
ii) - 330 *m* - 270 *m*
iii) - 330 *m* + 270 *m*
iv) 330 *m* + 270 *m*

c) ¿Por qué debemos calcular -330 *m* - 270 *m* para responder a qué profundidad llegó el ascensor luego de girar 18 veces la rueda?

d) Al calcular -330 *m* - 270 *m* ¿en qué sentido gira la rueda?

e) Al calcular -330 *m* + 270 *m* ¿en qué sentido gira la rueda?

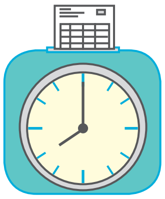
Pregunta para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:

Si la rueda giró inicialmente a la derecha 18 veces ¿cuántas veces más debe girar para llegar a una veta que se encuentra a una profundidad de -600 *m*?

Problema 3: En una fábrica, se registran los tiempos de asistencia de los trabajadores. Si la persona llega atrasada dentro de una hora, se registra el atraso como tiempo negativo. Para recompensar el tiempo de atraso, se ofrece la posibilidad de recuperar el tiempo al día siguiente. Para un trabajador se registraron:

i) atraso 1: $-\frac{1}{2}$ horas.

ii) atraso 2: $-\frac{1}{4}$ horas.



En cada caso, calcula el tiempo que deberá recuperar el trabajador al día siguiente. Expresa el resultado en horas y en minutos.

Preguntas para analizar o comprender el enunciado:

a) Si el tiempo de atraso es registrado con un número negativo ¿es correcto decir que si un trabajador realiza tiempo extra se registra como un número positivo?

b) ¿Cómo se registra que un trabajador salió de su jornada laboral 45 minutos después de lo establecido en su contrato? ¿Es correcto afirmar que un trabajador puede acumular en un día +6 horas?

Preguntas para orientar la resolución del problema:

a) ¿A cuántos minutos equivale media hora de atraso?

b) ¿A cuántos minutos equivale un cuarto de hora de atraso?

c) ¿Por qué no podemos sumar inmediatamente $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{4}$?

d) ¿Por qué debemos aplicar el concepto de fracción equivalente para sumar $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{4}$?

e) ¿Por qué $-\frac{1}{2} + -\frac{1}{4}$ es equivalente sumar $-\frac{2}{4} + -\frac{1}{4}$?

Pregunta para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:

Si el horario de trabajo es de 8:30 a 18:00 horas y un trabajador registra $2\frac{1}{4}$ h de atraso el día jueves ¿A qué hora deberá retirarse el día viernes?

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile