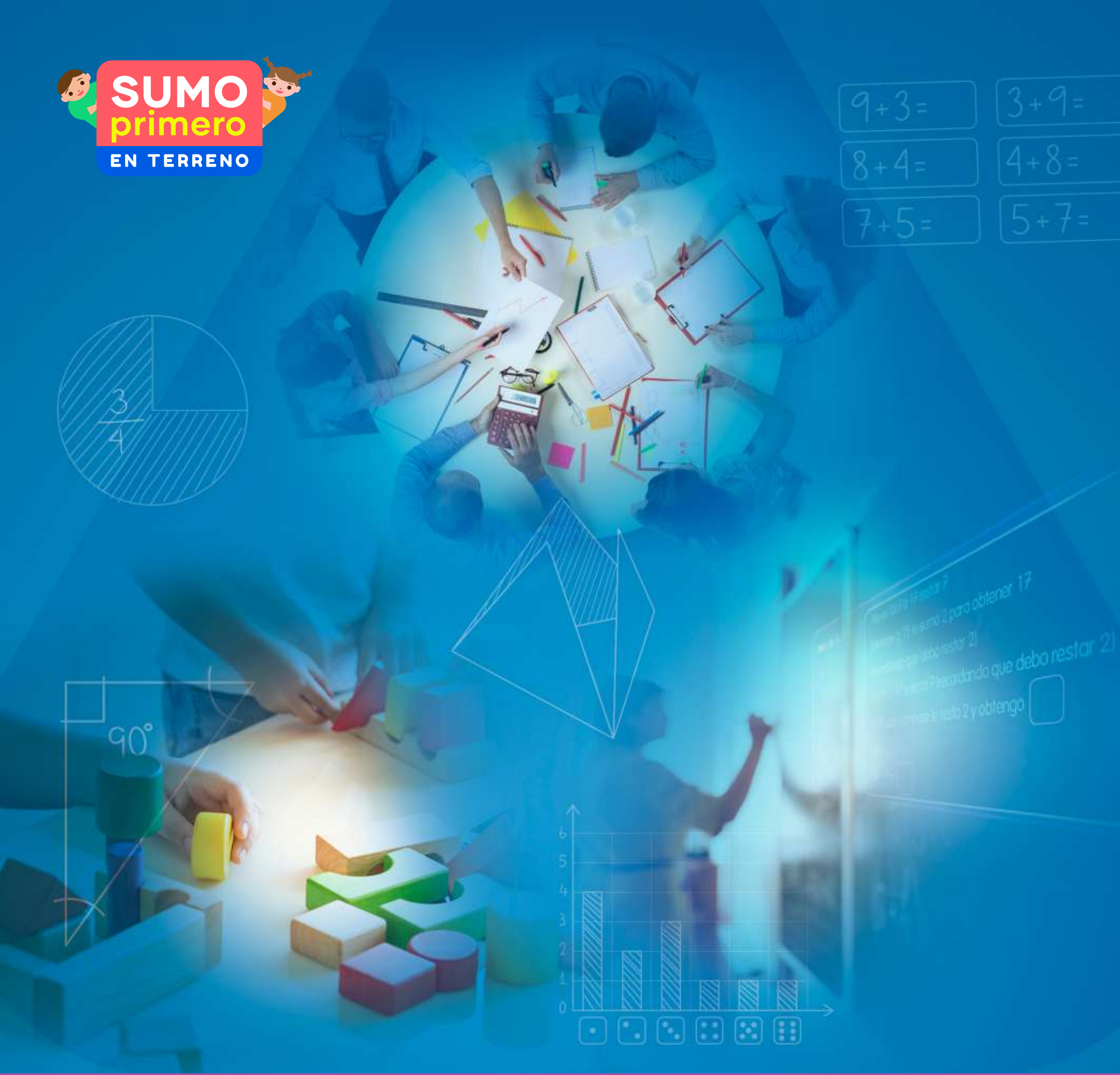
SUMO primero EN TERRENO



DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA:

UN APORTE A LA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES

TOMO II

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA: UN APORTE A LA FORMACIÓN CONTÍNUA DE PROFESORES

TOMO II

ANDREA PIZARRO-CANALES

CARLOS CAAMAÑO-ESPINOZA

CAROLINA BRIEBA-BRIEBA

EDITORES

Ediciones Universitarias de Valparaíso

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

AUTORES
Andrea Pizarro-Canales, Carlos Caamaño-Espinoza y Mª Carolina Brieba-Brieba (editores): Álvaro Poblete, Cinthia Iglesias-Mancini, Sergio Morales, Rodolfo Morales-Merino, Juan Núñez-Fernández, Jorge Olivares-Aguilera, Pedro Vidal-Szabó, Rodrigo Salinas-Ahumada, 2021.

COMITÉ CIENTÍFICO INTERNACIONAL
Los capítulos del presente libro han sido evaluados por:
Vicenc Font – Universidad de Barcelona, España
Joaquim Giménez – Universidad de Barcelona, España
Joan Gómez – Universidad Politécnica de Cataluña, España
Alain Kuzniak – Universidad de Paris, Francia
Catherine Taveau – Universidad de Bordeaux, Francia

CORRECCIÓN DE ESCRITURA Y ESTILO
María Luz Morillo-Quesen

DISEÑO GRÁFICO
Carlos González y Rodrigo Ruiz

Colección: Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica
Director de la Colección: Andrea Pizarro-Canales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

1ª Edición Digital: 2021
Registro de Propiedad Intelectual Nº 2021-A-10345
ISBN: 978-956-17-0966-9

Referenciar cada capítulo como:
Autor(es) (2021). Nombre del capítulo. En A. Pizarro-Canales, C. Caamaño-Espinoza y C. Brieba (Eds.), Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Aportes a la Formación Continua de Profesores. Tomo II (pp. señalar números de páginas). Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. https://www.euv.cl/archivos_pdf/DDM_2.pdf

Este libro se realizó en el marco del Programa Sumo Primero en Terreno, que es un proyecto financiado por el Ministerio de Educación en colaboración con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Ediciones Universitarias de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Calle 12 de Febrero 21, Valparaíso, Chile
Tel. (56-32) 227 3902
e-mail: euvsa@pucv.cl
www.euv.cl

HECHO EN CHILE

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Estimados docentes y directivos:

En el marco del fortalecimiento de la educación pública chilena, el Ministerio de Educación busca promover la mejora de los aprendizajes escolares de los estudiantes, a través de diversas iniciativas y proyectos tendientes a desarrollar las capacidades docentes y directivas, que beneficien la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para la educación básica. Para ello, la División de Educación General de este Ministerio impulsó el desarrollo del programa Sumo Primero en Terreno en convenio con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Este Programa se inició en julio del año 2019, y brindó apoyo sistémico a establecimientos de todo el país, fortalecimiento las capacidades profesionales de sus docentes para la enseñanza de la matemática y ofreciendo oportunidades de aprendizaje matemático a 29.000 niños y niñas de primero a cuarto año básico.

Una de las actividades desarrolladas, fueron los talleres docentes, que se focalizaron en generar espacios profesionalizantes, aportando al desarrollo de capacidades docentes desde una mirada didáctica-matemática orientada al diseño y gestión de procesos de enseñanza y de aprendizaje efectivos. A partir de las reflexiones críticas y fundamentadas acerca de la enseñanza y el aprendizaje que surgieron de estos talleres, nacieron dos libros.

Estos libros tienen como propósito promover, desde la didáctica de la matemática, las capacidades requeridas en docentes del Primer Ciclo de Educación Básica, para planificar y gestionar los procesos de enseñanza y de aprendizaje adaptadas a las necesidades propias de la etapa inicial y orientar el desarrollo de las habilidades focalizadas en la resolución de tareas matemáticas por parte de los estudiantes.

De la misma forma que el tomo anterior, este libro de Didáctica de la Matemática que presentamos, se centra en el propósito formativo de la asignatura de matemática, que es “enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar” (MINEDUC, 2012, P.86).

Junto con agradecer el compromiso y profesionalismo del equipo de especialistas en Didáctica de la Matemática que participaron en la elaboración de estos libros y a los destacados expertos internacionales que evaluaron su calidad y aporte a la formación inicial y continua de docentes, es un agrado para la División General de Educación del Ministerio de Educación poner a disposición de todos ustedes el Tomo II del libro Didáctica de la Matemática para Primer ciclo de Educación Básica: un aporte a la formación continua de profesores.

Esperamos que este recurso, fortalezca el desarrollo de la didáctica de la matemática en los docentes que se desempeñan en primer ciclo de educación básica, para mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.
Saludos cordiales,

Raimundo Larraín H.
Jefe de la División de Educación General
Ministerio de Educación de Chile

PRÓLOGO

Enseñar y aprender matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz
(Pere Puig Adam, 1958);
Aprender matemáticas es esencialmente "hacer matemáticas" (NCTM 1988).

Didáctica de la matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Un aporte a la Formación Continua de Profesores, hace honor a su título. En efecto, no es un libro teórico que cae de las manos después de pocas páginas de lectura. Es un auténtico aporte a la formación continua de los profesores de Matemáticas. Pero también puede ser un instrumento de ayuda a la formación inicial de investigadores en Didáctica de la Matemática, junto a la propuesta de buenas prácticas y la reflexión de principios que sustentan dichas prácticas. Es una invitación a crecer en el dominio de la profesión.

Los autores son especialistas en Educación Matemática que usan de fondo las propuestas de tareas de Isoda y Estrella, conectadas con el currículo chileno, para ir ejemplificando un tipo de actividad escolar. No sólo hablan al profesor chileno, sino a un docente que hace matemáticas en Primaria en un contexto de habla castellana. Se centra en aspectos que necesita el profesor del Primer Ciclo de Educación Básica. Por ejemplo, el reconocimiento de estructuras matemáticas iniciales, y procesos matemáticos complejos. En este sentido sirve tanto de actualización profesional de docentes que llevan tiempo en la profesión, como de apoyo a docentes más jóvenes que quizás han sido formados en planteamientos de la Didáctica de la Matemática. En el libro se puede ver como los diferentes autores combinan dos tradiciones de la reflexión educativa sobre las matemáticas escolares: los valores de la reflexión de la Didáctica Francesa, que basa sus planteamientos en la fundamentación epistémica de las ideas matemáticas, con la mirada fuerte en lo curricular presente en los escritos más sistémicos de propuestas de investigadores norteamericanos. Las referencias incluidas son actuales, y la gran mayoría son accesibles por medios electrónicos.

En un momento en que el profesor de aula busca soluciones que le permitan enfocar mejoras en su práctica, este volumen seguro que contribuirá a pensar que no se pueden proponer buenas tareas escolares sin una buena fundamentación reflexiva sobre el diseño de las mismas.

En este volumen se introducen algunos temas matemáticos que no habían sido abordados en un volumen anterior, como las fracciones, la probabilidad, la medida como visualización geométrica, la variabilidad usando patrones, entre otras. También se incluyen reflexiones más generales asociadas a la gestión de aula, como el uso de la pizarra. Se abordan procesos matemáticos y su enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta los objetos matemáticos, lo que incluye estrategias, recursos didácticos y características del aprendizaje que fomentan el pensamiento matemático.

Es importante felicitar a los editores, que han cuidado la edición de este libro, que complementa el Tomo I con nuevas aportaciones a los temas curriculares. Y hace del conjunto de la obra un documento importante para los docentes en ejercicio. La invitación es a leer, usar e investigar con sus estudiantes a partir de las ideas que aquí se describen. Y sobre todo, a aprender como docentes a enriquecer la propia práctica, incorporando y contrastando estos nuevos planteamientos. En efecto, la labor del profesorado no termina en una "buena clase", sino en una buena reflexión que hace que su nueva clase sea mejor que la anterior. Si esto se logra, se contribuirá a formar ciudadanos competentes en matemáticas.

Ha sido un placer escribir esta presentación desde una perspectiva colaborativa internacional. Espero que este libro contribuya al desarrollo de la matemática escolar chilena y en consecuencia promueva un mejor desempeño de los niños y niñas chilenos. Estimados lectores, participen en esta aventura de reflexión y compartan la felicidad de hacer unas buenas matemáticas desde la Educación Primaria.

Joaquín Giménez
Universidad de Barcelona

Uso de la pizarra como un instrumento profesional docente para el desarrollo del pensamiento matemático

SERGIO MORALES
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

RODRIGO SALINAS-AHUMADA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

La pizarra es uno de los objetos más representativos de la sala de clases, desde la escuela a la universidad. Este objeto, que desde su rol de estudiante le permitió comprender de mejor manera aquello que el docente buscaba enseñar, hoy, en su rol de profesor, puede permitir generar mayores oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes.

No obstante, no se trata de un instrumento contemporáneo. A lo largo de la historia, la pizarra ha sido una fuente de comunicación y registro de ideas que se ha presentado de diferentes maneras, variando en su forma, en los materiales que la componen, y en el rol que desempeña en un determinado contexto. Así, de ser concebida como una pared en una caverna, en la edad de piedra (ver Figura 1), o un trozo de piedra en las primeras civilizaciones, evolucionó hasta llegar a las pizarras tradicionales de madera, a tiza o plumón, que es posible encontrar hoy en la mayoría de las salas de clases del mundo en sus distintas variedades de tamaño.

Otra variedad de pizarra presente en la actualidad es la pizarra digital o pizarra interactiva, cuyo estudio y análisis será un tema a desarrollar por otros autores. Este capítulo se adentra de manera exclusiva en el estudio y reflexión acerca de cómo hacer un uso profesional de la pizarra tradicional, presente, en la mayoría de las salas de clases del mundo.

Figura 1. Representaciones registradas en cavernas de la prehistoria. Valeria Perasso

Para iniciar al docente en el uso profesional de la pizarra es recomendable reflexionar en torno a las siguientes preguntas, en su rol de profesor ¿ha utilizado todo el potencial de su pizarra para enseñar matemática a los estudiantes?, ¿es la pizarra, para usted, un instrumento profesional, así como lo es una guitarra en manos de un guitarrista profesional?, de ser un instrumento profesional del docente ¿Posee un conocimiento acerca de su uso que es propio y exclusivo de su profesión?

Mediante las siguientes secciones, se busca adentrarse en las profundidades de este tema, reflexionando acerca del uso que tradicionalmente se le ha dado a la pizarra y el uso profesional que podría llegar a alcanzar, por tanto, el objetivo central de este capítulo es reconceptualizar la pizarra tradicional como un objeto profesional cuyo uso exige conocimientos y destrezas exclusivas de la profesión docente.

USO DE LA PIZARRA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA

Para nadie es desconocido que la pizarra es utilizada como un medio para gestionar la enseñanza en aula y permitir al estudiante interactuar con la matemática de la clase.

Durante la clase, son plasmados una serie de registros que permiten al estudiante acceder al conocimiento matemático del docente y, a veces, al conocimiento de sus compañeros y compañeras. Generalmente, se trata de registros de actividades de aprendizaje, de representaciones de los conceptos matemáticos, y en algunas ocasiones, también de ideas matemáticas del docente y de los estudiantes.

Para los estudiantes, el contenido de la pizarra define aquello que se debe estudiar, pues su contenido generalmente es traspasado al cuaderno, por los mismos estudiantes, para luego ser estudiado en sus casas. Este proceso de traspaso de los contenidos de la pizarra al cuaderno conlleva un proceso de transposición dirigido por el estudiante al reescribir y reorganizar el contenido de la pizarra en su cuaderno, generando con ello una diferencia de significado entre lo que busca comunicar el docente con los registros de la pizarra y lo que evocan los registros del cuaderno en el estudiante.

Dominar el uso de la pizarra con el objetivo de maximizar su potencial formativo, ya sea en la gestión de la clase o en el proceso de traspaso al cuaderno, requiere un conocimiento matemático, didáctico y pedagógico profundo acerca del tema del que trata la clase. Por ejemplo, Isoda y Olfos (2009) se refieren a lo expuesto anteriormente, y recomiendan a quien implementa una clase, ser sistemático con el uso de la pizarra, ya que esta sirve para que los niños y niñas aprendan y reconozcan visualmente los temas trabajados durante la clase.

En los apartados siguientes, se busca construir conocimientos acerca del uso profesional de la pizarra, profundizando en el empleo sistemático de esta para favorecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

USO TRADICIONAL DE LA PIZARRA

Para conocer el uso tradicional dado por los estudiantes a la pizarra, basta considerar la experiencia del docente, en su rol de estudiante de enseñanza básica, media, o incluso de educación superior, por ejemplo, a modo de anécdota podrá recordar frases como "¡nooo, profesor no borre!", "¡todavía nooo…, borre sólo la parte del medio!". Frases como estas, de seguro, le sumergen en las incontables aventuras y travesías que experimentó junto a sus compañeros para "copiar" de la pizarra al cuaderno todo lo que el profesor pasó en la clase y así llegar victorioso a su casa. En la actualidad, aún es posible encontrar clases donde la mayor cantidad del tiempo es destinado a la escritura de los apuntes del profesor, en desmedro del tiempo de resolución de tareas matemáticas, o del tiempo asignado a la discusión y reflexión entre los estudiantes acerca de ideas matemáticas.

Desde el punto de vista del profesor, la pizarra ha sido empleada con distintos objetivos, ya sea como un recurso para registrar el contenido que los estudiantes deben anotar en sus cuadernos, un medio para evaluar los avances de los estudiantes, o un objeto que despierta el interés de los estudiantes por registrar sus ideas matemáticas para compartirlas con el curso.

A pesar de lo familiar e interesante que pueden resultar los usos de la pizarra descritos, estos no difieren del uso que le puede dar, por ejemplo, un ingeniero agrónomo que dicta una clase acerca del monocultivo de tomates en hogares chilenos. Es decir, que, en los usos presentados, no se vislumbra una diferencia importante entre el potencial formativo que alcanza la pizarra al ser utilizada por un profesor o un ingeniero agrónomo que dicta una clase.

USO PROFESIONAL DE LA PIZARRA

El auge de las TIC en la enseñanza de la matemática y los avances tecnológicos en este ámbito, como la aparición de la pizarra digital, llevan a pensar en la necesidad de discutir acerca la pertinencia de la pizarra tradicional en la escuela. No obstante, lo cotidiano en las aulas no son precisamente las tecnologías (Bravo, 2004), por ello, este capítulo busca ir más allá, al centrar la discusión no en la conveniencia de reemplazar la pizarra tradicional, como objeto físico, por una pizarra digital, sino que más bien, en reconceptualizar la pizarra tradicional como un objeto profesional conceptual, cuyo uso exige conocimientos y destrezas exclusivas de la profesión docente.

El valor de la pizarra para los procesos de construcción de conocimiento es incuestionable, pues como indica Yoshida (2005), su potencial radica en que su uso puede tener un efecto profundo en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, explotar ese potencial, demanda en el docente un conocimiento profundo de la matemática, del aprendizaje y de la enseñanza de esta, así como también un conocimiento acerca de los estudiantes y del contexto que los rodea.

Una actividad documentada, que ha permitido a los profesores alcanzar un conocimiento y dominio profesional de la pizarra es el Estudio de Clases (Isoda y Olfos, 2009; Morales, Chamorro, Zúñiga, Vargas y Estay, 2016; Olfos, Isoda y Estrella, 2020), que por décadas ha permitido a los profesores japoneses pulir sus conocimientos y destrezas profesionales, entre ellas, el uso de la pizarra, principalmente, con el objetivo de desarrollar el pensamiento matemático de sus estudiantes. En este contexto, emerge una valiosa regla autoimpuesta por los docentes que practican el Estudio de Clases, que se refiere a la imposibilidad de borrar la pizarra durante la implementación de sus clases. Esta consideración demanda el uso profesional de la pizarra al exigir al profesor la construcción de pizarras que contengan sólo aquellos aspectos que son claves para el aprendizaje de los estudiantes. Aquellos docentes que alcanzan este uso profesional de la pizarra son capaces de plasmar en ella su clase, tal cual como se llevó a cabo, registrando, por ejemplo, los momentos de la clase, las actividades de aprendizaje, las producciones de los estudiantes en cada momento, los aprendizajes alcanzados, los pensamientos matemáticos puestos en juego durante la implementación, entre otras cosas.

Una pizarra profesional es una obra magistral que permite a quien ingresa al término de una clase, comprender cada aspecto de la clase implementada, desde qué actividades de aprendizaje se plantearon, cómo reaccionaron los estudiantes ante ellas, qué pensamiento matemático manifestaron los estudiantes, cómo evolucionó la comprensión matemática durante el transcurso de la clase, qué aprendizajes se alcanzaron, cómo se construyeron dichos aprendizajes, qué dificultades emergieron y cómo fueron abordadas, entre otras cosas.

USOS DE LA PIZARRA COMO INSTRUMENTO PROFESIONAL PARA LA ENSEÑANZA

Además de cumplir un rol clave en el desarrollo del pensamiento y la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes, la pizarra cumple una serie de funciones asociadas a la labor profesional del docente. Takahashi (2009) se refiere a lo anterior, y en miras a posicionarla como un instrumento profesional, describe las principales funciones que los profesores deben dar a la pizarra durante las clases de matemática. Estas son:

a. Mantener un registro de la lección: Incluye el registro de todos los momentos de la clase, incluyendo el objetivo, el problema central de la clase, las principales preguntas, resultados de las discusiones de los estudiantes, diversas soluciones y estrategias asociadas al problema. Yoshida (2005), menciona que se deben destacar las principales ideas matemáticas.

b. Ser un documento de consulta durante la clase: Se refiere a plasmar en la pizarra registros claves que permitan a los estudiantes recordar qué deben hacer en la clase y a su vez obtener lo necesario para promover el trabajo independiente. Por ejemplo, para dar autonomía a los estudiantes, se recomienda dejar un registro explícito de los conocimientos previos activados al inicio de la clase que son necesarios para la resolución del problema, esto incluye tarea de activación de conocimientos, conceptos activados, procedimientos, entre otros. De esta manera se promueve que los estudiantes aprendan a aprender y a orientarse por sí mismos y a sus compañeros durante el proceso de resolución del problema de la clase.
c. Reflejar la implementación completa de la clase: Una pizarra bien organizada da cuenta de la coherencia y la conexión entre los distintos momentos de la clase y ayuda a observar la manera en que progresan los aprendizajes durante la implementación. Al finalizar la clase, los estudiantes deben ser capaces de observar en la pizarra las conexiones lógicas entre cada uno de los momentos de la clase, el progreso de esta desde la activación de conocimientos previos hasta la institucionalización de los nuevos conceptos matemáticos, incorporando también ideas propias de los estudiantes, como las plasmadas en las distintas estrategias de resolución generadas por ellos. Es decir, una pizarra profesional demanda cognitivamente al docente, pues le exige no borrarla durante la implementación rescatando lo esencial de la clase, como actividades de aprendizaje, las intervenciones de los estudiantes, las estrategias de resolución, el pensamiento matemático de los estudiantes y su evolución, entre otros aspectos.
d. Permite el contraste y discusión de las ideas presentadas por los estudiantes: La pizarra es un lugar ideal para plasmar y discutir las distintas ideas y estrategias presentadas. Yoshida (2005), menciona que a través de estas discusiones plasmadas en la pizarra los estudiantes pueden compartir ideas matemáticas y reconocer similitudes, diferencias, ventajas y desventajas entre una estrategia y otra, permitiendo así que los estudiantes desarrollen nuevas comprensiones a partir del estudio de las ideas de otros estudiantes.
e. Gestionar el descubrimiento de nuevas ideas de los estudiantes: Yoshida (2005) menciona que la pizarra permite compartir la manera de manipular los materiales de la clase, y de esta forma ayudar a organizar el pensamiento de los estudiantes y a descubrir nuevas ideas. Un ejemplo, puede ser categorizar, mover en distintas direcciones u ordenar el material de la sesión, esto para que los estudiantes piensen, descubran y discutan nuevas ideas en conjunto con sus pares.

f. Fomentar el desarrollo de habilidades para el registro en el cuaderno: La estructura de la pizarra puede ser un buen modelo para que nuestros estudiantes tomen nota de la clase en su cuaderno. Yoshida (2005), menciona que para los estudiantes no es intuitiva la toma de apuntes, por lo que es de suma importancia dar un buen ejemplo sobre cómo hacerlo a través de la pizarra. Este punto requiere que el profesor considere en el diseño de su pizarra aspectos como las dimensiones del cuaderno de sus estudiantes y que dé orientaciones explícitas acerca de cómo traspasar los registros de la pizarra al cuaderno.

CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO Y LA GESTIÓN PROFESIONAL DE LA PIZARRA

Zaldívar y Bispo (2008) indican que trabajar correctamente con la pizarra como medio de enseñanza, requiere una preparación específica por parte de los profesores, además, agrega que para implementar la clase el profesor debe planificar lo que escribirá en la pizarra teniendo en consideración que los registros serán llevados al cuaderno de los estudiantes. Por otro lado, Bravo (2004) menciona que una adecuada planificación de la pizarra permitirá hacer de ella un medio de aprendizaje más eficaz.

El diseño de la pizarra requiere tener en cuenta, por lo menos dos factores claves, por un lado, la longitud de la pizarra que se tiene en la sala de clases, y por otro, el estilo de clase que pretende implementar. Estos factores influyen en las características de la pizarra a diseñar, en otras palabras, el diseño de la pizarra no está preestablecido, sino que más bien se trata de una construcción profesional del docente, en función de las características del aula, de sus estudiantes y de las características de la clase que planifica. De esta manera, aquellos profesores que cuentan con pizarras cuyas dimensiones sean inferiores al promedio, pueden considerar un papelógrafo o una proyección con data show como una extensión de su pizarra por la izquierda o por la derecha.

Un error común relacionado con la extensión de la pizarra mediante un data show es proyectar sobre la pizarra, ya que esto interfiere con el uso de la misma, pues limita considerablemente el área que se dispone para trabajar.

A continuación, se presenta una propuesta de organización de pizarra para un estilo de clase que apunta a la construcción de conocimiento, es decir, una clase basada en el Enfoque de Resolución de Problemas (Isoda y Olfos, 2009).

DISEÑO PROFESIONAL DE LA PIZARRA

Parte importante del diseño profesional de una pizarra es dar cuenta de una estructura que permita reconocer y plasmar en ella todos los momentos de la clase. Una idea para abordar este punto es dividir la pizarra en columnas, y asociar a cada una de ellas un momento de la clase.

La Figura 2 muestra una propuesta concreta para estructurar una pizarra bajo el Enfoque de resolución de Problemas, en tres grandes momentos: inicio, desarrollo y cierre de la clase. Emplear esta estructura con sus respectivos elementos permite transformar la pizarra en un recurso de aprendizaje que da cuenta del proceso de evolución del pensamiento matemático de los estudiantes en el transcurso de la clase.

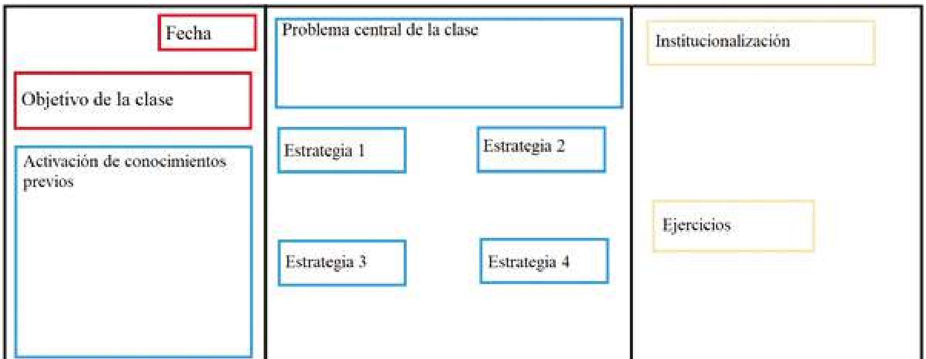


Figura 2. Registro de elementos claves de una pizarra de tres columnas que responde a los momentos de la clase

Además de los tres momentos de la clase, es posible observar en la Figura 2 una serie de elementos que los componen. A continuación, se profundiza en cada uno de ellos.

INICIO DE LA CLASE

Se trata del momento inaugural de la clase, en este momento deben quedar registrados elementos como la fecha, la tarea de activación de conocimientos previos y los conocimientos previos activados por los estudiantes y que son necesarios para abordar el problema de la clase.

a. La fecha: con ella, los estudiantes pueden ubicarse temporalmente en el calendario, esto apoya la orientación del estudio para identificar las clases en sus cuadernos, o bien, para compartir o comparar sus registros con algún compañero.
b. El objetivo de la clase: Orienta a cada estudiante en el aprendizaje que se espera que alcance al final de la clase o sobre qué se espera de él durante el desarrollo de esta. El objetivo, debe dar cuenta de las actitudes y habilidades que se espera generar durante la implementación.

c. La activación de conocimientos previos: En este punto se requiere el registro de la actividad junto a las respuestas de algunos estudiantes, manifestándose por medio de ellas el conocimiento necesario para comenzar la siguiente etapa de la sesión. Es importante destacar que esta etapa no trata de un resumen o de un recordatorio sobre lo estudiado en clases anteriores, sino que trata de activar aquellos conocimientos de los estudiantes que son necesarios para resolver el problema de la clase, o bien para construir un nuevo conocimiento.

DESARROLLO DE LA SESIÓN

Una vez terminado el registro de la activación de conocimientos previos, se da comienzo al desarrollo de la clase, en donde es necesario registrar el problema o tarea central de la clase junto con algunas estrategias de resolución elegidas por quien implementa la actividad de aprendizaje.

a. El problema: Es una situación de aprendizaje que exige que los estudiantes construyan un nuevo conocimiento, ya que no es posible resolver el problema de forma directa con los conocimientos previos de los que se dispone. Según Isoda y Olfos (2009), un buen problema para la clase es aquel que es accesible a la mayoría de los estudiantes, por ende, son buenos aquellos problemas que admiten variadas estrategias para resolverlos. Se recomienda registrar el problema en la parte central de la pizarra, o más bien, en una posición que permita hacer que los estudiantes comprendan que la clase se orienta a la resolución de dicho problema.
b. Registro de estrategias de resolución: Tal como menciona Yoshida (2005), la pizarra es un lugar para plasmar, discutir y llegar a acuerdos respecto a las distintas estrategias que emergieron durante la clase para desarrollar el problema. Por esta razón es que se recomienda que las estrategias a registrar en la pizarra sirvan para aportar a la discusión de la clase en coherencia con el objetivo definido. Un punto importante es que los registros de las estrategias permitan comprender el pensamiento matemático puesto en juego por el estudiante.

CIERRE DE LA CLASE

Dentro de los aspectos claves que se recomienda registrar en este momento de clase se encuentra el resumen de la clase y una sección de ejercicios. Los registros de este momento de la clase deben evidenciar los conocimientos alcanzados por los estudiantes en coherencia con los registros de los momentos anteriores, incluyendo el objetivo de la clase.

a. Resumen: En este momento se sintetizan los aprendizajes obtenidos por los estudiantes a partir de las estrategias planteadas por ellos en el momento anterior. Es importante que los registros permitan apreciar la coherencia entre el objetivo de la clase, el problema, las estrategias y este resumen de la clase. En este momento es posible definir explícitamente nuevos conceptos en función de lo desarrollado en la clase.

b. Sección de ejercicios: Posterior al resumen de la clase, es posible plantear ejercicios para que los estudiantes pongan en práctica lo aprendido durante la sesión. Estos ejercicios deben quedar registrados en la pizarra acompañados de la resolución generada por los estudiantes.

GESTIÓN DE LA PIZARRA EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LA CLASE

Si bien, la estructura predeterminada de la pizarra es un aspecto clave para su uso profesional, no es un factor determinante. Su construcción durante la implementación de la clase requiere de parte del profesor, habilidades específicas para la gestión de la enseñanza, asociadas a conocimientos matemáticos y didácticos profundos en relación a la temática de la clase, así como también, a habilidades para identificar y registrar los aspectos esenciales y claves para el desarrollo del pensamiento matemático sin tener la necesidad de borrar la pizarra. La gestión de la pizarra exige además un conocimiento acerca de los momentos de la clase y del rol que juegan en ellos, tanto el docente como los estudiantes. La Figura 3 da algunas orientaciones para la gestión de la pizarra.

A continuación, se profundiza en cada momento de la clase desde el ángulo de la gestión de la clase.

INICIO DE LA CLASE

Se recomienda una duración aproximada de 10 minutos para este momento de la clase, el cual tiene por propósito central, activar y registrar los conocimientos previos de los estudiantes. Es decir, que la tarea del docente le exige activar, identificar y registrar aquellos conocimientos previos que manifiestan los estudiantes y que son necesarios para abordar el problema central. No se trata de registrar el nombre de los conocimientos activados por los estudiantes, sino que de registrar estrategias de resolución claves donde se manifieste la activación de conocimientos previos, con énfasis en el uso de representaciones matemáticas formales o informales por parte de los estudiantes. Este momento es también una instancia de evaluación y de aprendizaje.

Un punto importante a destacar de esta etapa es que no se trata de un resumen o de un recordatorio sobre lo estudiado en clases anteriores, sino que de activar aquellos conocimientos de los estudiantes que son necesarios para resolver el problema de la clase y construir un nuevo conocimiento.

Por último, un elemento útil de anotar en este momento es la fecha, la cual, al registrarse al inicio de la clase puede ser utilizada como un registro que informa a los estudiantes que la clase está por comenzar.

DESARROLLO DE LA CLASE

Se recomienda una duración aproximada de 20 minutos. Este momento incluye, la presentación del problema de la clase, la resolución del problema por parte de los estudiantes y la presentación de las estrategias de resolución en la pizarra.

En este momento de la clase el profesor juega distintos roles.

a. Presenta y registra el problema central de la clase, donde debe resguardar que los estudiantes se interesen por él y comprendan cuál es la tarea matemática que tiene asociada. Esta instancia requiere que el profesor evalúe la comprensión de los estudiantes acerca del problema.
b. Mientras los estudiantes resuelven el problema de la clase, el docente asume un rol de investigador. Por ende, debe estudiar las estrategias que desarrollan sus estudiantes; esto último es un aspecto clave de su tarea profesional, pues en este momento de la clase debe identificar y seleccionar aquellas estrategias que se presentarán y registrarán en la pizarra para generar mayores oportunidades de aprendizaje para el curso. Durante este momento, el docente orienta a los estudiantes acerca de cómo mejorar sus representaciones para que así den cuenta de la idea matemática que buscan transmitir.
c. Una vez identificadas las estrategias que serán registradas en la pizarra, el docente invita a sus autores a presentarlas frente al curso y a registrarlas en la pizarra. En este punto, la tarea central del profesor es promover las habilidades de argumentación y representación, así como también, la reflexión en torno a las ideas matemáticas representadas en las distintas estrategias registradas en la pizarra. Takahashi (2009), menciona que, al momento de compartir las estrategias de resolución, no sólo es importante que las justifiquen, sino que también es de suma importancia examinar las limitaciones de cada una de ellas. Un aspecto clave en este proceso, es orientar la discusión y reflexión en coherencia con el objetivo de la clase.

CIERRE DE LA CLASE

En este momento de la clase, la tarea central del profesor es, además de evaluar los aprendizajes alcanzados en relación con el objetivo de la clase, institucionalizar los aspectos matemáticos que fueron alcanzados y manifestados en las estrategias de resolución de los estudiantes.

Para institucionalizar el contenido matemático se recomienda analizar en conjunto con los estudiantes, los aspectos claves de la discusión sostenida en el momento de presentación y análisis de las estrategias de resolución. Es decir, que la tarea docente consiste en definir y formalizar los conceptos matemáticos construidos en la clase, no obstante, es importante dar la oportunidad a los estudiantes de manifestar dichos conocimientos, y así, institucionalizar desde los conocimientos adquiridos por los estudiantes en coherencia con el objetivo, y no desde aquello que el profesor busca obtener como aprendizaje. En algunos casos, también se recomienda plantear ejercicios para movilizar los conocimientos adquiridos, lo cual también puede ser comprendido como una instancia de evaluación.

UNA PROPUESTA DE PIZARRA DESDE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES: USO DE LA PIZARRA PARA GENERAR OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS PARA EL USO PROFESIONAL DE LA PIZARRA

Una característica de la matemática es su alfabetización universal, pues, dispone de un conjunto de símbolos que hacen posible acceder a los conceptos matemáticos y comunicar ideas matemáticas a otros.

El uso de símbolos en la enseñanza básica resulta fundamental, pues permite a los estudiantes conceptualizar los distintos temas declarados en las bases curriculares y desarrollar su pensamiento matemático. El uso de representaciones simbólicas requiere que el estudiante alcance un cierto nivel de abstracción, ante lo cual el currículum nacional recomienda promover en el estudio de la matemática el uso y tránsito desde las representaciones concretas a las representaciones pictóricas y finalmente las simbólicas. El enfoque de representaciones dado por COPISI busca promover en los estudiantes la comprensión profunda de la matemática curricular (MINEDUC, 2012).

Otras representaciones empleadas en la pizarra, son denominadas en este capítulo como representaciones auxiliares. Estas representaciones no son representaciones concretas, pictóricas ni simbólicas en el sentido de COPISI, sino que más bien son representaciones complementarias (como una flecha, un color, óvalos para encerrar algo, entre otras) que sirven para robustecer las estrategias de resolución y fortalecer la representación de las ideas matemáticas ejecutadas por un estudiante o un profesor en el proceso de representación matemática.

Un último aspecto a tener en cuenta se refiere a la mezcla de símbolos pertenecientes a distintos dominios de representación, pues puede traer errores de conceptualización en matemática. Por ejemplo, consideremos la expresión “4 + 2 = 6 manzanas”, en ella podemos ver representaciones simbólicas formales “4 + 2 = 6” mezcladas con representaciones asociadas al lenguaje natural “manzanas”, lo mismo ocurre en la expresión “dos manzanas + dos manzanas = 4 manzanas”.

UN DISEÑO DE PIZARRA PROFESIONAL DESDE LA FORMACIÓN INICIAL

A continuación, se puede observar una planificación de pizarra (Figura 3), asociada a la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación en segundo básico.

Esta propuesta fue diseñada por estudiantes universitarias al término de un curso de primer año de Pedagogía en Educación Básica en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. En este curso se utiliza el diseño profesional de pizarras como una estrategia de desarrollo profesional, en cuanto a la construcción de conocimientos matemáticos y didácticos asociados a la enseñanza del número, así como también, para promover la construcción de teorías implícitas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se trata de una estrategia que ha mostrado fomentar mayor articulación entre teoría y práctica, que otras estrategias empleadas en el mismo curso en años anteriores.

Figura 3. Propuesta de Pizarra para una clase de multiplicación diseñada por Sofía González, Sofía Contardo, Tamara Pávez, Laura Garrido y Monserrat Toledo.

A continuación, se puede encontrar un breve análisis de esta propuesta.

ANÁLISIS GENERAL DE LA PROPUESTA DE PIZARRA

En términos estructurales, se observa una propuesta de pizarra de 3 columnas que se corresponden con los momentos de inicio, desarrollo y cierre. En ellos se observa componentes de cada momento de la clase: a) Objetivo, b) activación de conocimientos previos, c) el problema de la clase, d) Presentación de estrategias de resolución, e) resumen de la clase y f) la ejercitación.

Un aspecto interesante de la propuesta, es que, además de permitir reconocer completamente la propuesta de enseñanza ideada por las profesoras en formación, ayuda a comprender con anterioridad, desde una diversidad de representaciones, la manera en que los estudiantes podrían imaginar y comunicar los procesos de resolución experimentados, así como también las conclusiones obtenidas en la clase, en relación con el objetivo propuesto.

ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DE PIZARRA SEGÚN LOS MOMENTOS DE LA CLASE

a. Inicio de la Clase

Corresponde a la primera columna de la pizarra (Figura 4). Se observa que los elementos centrales están destacados de un color distinto al resto de registros, lo que permite al estudiante identificarlos fácilmente y reconocerlos como elementos distintivos de la clase.

Figura 4. Momento de activación de conocimientos previos.

La estrategia de activación de conocimientos previos, plantea una tarea matemática en contexto, lo que permite al estudiante entender la matemática en interacción con la realidad. La imagen, por su lado, muestra un ámbito numérico acorde al nivel para el que fue diseñada la pizarra; sin embargo, la redacción de la tarea no es lo suficientemente clara, pues no explicita qué es finalmente lo que se debe expresar como suma iterada. Una posible reestructuración de la situación planteado sería “Exprese la cantidad de manzanas presentes en la siguiente situación con sumas iteradas”.

También se observa con claridad el registro de tres posibles estrategias de resolución en respuesta a la activación de conocimientos previos, las cuales son rotuladas con el nombre los estudiantes que las elaboraron (los nombres empleados son ejemplos). La selección de dichas estrategias permite que el curso active correctamente conocimientos previos acerca de distintas representaciones, en el sentido de COPISI, en relación con la suma iterada. En estos casos, se puede observar el uso de representaciones auxiliares como flechas que indican el cambio entre un estado inicial y un estado final.

b. Presentación del Problema

De los elementos distintivos de la pizarra que se observan en el desarrollo de la clase (Figura 5) se tiene: el problema de la clase y las estrategias de resolución. Al igual que en el caso anterior estos momentos se identifican por títulos de un color exclusivo para ellos.

Figura 5. Momento de desarrollo.

El problema de la clase, al igual que la situación de activación de conocimientos previos, posee un contexto cercano a la imaginación de los estudiantes y una imagen que contiene aspectos claves de la tarea matemática, en este caso la cantidad de balones y la manera en que están organizados en el estante.

El contexto de la tarea centra la atención en la cantidad de balones, no obstante, al plantear la tarea focaliza la atención de los estudiantes en el análisis con el objetivo de determinar un mecanismo rápido para encontrar la respuesta.

Un aspecto a mejorar de la situación se refiere al uso de la palabra “contar” pues, puede llegar a incentivar el uso de la estrategia de conteo por sobre estrategias asociadas a la suma iterada declarada en el objetivo de la clase. Una posible manera de presentar la situación y definir la tarea sería “Se necesita saber cuántos balones hay en el estante ¿Cuál es la forma más rápida de encontrar el total de balones en el estante?”

Con respecto a las estrategias de resolución seleccionadas para presentar a toda la clase, se observa que, si bien la respuesta en todos los casos es la misma, estas hacen uso de distintas representaciones, lo que a su vez evidencia el potencial del problema en término de dar la posibilidad de abordarlo desde distintas perspectivas y generando con ello mayores oportunidades para comprender la multiplicación como suma iterada de números naturales.

Otro de los aspectos a destacar de esta pizarra es la representación de las estrategias, por ejemplo, solo basta con observar la estrategia de Andrea para reconocer la estrategia de conteo empleada, incluso, gracias a las representaciones auxiliares empleadas ("/" y símbolos numéricos) es posible determinar con precisión, que en este caso se muestra como una ruta organizada y eficiente. La estrategia de Juan por su lado, también considera aspectos relevantes, por ejemplo, utiliza el color como una variable que influye en la comprensión matemática, ya que permite conectar un conjunto con su respectivo cardinal, orientando así la manera de relacionar la representación simbólica con la representación pictórica; y a su vez, hace uso de perímetros para representar sub conjuntos asociados a la suma iterada de la composición del 10.

c. Cierre de la clase

Está compuesto por una conclusión y una sección de ejercitación (Figura 6). Al momento de concluir, se institucionaliza la multiplicación haciendo uso de los registros previos de la pizarra, en el sentido dado por Isoda y Estrella (2019), quienes se refieren a ella como la operación que permite calcular el total cuando hay el mismo número de objetos por grupo y conoces la cantidad de grupos. Por tanto, se busca que los estudiantes lean la expresión "5×2=10" como cinco multiplicado por dos es igual a diez, en relación con la comprensión conceptual de multiplicando y multiplicador, que también permite interpretar la expresión como el número cinco dos veces. Es decir, que el multiplicando define la cardinalidad de cada conjunto y el multiplicador define el número de conjuntos que se están considerando en la operación.

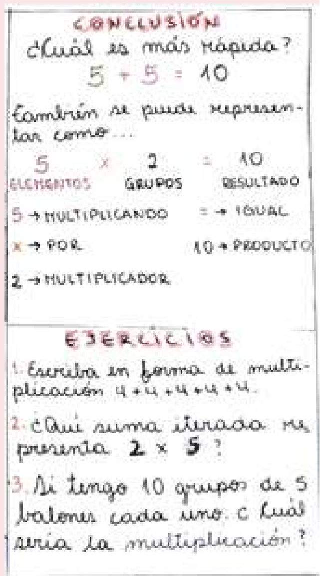


Figura 6. Momento de cierre.

Por otro lado, se observa que la conclusión se hace en coherencia con el momento anterior, pues, se registra y desarrolla la pregunta "¿cuál es la más rápida?" haciendo referencia a las estrategias para resolver el problema; donde se explicita utilizando representaciones simbólicas la relación entre "5+5=10" y "5×2=10", indicando, además, los elementos conceptuales que componen la multiplicación (multiplicando, multiplicador y producto).

Un punto interesante a destacar es que la coherencia entre la representación simbólica de multiplicación y los elementos conceptuales que la componen se mantiene no solo en este momento de la clase, sino que también en el momento anterior.

Finalmente, se plantean ejercicios que permiten a los estudiantes poner en juego lo aprendido durante la clase. Al analizar cada tarea planteada en la sección de ejercitación se puede observar su coherencia tanto con el objetivo de la clase como con lo trabajado durante su implementación. Esta instancia, también permite evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

REFLEXIONES FINALES

Como se observa en este capítulo, el uso profesional de la pizarra para el desarrollo del pensamiento matemático requiere el dominio de una serie de conocimientos y destrezas profesionales específicas del profesor. No obstante, dominar estos conocimientos y destrezas permitirán al docente no solo dominar la pizarra en términos de un soporte para gestionar la clase promoviendo un aprendizaje matemático profundo, además podrá ser capaz de diseñar a priori una pizarra con las características de la pizarra compartida en el punto 4. Por otro lado, el uso profesional de la pizarra también considera conceptualizarla como un recurso para investigar cómo mejorar la enseñanza de la matemática en el aula y cómo orientar a los estudiantes para que aprendan a aprender a partir de sus conocimientos previos y del trabajo colaborativo.

Para finalizar, es importante recordar, en primer lugar, el desafío de no borrar la pizarra durante la clase, esta acción se transformará en una oportunidad de aprendizaje tanto para el o la docente como para los estudiantes; y en segundo lugar, es relevante tener en cuenta que una pizarra es un instrumento profesional que debe responder a las características de su contexto, a las características de su escuela, de su clase, de sus estudiantes, entre otras, por lo tanto, la invitación planteada en este capítulo es que cada docente diseñe, en función de sus necesidades y el estilo de clase que implemente, sus propias estructuras de pizarra. Por último, haga de su pizarra una obra magistral, de tal manera, que poco a poco consiga que la pizarra generada en la clase sea más cercana a la pizarra planificada.

REFERENCIAS

Bravo, J. (2004). Los medios de enseñanza: Clasificación, selección y aplicación. Pixel-Bit. *Revista de Medios y Educación, (24)*, 113-124. ISSN: 1133-8482. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/368/36802409.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020). *Sumo Primero: libro del Estudiante, 3° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/ProblemSolvingIsodaOlfos.pdf

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares. Primero a Sexto Básico*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-177735_archivo_01.pdf.

Morales, S., Chamorro, P., Zúñiga, F., Vargas, E., y Estay, E. (2016). Grupo Estudio de Clases INSUCO: Una propuesta de desarrollo profesional docente desde la escuela. En I. Cortés, y C. Hirmas (Ed.), *Experiencias de innovación educativa en la formación práctica de carreras de pedagogía en Chile* (pp. 153-177). Santiago, Chile: OEI. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/14697/

Olfos, R., Isoda, M., y Estrella, S. (2020). Más de una década de Estudio de Clases en Chile: hallazgos y avances. *Paradigma*, 120-221. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Soledad-Estrella/publication/342401496_Mas_de_una_decada_de_Estudio_de_Clases_en_Chile_hallazgos_y_avances/links/5ef29e12458515ceb207e03d/Mas-de-una-decada-de-Estudio-de-Clases-en-Chile-hallazgos-y-avances.pdf

Takahashi, A. (2009). Characteristics of Japanese mathematics lessons. *Colección Digital Eudoxus*, (*18*), 37-44. Recuperado de http://www.human.tsukuba.ac.jp/~mathedu/2504.pdf

Yoshida, M. (2005). Using lesson study to develop effective blackboard practices. In W. Iverson y M. Yoshida (Eds.), *Building our understanding of lesson study* (pp. 93-100). Philadelphia, PA: Research for Better Schools. Recuperado de http://math.crdg.hawaii.edu/modules/01/Data/Module1/Session6/media/s06_p2_yoshida_ch10.pdf

Zaldívar, M., y Rodríguez, Y. (2008). Algunas reflexiones sobre la utilización del pizarrón escolar en su función educativa e instructiva. *Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura* (OEI), *45*(4), 1-6. Recuperado de https://skat.ihmc.us/rid=1HB71VQ52-WNZM39-VP0/2036Carrillo.pdf

Las fracciones en los primeros niveles educativos

ÁLVARO POBLETE
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

RODOLFO MORALES-MERINO
Universidad Católica del Maule

INTRODUCCIÓN

Este capítulo aborda un tema muy relevante en la enseñanza de la Matemática en el primer ciclo de Enseñanza Básica, como son las fracciones. Las fracciones constituyen un aprendizaje fundamental tanto en el contexto curricular, como en el cotidiano. Es sabido que un tratamiento profundo en la enseñanza de las fracciones, desde los primeros niveles educativos, ayuda a consolidar una base sólida de aprendizaje, para trabajar conceptos y procedimientos más complejos en niveles posteriores, tales como: la operatoria con fracciones, el concepto de razón y porcentajes, la resolución de problemas y, en general, lo relacionado con los números racionales y reales.

En el sistema escolar chileno, la enseñanza de las fracciones se inicia en tercer año básico y se profundiza a medida que aumenta el nivel educativo. Por ejemplo, en tercer año básico, se presentan fracciones de uso común en un contexto continuo y discreto. Además, se comparan fracciones con igual denominador. Mientras que, en cuarto año, se introduce la adición y sustracción de fracciones con igual denominador y se abordan las fracciones mayores que la unidad como son las fracciones impropias que dan origen a los números mixtos.

Lo anterior presenta un gran desafío para el docente de primer ciclo de Enseñanza Básica, dado que requiere manejar una variedad de herramientas conceptuales y estrategias didácticas específicas y adecuadas para abordar este contenido matemático.

Por esta razón, en este capítulo se aborda el concepto de fracción con énfasis en sus representaciones y significados. Se hace mención a las propuestas curriculares para tercero y cuarto año básico, explicitando aquello que se espera que los estudiantes aprendan de las fracciones. Además, se muestran estrategias didácticas específicas para la enseñanza de las fracciones, enfatizando en Tareas Matemáticas (en adelante: TM singular, TMs plural) que contribuyen al aprendizaje de las fracciones de una manera significativa y comprensiva. Finalmente, se enfatiza en aquellos errores más frecuentes que manifiestan los estudiantes cuando abordan TMs que involucran fracciones.

EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

La investigación sugiere que desde tiempos remotos, las civilizaciones (p. ej., babilónica, egipcia) se vieron en la necesidad de medir entidades propias de algunas actividades que realizaban, fueran estas de carácter agrícola o comercial. Estas entidades hacían mención a la longitud, la superficie de tierras, el tiempo, el volumen o el peso (masa). Esto derivó en el surgimiento de los números naturales como una herramienta para expresar resultados de esas mediciones y que también favorecieron a aquellas acciones relacionadas con las operaciones que hoy se conocen. De esta manera se concibe a los números naturales como aquellos "que asociados a la acción de medir proporcionan del resultado de ésta, objetos a los que se les puede dar tratamiento matemático" (Castro y Torralbo, 2001, p. 285). Sin embargo, los números naturales fueron insuficientes para abarcar los requerimientos de la medición. Por ejemplo, si se quiere medir la longitud de una cuerda, empleando un trozo de madera de menor longitud que la cuerda y al medirla se obtiene tres trozos de madera y la mitad de otro, entonces, los números naturales no satisfacen el resultado de esta medición. Dado lo anterior, las fracciones sí satisfacen esta necesidad, siendo útiles para medir una parte cualquiera de un todo, tanto en contextos discretos como continuos. De esta manera es como surgen las fracciones, permitiendo la ampliación del ámbito numérico. Las fracciones sirven para comparar dos cantidades de magnitudes y expresar con mayor exactitud la representación de la medida (Castro y Torralbo, 2001).

La noción de fracción, de acuerdo a Juan de Luna en la traducción del libro "Aritmética" de Al Juarismi, se asocia con la palabra fractio, cuyo significado árabe es quebrar o romper, y por su parte, la acción de fraccionar indica romper en partes iguales.

Una fracción se entiende como una representación del número racional y hace mención a un sistema de notación que posee símbolos en la que se destacan dos números naturales, escritos con un segmento de recta horizontal entre ellos ($\frac{a}{b}$), llamados respectivamente numerador (*a*) y denominador (*b*), con b distinto de cero (Carrillo et al., 2016). El denominador (que denomina) indica las partes en que se ha dividido el todo y el numerador indica las partes que se consideran del todo. La expresión $\frac{a}{b}$ hace mención a aquella partición o fracturación de entidades tales como superficies, masas, longitud, entre otros, generando así la expresión "*a* partido en *b*".

Las fracciones como cualquier otro concepto matemático se pueden representar de formas diversas. Estas formas de representación hacen presente dicho concepto, mostrando así sus propiedades y las posibles operaciones y transformaciones a las que se le puede someter. El concepto de fracción se hace presente por medio de la representación: verbal, concreto, gráfico (pictórico) y simbólico. Esta variedad de representaciones ayuda significativamente a su comprensión; según la representación usada, se profundiza en el significado de la fracción que se esté considerando (Castro y Torralbo, 2001). Una enseñanza enfocada en el tránsito de las distintas representaciones de la fracción, hace más profundo y significativo su aprendizaje. A continuación, se muestran ejemplos de representaciones del concepto de fracción.

REPRESENTACIÓN VERBAL

Es aquella representación que sigue ciertas reglas del lenguaje que organizan y condicionan la representación de las fracciones. Algunos ejemplos de la representación verbal de la fracción, son: un medio, dos tercios, tres cuartos, entre otras. En este caso la regla que condiciona su expresión viene dada en el sentido que se nombra, en primer lugar, las partes que se consideran, o se considerarán, (numerador) de la entidad a fraccionar y posteriormente las partes en que se fracciona la entidad (denominador). Por lo general los estudiantes de los primeros niveles educativos tienen algunas nociones informales asociada a las fracciones y utilizan bastante este tipo de representación (p. ej., “la mitad de…”).

REPRESENTACIÓN CONCRETA

Alude a aquellos materiales manipulativos, estructurados y no estructurados, que fomentan el aprendizaje de las fracciones. Entre los estructurados se hallan el muro de Freudenthal, compuesto por franjas de madera, plástico o cartón, que representan fracciones unitarias desde el entero al décimo o doceavo (algunas actividades relacionadas con este material se presentan más adelante). Otras representaciones concretas son aquellas regiones circulares de cartón o plástico divididas entre distintas partes que representa a su respectiva fracción. Mientras que los no estructurados pueden ser algo tan sencillo como una hoja de papel, o fichas de colores, que se puedan manipular y, por lo tanto, representar fracciones. En la figura 1 se muestran las representaciones concretas que se utilizan comúnmente en la enseñanza de las fracciones.

Figura 1. Representación concreta de fracciones

REPRESENTACIÓN GRÁFICA-PICTÓRICA

La representación gráfica de las fracciones, hace alusión a aquellos modelos (o contextos) por los cuales se representa la fracción. En esta se hallan los modelos discretos y modelos continuos. En los primeros se representan las fracciones en un conjunto de objetos, mientras que en los segundos se representan por medio de una recta o semirrecta numérica o un modelo de área. En la Figura 2 se muestra la representación gráfica de la fracción desde el modelo discreto y el modelo continuo.

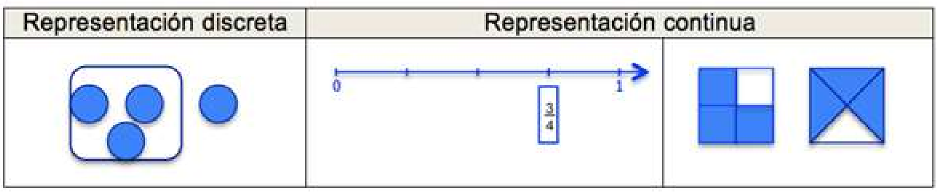


Figura 2. Representación gráfica-pictórica de la fracción $\frac{3}{4}$

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

En esta representación la fracción está organizada por números naturales que están escritos de la siguiente manera $\frac{1}{2}$; donde, tal como ya se ha mencionado, un número (numerador) está sobre otro (denominador) y separados por un segmento de recta horizontal, denominada línea fraccionaria. Los expertos, particularmente lo japoneses, sugieren que cuando se representa una fracción simbólicamente se comience por escribir la raya fraccionaria, posteriormente el denominador, dado que es el número que le da nombre a la fracción y finalmente el numerador. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ evoca a cuartos, lo que quiere decir que el entero o unidad se ha dividido en cuartos.

SIGNIFICADO DE LAS FRACCIONES

Las fracciones conllevan significados diferentes y su comprensión hace que se conozcan aquellas situaciones en que ven involucradas, profundizando así en el aprendizaje de este concepto matemático. A continuación, se detalla cada uno de ellos.

LA FRACCIÓN COMO PARTE-TODO

Este significado está asociado a la idea originaria de la fracción, relativa a una partición de entidades discretas y continuas. Se representa con la expresión $\frac{a}{b}$ que, como se sabe, representa a un todo o unidad que se ha dividido en "*b*" partes (unidades fraccionarias) y se consideran "*a*" de esas partes. Por ejemplo, una hoja de papel que se ha divido en cuatro partes iguales y se consideran tres de ellas, hacen que se forme la fracción $\frac{3}{4}$. En este caso el denominador indica que se ha dividido la unidad en 4 partes, mientras que el numerador indica que se han considerado 3 de esas partes. Esto quiere decir que la fracción $\frac{3}{4}$ es la expresión que indica la acción de separar en cuatro partes y tomar tres (Castro y Torralbo, 2001). En el ejemplo anterior se observa que la unidad de partida es solo una hoja de papel (contexto continuo), aunque también puede ser una unidad compuesta de elementos separados (contexto discreto), como tres fichas rojas de un total de cuatro fichas entre rojas y azules. En la Figura 3, se observa el significado parte-todo de la fracción desde un contexto continuo y discreto.

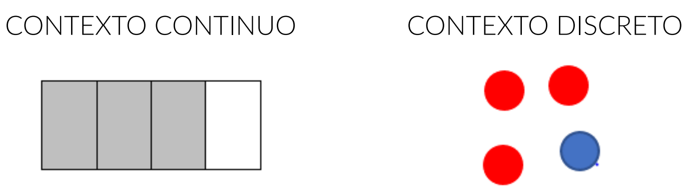


Figura 3. Fracción $\frac{3}{4}$ parte-todo

Este tipo de significado es un punto de partida muy útil para introducir la enseñanza de las fracciones desde los primeros niveles educativos, dado que es el más intuitivo y el más cercano para los estudiantes. Algunas situaciones relacionadas con este significado son aquellas donde los estudiantes dividen en partes iguales la unidad de reparto. Por ejemplo: repartir de forma equitativa un chocolate entre 3 amigos. El chocolate se divide en 3 partes iguales y a cada amigo le corresponde una de esas partes.

La enseñanza de este significado conlleva a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, promoviendo así el estudio de las propiedades de las fracciones, sus relaciones y posteriormente la comprensión en el contexto de la adición y sustracción de fracciones (Carrillo et al., 2016; Castro y Torralbo, 2001).

LAS FRACCIONES COMO COCIENTE

La fracción puede significar el cociente de dos número naturales a entre b, con b distinto de 0 ($\frac{a}{b}$,b≠0). Este significado alude a la condición: “a unidades en b partes iguales”, surgiendo así la noción de reparto en cantidades iguales. Este significado emerge cuando se busca resolver un problema del tipo a = b × x, donde a no es divisible por b, por ejemplo: 3 hermanos quieren repartirse de forma equitativa 4 barras de chocolates ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada hermano?

Este problema sugiere la solución 3 = 4 × x. Por tanto, una forma de resolver esta situación es dividir 3 entre 4, recurriendo así a la expresión $\frac{3}{4}$ como un cociente (o reparto) entre el numerador y denominador. Desde los primeros cursos educativos este problema se puede abordar repartiendo cada chocolate en cuatro trozos de igual tamaño (fracción parte-todo), donde cada trozo de chocolate corresponderá a $\frac{1}{4}$ de cada barra. Posteriormente, se asigna $\frac{1}{4}$ de cada barra de chocolate a cada hermano, y como son tres chocolates cada hermano tocará $\frac{3}{4}$ en total.

LA FRACCIÓN COMO RAZÓN

Cuando hay una relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades, se habla de la fracción como razón. También se le conoce como relación parte con parte (Castro y Torralbo, 2001). En este significado la unidad o el todo no está definido, porque supone la relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, cuando se compara la cantidad de niños y niñas en un curso y se dice tres es a cinco (3: 5) o por cada tres niños hay cinco niñas, o se compara la longitud geografía de un mapa a escala con la realidad geográfica del lugar (1: 10.000).

LA FRACCIÓN COMO MEDIDA

Es aquella en donde la fracción expresa una comparación multiplicativa entre dos cantidades, tomando como una unidad de medida una parte del todo. En este significado la fracción asigna un número (fracción) a una cantidad de región o a una cantidad de magnitud, producto de la partición equitativa de una unidad. La fracción toma una connotación de “veces”. Hay una interacción de unidades de tamaño y no solamente la percepción de partes divididas, en otras palabras, la fracción connota cuantas veces esa fracción está contenida en el todo.

LA FRACCIÓN COMO OPERADOR

Este significado apunta a la connotación multiplicativa que se le atribuye a la fracción. La multiplicación de la fracción es sobre aquella cantidad que representa al todo o la unidad. Se apunta a que el todo es dividido entre el número que representa al denominador de la fracción y posteriormente una multiplicación entre el cociente (resultado de dividir el todo entre el denominador) por el número del numerador. Por ejemplo, si hay 32 fichas entre azules y rojas y las rojas representan $\frac{3}{4}$ ¿cuántas fichas rojas hay? Esta TM inicialmente se podría abordar de manera intuitiva, con base en un contexto discreto y considerando el conocimiento que se tiene de la fracción parte-todo. Por ejemplo, se podría representar pictóricamente las 32 fichas de color blanco (imagen izquierda, Figura 4), dado que aún no se sabe cuántas fichas corresponden a cada color. Posteriormente, se divide esas 32 fichas entre cuatro (número que indica el denominador, imagen izquierda, Figura 4), de manera equitativa y exhaustiva, de modo que se forman cuatro grupos de ocho fichas, y de esos cuatro grupos se consideran tres (número que indica el numerador, imagen central, Figura 4). Finalmente, se calcula cuántas fichas corresponden a esos tres grupos: sumando tres veces ocho o multiplicando directamente tres por ocho, cuyos resultados serán las fichas rojas. En este caso serán 24 fichas rojas y las restantes serán las fichas azules (8), tal como se muestra en la imagen derecha de la Figura 4.

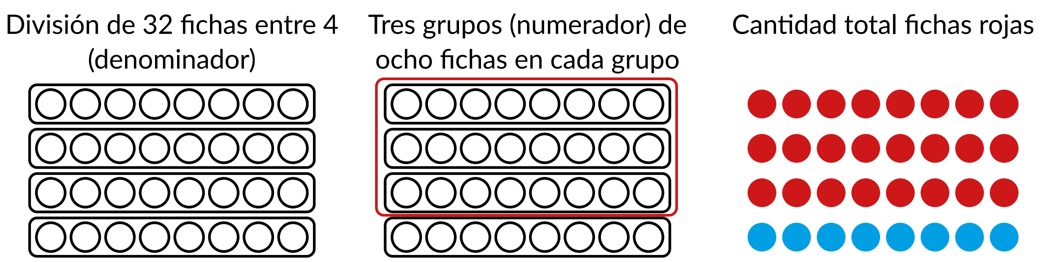


Figura 4. Procedimiento pictórico de $\frac{3}{4}$ de 32

Esta TM, y una vez que se ha abordado y comprendido pictóricamente, se podría resolver por medio del siguiente procedimiento $\frac{3}{4}$ de 32: 32:4=8; 8×3=24; por tanto, hay 24 fichas rojas y por su parte hay 8 fichas azules, porque 32:4=8. En complemento a lo anterior, se podría emplear la máquina de la Figura 5, que opera con base en este significado de la fracción y puede ser útil como recurso de uso didáctico.

¿Cuánto es $\frac{3}{4}$ de 32?

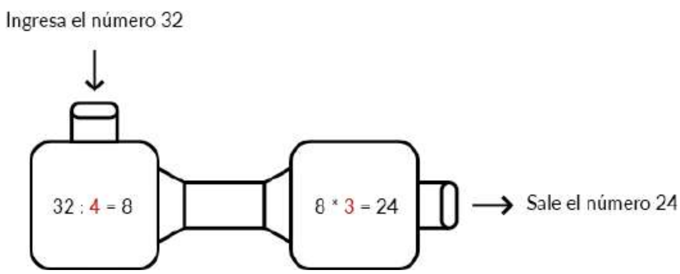


Figura 5. Máquina de fracción como operador

Como se observa, la máquina funciona de la siguiente manera: entra el número 32 el cual se divide entre 4 (denominador), obteniendo así 8. Posteriormente, el 8 se multiplica en 3 (numerador), obteniendo 24 que corresponde al número que sale de la máquina.

LAS FRACCIONES EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

En el currículo nacional la introducción de las fracciones es a partir de tercero básico. En este curso educativo se introduce la fracción parte-todo, donde los estudiantes deberán demostrar que: (a) comprenden las fracciones, a través de explicaciones que aludan a que una fracción representa la parte de un todo y (b) aquellas situaciones donde se utilizan. Particularmente, se propone la introducción de fracciones de uso diario, como: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$, con base en una estrategia que implique el tránsito de una representación a otra: verbal, concreta, pictórica y simbólica. En la Figura 6 se observa una sugerencia de actividad curricular en la que se introduce la división de un entero o unidad (contexto continuo) en partes iguales (significado parte-todo) con el fin de introducir sus nombres de acuerdo a la cantidad de partes que se ha dividido el todo. Nótese el tránsito de la representación verbal a la pictórica.

Figura 6. División de un entero en partes iguales
(Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015a, p. 152)

Finalmente, en este curso escolar se propone la comparación de fracciones con igual denominador.

En cuarto básico el trabajo continúa con la fracción parte-todo, pero ampliando el número de divisiones del todo. Para tal propósito se busca que los estudiantes comprendan las fracciones con denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 100. Ellos deberán explicar que una fracción representa la parte de un todo (continuo) o de un grupo de elementos (discreto), así como su representación gráfica en la recta numérica. Además, deberán comprender que las fracciones tienen diferentes representaciones, describiendo situaciones en las cuales se utilizan y mostrando que una fracción puede tener representaciones diferentes. Se anexa a lo anterior, la comprensión para ordenar fracciones (MINEDUC, 2015b).

Finalmente, en este nivel educativo se introduce la adición y sustracción de fracciones con igual denominador, transitando desde lo concreto a lo pictórico dentro de un marco de resolución de problemas. Una vez que los estudiantes han dominado la adición y sustracción, se introduce las fracciones mayores a la unidad (impropias) y sus respectivos números mixtos, distinguiéndolas de las fracciones propias, siempre transitando desde lo concreto, pictórico a lo simbólico. En la figura 7 se muestra un ejemplo de adición de fracciones con igual denominador (tercios) en un contexto continuo (imagen izquierda, representación pictórica a la simbólica) y en la imagen derecha se muestra una actividad en la cual los estudiantes deberán representar pictóricamente un número mixto (representación simbólica a la pictórica).

1. En el rectángulo están marcados en color dos partes iguales.

a. Indique la fracción que representa cada una de las partes coloreadas.

b. ¿Qué fracción representa las dos partes coloreadas juntas?

2. Colorea en las cuadrículas el área que corresponde al número mixto $1\frac{5}{9}$.

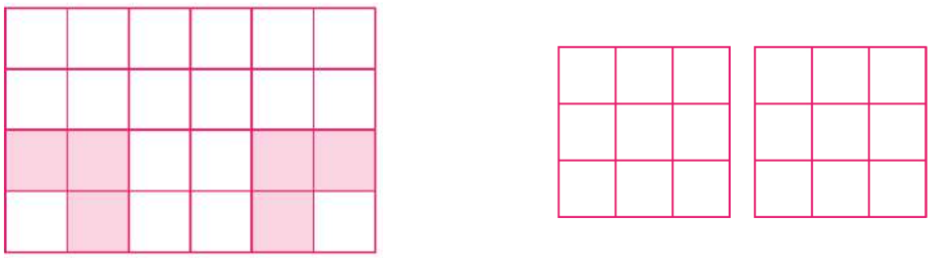


Figura 7. Adición de fracciones y número mixto (MINEDUC, 2015b, p. 105-109)

ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

A continuación, se detallan algunas TMs, con las cuales promover la comprensión de las fracciones de parte de los estudiantes, en tercero y cuarto básico. Se hace énfasis en los significados de las fracciones que son abordables en estos cursos educativos.

TERCERO BÁSICO

Como se ha visto en los apartados anteriores, parece aconsejable introducir las fracciones cuyo significado es parte-todo. De hecho, así lo sugieren muchos didactas de la Matemática (p. ej., Castro, Castro-Rodríguez, Fernández-Plaza, Flores, Molina, 2015). Para tal efecto, los contextos continuos (región circular, cuadrada o rectangular) expresados por medio de representaciones concretas suelen ser idóneas para introducir las fracciones. A partir de estos contextos los estudiantes tendrán la posibilidad de fraccionar el todo, facilitando así la introducción de los nombres de las fracciones.

Una situación para introducir las fracciones es aquella donde los estudiantes tengan la posibilidad de reflexionar sobre cuando hay fraccionamiento del todo (división de manera equitativa o justa), o no. Por ejemplo, se puede proponer una TM, en que se ha repartido un chocolate para dos personas y donde los estudiantes tendrán que determinar y argumentar en cuál de las dos hay un reparto equitativo, como se muestra en la figura 8.

¿Cuál de las dos formas es equitativa para repartir un chocolate entre dos personas?

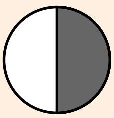
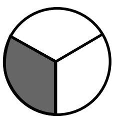
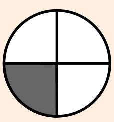
Figura 8. Repartición de una región rectangular

En ambas imágenes se observa una repartición de la unidad, sin embargo, solo en la imagen de la izquierda se observa un fraccionamiento o reparto equitativo (justo). Por lo tanto, el estudiante deberá identificar que en la imagen de la izquierda de la Figura 8 es donde se observa un fraccionamiento (o reparto equitativo), dado que los dos trozos del chocolate en que se ha repartido, tienen las mismas superficies, por tanto, ambos representan una misma fracción.

Una vez que los estudiantes han abordado TMs como la anterior y después de haber comprendido la idea de reparto equitativo, el siguiente paso es la comprensión de la representación verbal de la fracción. Los estudiantes deberán ser capaces de representar los fraccionamientos de la unidad con su respectiva representación verbal. La representación verbal de las fracciones se origina en función a los fraccionamientos de la unidad. Un ejemplo de TM que puede ser útil es aquella que aparece en la Figura 6, en la que se fracciona un todo para introducir sus nombres respectivos.

El último paso es la representación simbólica de la fracción. Es importante que los estudiantes distingan claramente y consoliden el aprendizaje de que cada una de las partes en que se divide el todo representa al denominador y las partes que se consideran de la unidad es el numerador. A continuación, en la tabla 1, se muestra la secuencia didáctica inicial sobre el tránsito de las representaciones de las fracciones, que han de ser abordadas en la enseñanza. Una vez comprendida esta secuencia los estudiantes podrán transitar por estas representaciones de maneras diversas.

Tabla 1. Secuencia didáctica tránsito de representaciones de las fracciones

Paso 1	Paso 2	Paso 3
Representación concreta/ pictórica	Representación verbal	Representación simbólica
	Medios Fracción: un medio	$\frac{1}{2}$
	Tercios Fracción: un tercio	$\frac{1}{3}$
	Cuartos Fracción: un cuarto	$\frac{1}{4}$

Para una mayor comprensión de parte de los estudiantes del significado parte-todo de la fracción, es importe introducir actividades donde se trabaje en contextos discretos, aunque curricularmente no se sugiera su incorporación en este nivel educativo de manera explícita (Llinares y Sánchez, 1988). Por ejemplo, una TM que puede ser útil para abordar las fracciones desde un contexto discreto, es la que se presenta en la Figura 9.

Figura 9. Actividad en un contexto discreto

En esta actividad el estudiante deberá identificar que las tres fichas son la parte que se considera y el total de fichas corresponde al todo y deberá ser representada simbólicamente como $\frac{3}{4}$. Abordar las fracciones desde este tipo de contexto ayudará a los estudiantes a la comprensión de la fracción como razón y la noción de porcentaje en cursos posteriores (Castro, et al. 2015).

Las semirrectas numéricas forman parte de otro contexto idóneo en los cuales trabajar las fracciones. Las fracciones representadas en semirrectas numéricas ayudarán a los estudiantes a que comprendan que las fracciones son una extensión de los números naturales y que pueden ser ubicados por ejemplo, entre dos números enteros (Castro, et al. 2015). A su vez, ayudará a abordar de mejor forma las fracciones impropias en cuarto básico. En la TM de la Figura 10 el estudiante deberá ubicar en la semirrecta numérica las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, entre el 0 y el 1.

¿Cuál es la ubicación de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ en la semirrecta numérica?

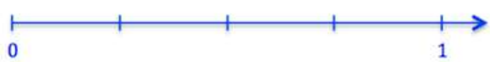


Figura 10. Fracciones en la semirecta numérica

Para profundizar en las fracciones en este nivel educativo, también se puede abordar algunos contextos en donde la fracción tiene un significado de medida. Tal situación se observa en la TM de la Figura 11, donde hay una cantidad que representa a una unidad de medida (trozo sobrante) la cual se utiliza para medir otra cantidad correspondiente a la longitud de una cortina equivalente a un metro. Una vez que se ha medido, se puede determinar que cuatro pedazos sobrantes son igual a un metro, o que en el pedazo de tela sobrante esta contenido cuatro veces en el trozo de tela de un metro. Por lo tanto, ese pedazo de tela sobrante corresponde a $\frac{1}{4}$ del trozo de tela de un metro.

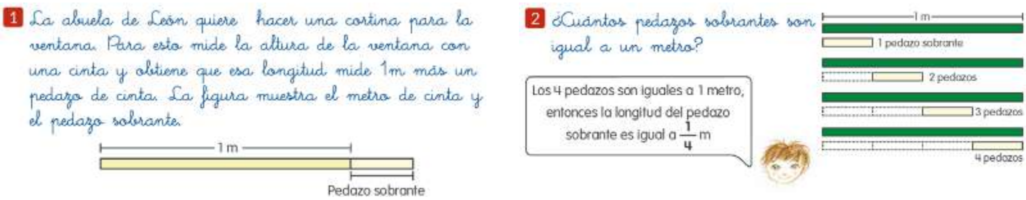


Figura 11. Fracción como medida (Isoda y Estrella, 2020a, p. 68)

Este tipo de tareas es una antesala para abordar la fracción como operador en niveles posteriores, donde los estudiantes tendrán que calcular, por ejemplo, los centímetros que corresponden a $\frac{1}{4}$ de metro.

Finalmente, en este curso escolar los estudiantes abordarán las fracciones equivalentes y la comparación de fracciones con igual denominador. El estudiante tendrá que comprender que cuando dos fracciones distintas ocupan la misma parte del todo, estas serán equivalentes. Para tal efecto, los estudiantes han de realizar por ellos mismos fraccionamientos de regiones (continuo) y argumentarán sobre conclusiones a las que ellos pueden llegar. Por ejemplo, a los estudiantes se les puede solicitar una TM en la que determinen quién recibe más chocolate, entre dos personas A y B, cuando se reparten dos chocolates de un mismo tipo y donde a una persona A se le da $\frac{1}{2}$ del chocolate y mientras que a la persona B se le da $\frac{2}{4}$. Para ello se les puede facilitar dos regiones rectangulares (hojas de papel) iguales (ver Figura 12), con las cuales hacer dobleces y representar las fracciones de chocolate que recibirá cada persona. Posteriormente comparan ambas fracciones superponiéndolas y concluyen que dichas fracciones son iguales, dado que ambas ocupan la misma parte del todo, como se muestra en la Figura 12.

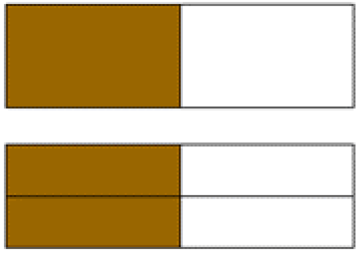


Figura 12. Fracción equivalente

El muro fracciones de Freudenthal es un material estructurado idóneo para abordar las fracciones equivalentes y la relación de orden en fracciones (ver figura 13) de una manera manipulativa. Este muro consiste en un rectángulo dividido en franjas, cada una de ellas representando una unidad, que se encuentran divididas en distintas fracciones unitarias (medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y decimos). Este material, que se puede replicar en cartón para que los estudiantes manipulen, es posible realizar diferentes actividades (identificación de fracciones, fracciones equivalentes, ordenación de fracciones y adición de fracciones) a partir de tercero básico.

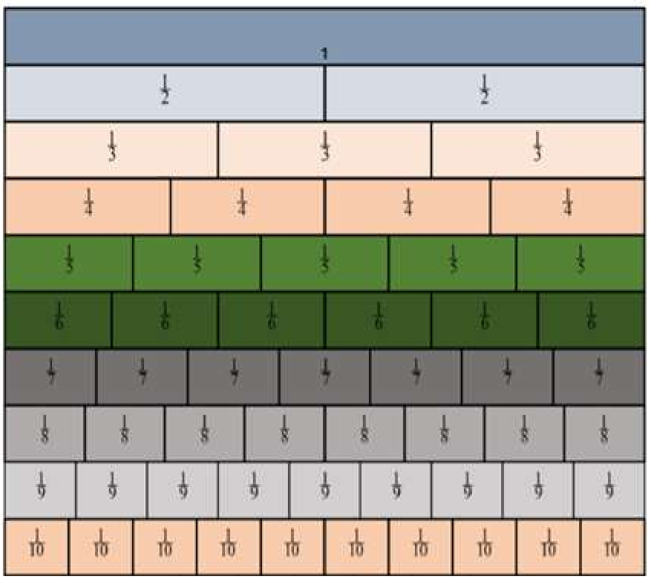


Figura 13. Muro de fracciones de Freudenthal

Los estudiantes pueden superponer las franjas del muro y podrán establecer fracciones equivalentes. Por ejemplo, al superponer las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{10}$; se puede establecer que son equivalentes, dado que ocupan la misma porción del entero, como se muestra en la figura 14.

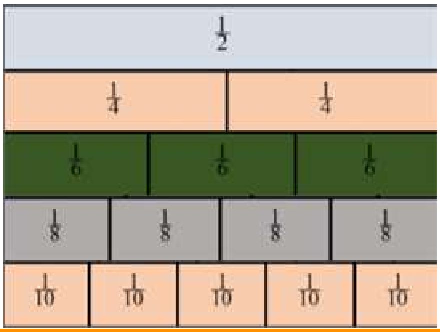


Figura 14. Fracciones equivalentes con franjas de muro de Freudenthal

En cursos posteriores los estudiantes podrán concluir que las fracciones equivalentes se obtienen multiplicando el numerador y denominador de la fracción primitiva por un mismo número. Por ejemplo: , se multiplica el 1 y el 2 por cualquier número natural y se obtiene una fracción equivalente. Este proceso se denomina amplificación de una fracción y da origen a la clase de equivalencia (conjunto de fracciones equivalentes, y que representan la misma cantidad).

En conjunto con las fracciones equivalentes se debe abordar la relación de orden de estas, cuyos denominadores sean los mismos. Este trabajo se realiza sobre la base de los conocimientos previos de los estudiantes, respecto a la relación de orden con otras magnitudes, lo cual debe estar bien afianzado. Para introducir esta noción, se pueden plantear situaciones de repartos equitativos con material manipulativo (región rectangular) como la que se ha visto anteriormente, donde se repartía un chocolate. Por ejemplo, se puede preguntar a los estudiantes qué persona ha recibido más chocolate, si la persona A ha recibido $\frac{1}{4}$ de chocolate y la persona B ha recibido $\frac{3}{4}$. Una vez que los estudiantes han representado las fracciones de chocolate que tocará cada persona, las comparan y concluyen que la persona B ha recibido más chocolate, dado que $\frac{3}{4}$ es una porción más grande del entero que $\frac{1}{4}$, tal como se muestra en la Figura 15.

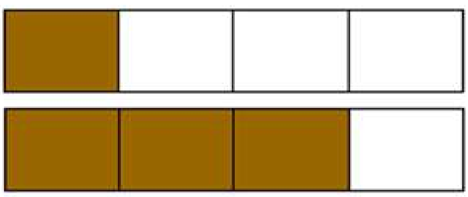


Figura 15. Comparación de fracciones

CUARTO BÁSICO

En este nivel educativo los estudiantes abordarán la relación de orden con fracciones unitarias con distintos denominadores, las fracciones mayores que 1 y la adición y sustracción de fracciones con igual denominador.

Los estudiantes para comparar fracciones lo pueden hacer a través del muro de Freudenthal (ver Figura 13). Inicialmente, se sugiere que ellos comparen fracciones con la unidad (todo), así se darán cuenta que esas fracciones son menores que esa unidad (Canals, 2009).

Posteriormente, se puede instar a los estudiantes a que puedan comparar franjas correspondientes a fracciones unitarias por medio de la superposición, para que establezcan qué fracción unitaria es menor o mayor que otra, tal como se muestra en la Figura 16.

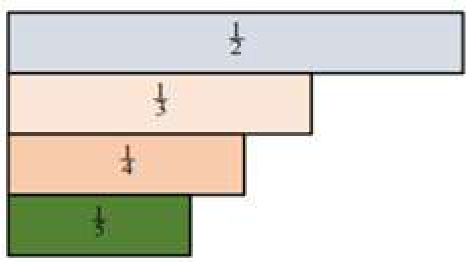


Figura 16. Comparación de fracciones con franjas de muro de Freudenthal

Es importante orientar a los estudiantes a que concluyan que el trozo es más pequeño mientras más grande es el número del denominador, y, por lo tanto, mientras más grande es el número del denominador, la fracción unitaria es más pequeña (o viceversa). Una vez que ellos concluyan esta relación, serán capaces de abordar la comparación de fracciones por medio de otras TMs, con énfasis en lo simbólico y empleando los signos > o <, como se muestra en la Figura 17.

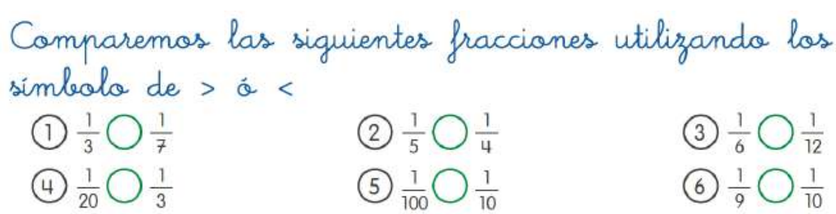


Figura 17. Comparación de fracciones (Isoda y Estrella, 2000b, p. 38)

Con respecto a las fracciones mayores que la unidad, una TM útil pueden ser abordada desde el significado de medida de la fracción, tal como se observa en la Figura 18.

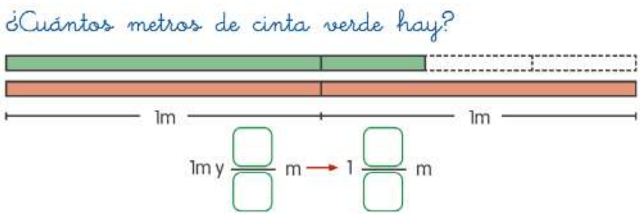


Figura 18. TM con fracción mayor que la unidad (Isoda y Estrella, 2020b, p. 39)

La TM anterior busca que los estudiantes expresen por medio de la medición una fracción mayor que la unidad. Los estudiantes deberán comprender la unidad de medida es el metro y que la cinta verde mide una unidad de esa medida y otra tercera parte de ella. La cinta verde se representa por un metro y un tercio de metro ($1\frac{1}{3}$ metros).

Los contextos continuos son idóneos para introducir la fracción mayor que la unidad. Por ejemplo, a los estudiantes se les puede proponer una TM de reparto equitativo como se muestra a continuación.

La señora Juanita ha repartido $\frac{1}{4}$ de barra de chocolate a cada uno de sus 5 sobrinos ¿cuánto chocolate ha repartido en total?

Para responder a esta TM el estudiante inicialmente deberá conformar el todo (un chocolate) con los cuatro cuartos que ha repartido la señora Juanita a cuatro de sus cinco sobrinos. Posteriormente, deberá agregar el $\frac{1}{4}$ de barra de chocolate faltante, que corresponde a la porción del quinto sobrino. Por lo tanto, se tiene que la señora Juanita ha repartido "una barra y un cuarto de chocolate más", lo que se puede expresar por medio de un número mixto, es decir, $1\frac{1}{4}$ de chocolate (número natural que representa un entero, junto a una fracción propia). Por su parte, el estudiante también podrá responder a esta TM extrapolando la adición de los números naturales a las fracciones, de modo que, sumará cinco veces $\frac{1}{4}$ de barra de chocolate. Así, se establece una fracción impropia "cinco cuartos" o "$\frac{5}{4}$" (numerador mayor que el denominador) como se muestra en la Figura 19. La acción anterior es destacable dado que permite comprender la adición de fracciones con igual denominador de forma intuitiva, por parte de los estudiantes.

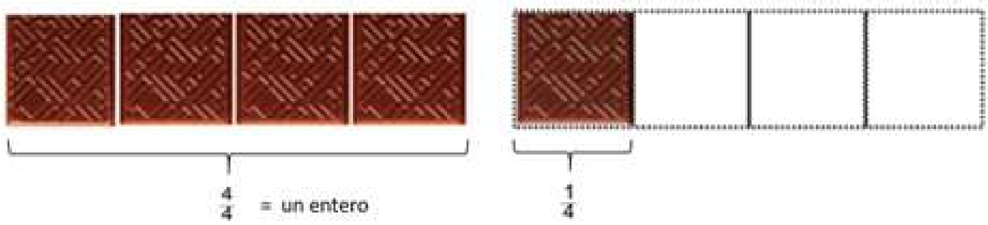


Figura 19. Representación de una fracción mayor que la unidad $\frac{5}{4}$ o $1\frac{1}{4}$

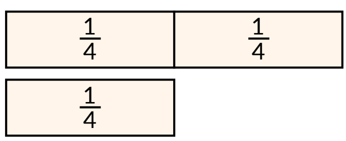
Una vez que los estudiantes han comprendido aquellas fracciones mayores que la unidad, deberán transitar por ellas por medio de diferentes sistemas de representación, por ejemplo: desde lo pictórico a lo simbólico o viceversa.

Además, los estudiantes en este nivel educativo deberán abordar la adición y sustracción con fracciones de igual denominador. Estas operaciones pueden ser bien sencillas de abordar, dado que por simple evocación se puede llegar a establecer cómo sumar dos fracciones con igual denominador. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ es $\frac{2}{4}$. Parece sencillo responder $\frac{2}{4}$. Sin embargo, pasa en algunos casos que estudiantes extrapolan la adición de números naturales a las fracciones y en lugar de responder $\frac{2}{4}$, lo hacen del modo $\frac{2}{8}$, sumando numeradores entre sí y de manera análoga los denominadores. Es por este motivo que su abordaje requiere de situaciones didácticas específicas y TMs idóneas y contextualizadas para su introducción y consolidación. Por ejemplo, se propone la siguiente TM:

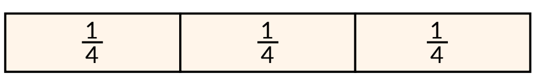
Antonia tiene $\frac{2}{4}$ metros de cinta mientras que Ricardo tiene $\frac{1}{4}$. Si ambos trozos de cinta se unen ¿Cuántos metros de cinta tienen en total?

Para abordar este problema los estudiantes pueden hacer uso de las franjas del muro de Freudenthal, realizando las tres acciones siguientes:

a. Formación de los $\frac{2}{4}$ y consideración de $\frac{1}{4}$.



b. Unión de $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{4}$.



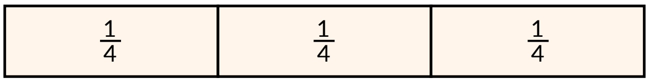
c. Respuesta: $\frac{3}{4}$ de metros.

Para la sustracción se podría se plantea la siguiente TM:

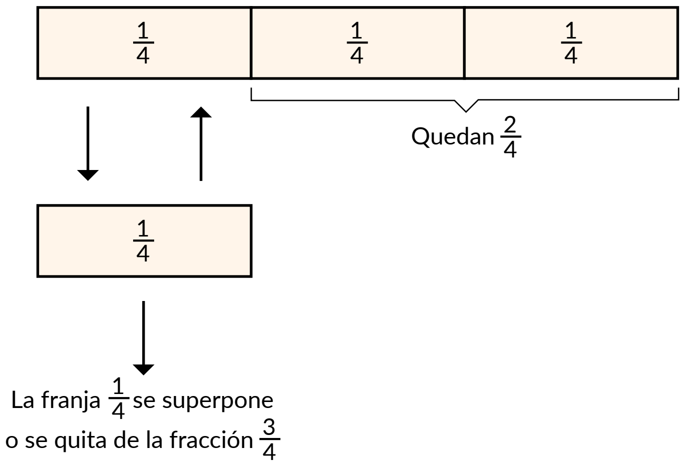
Juan tenía $\frac{3}{4}$ metros de una cinta y ha utilizado $\frac{1}{4}$ de metros para un regalo ¿cuántos metros de cinta le quedan?

Los estudiantes haciendo uso de las franjas del muro de Freudenthal, realizan las acciones siguientes:

a. Formación de los $\frac{3}{4}$ con tres trozos de $\frac{1}{4}$.



b. Quitar o superponer un trozo de ¼ al ¾ y lo que sobra corresponde a la diferencia.



c. Respuesta: son $\frac{3}{4}$.

Los estudiantes a través de estos tipos de TMs y acciones deberán darse cuenta de que para sumar o restar fracciones con igual denominador, basta sumar o restar los numeradores y conservar el denominador. Este trabajo será la base para abordar los procedimientos de la adición y sustracción con distinto denominador en años posteriores. Para tal efecto, los estudiantes deberán amplificar o simplificar al menos una de las fracciones con las cuales se está operando, para igualar los denominadores de las fracciones y así efectuar la operatoria correspondiente.

Por último, en este nivel, se da inicio a la enseñanza de fracciones del tipo $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{100}$, que se denominan fracciones decimales (su denominador es una potencia de 10). La expresión posicional de la fracción decimal la podemos escribir como número decimal $\frac{2}{10}$ = 0,2; $\frac{3}{100}$ = 0,03, entre otras.

ERRORES EN EL TRABAJO CON FRACCIONES

A continuación, se presentan los errores más frecuentes en el trabajo con fracciones en tercero y cuarto básico.

Algunos estudiantes no consolidan el significado de la fracción parte-todo en un contexto continuo. Por ejemplo, al hacer el tránsito de una representación pictórica a la representación simbólica, los estudiantes comenten errores. Estos errores se focalizan en que ellos no son capaces de distinguir el fraccionamiento total que se le ha hecho al todo. Interpretan el denominador como aquello que falta para completar el todo, una vez que se ha considerado una parte de ese todo. Por ejemplo, al preguntar por la representación simbólica de la Figura 20, algunos estudiantes responden $\frac{2}{4}$. Ante esta situación es importante afianzar en los estudiantes la comprensión de la fracción parte-todo y que el denominador indica las partes totales en que se ha divido el todo, transitando desde la representación concreta-pictórica a la simbólica.

Figura 20. Error representación fracción parte-todo (Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 21)

Otros errores aluden a cuando los estudiantes deben representar simbólicamente una fracción en un contexto discreto, dada una representación pictórica, en un contexto de resolución de problema. Por ejemplo, en la Figura 21, se muestra que algunos estudiantes responden $\frac{12}{3}$ en lugar de responder $\frac{3}{12}$ (respuesta correcta), confundiendo el numerador con el denominador. Este error puede también significar una dificultad de comprensión del problema. Se asume de una manera mecánica que, el primer número entregado corresponde siempre al numerador y el segundo siempre es el denominador, sin realizar un análisis previo de lo que cada número significa y representa en el contexto del problema. Los expertos indican que el contexto discreto requiere ser abordado en conjunto con el contexto continuo, con base en la resolución de problemas y transitando desde la representación concreta-pictórica a la representación simbólica, para una mejor comprensión de la fracción parte-todo.

Miguel tenía 12 huevos y usó 3 para hacer una tortilla.
¿Qué fracción del total de huevos que tenía usó Miguel?

$\frac{12}{3}$ Considera que el primer dato que aparece es el numerador y el segundo, el denominador.

Figura 21. Error contexto discreto con fracciones (Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 21)

Con respecto a la adición y sustracción de fracciones de igual denominador, un error frecuente que manifiestan los estudiantes, es que extrapolan estas operaciones con números naturales a las fracciones. Por ejemplo, al sumar y restar fracciones representadas de manera simbólica, los estudiantes operan sin considerar las fracciones como un solo número y realizan un procedimiento que implica sumar o restar directamente los numeradores y los denominadores respectivamente, como se muestra en la Figura 22. La respuesta correcta de esta TM es $\frac{8}{12}$.

¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$?

$\frac{8}{24}$ Suma numerados con numerador y denominador con denominador sin considerar la fracción como un solo número.

Figura 22. Error adición de fracciones (Agencia de Calidad de la Educación, 2019, p. 24)

Como docentes es importante conocer de antemano los errores que manifiestan los estudiantes cuando resuelven TMs que involucran fracciones, dado que pueden ser utilizados como instancias de aprendizaje en la propia enseñanza, por medio de la reflexión entre los estudiantes.

REFLEXIONES FINALES

Como se ha visto en este capítulo las fracciones requieren de un dominio profundo de parte del docente para ser enseñadas. Esto quiere decir que se deben conocer sus significados y cómo estos deben ser abordados en la enseñanza. En este capítulo se ha querido compartir algunas estrategias didácticas específicas de cómo hacerlo. Sin embargo, es importante que el docente también pueda adaptar lo aquí presentado, a contextos significativos y de acuerdo a las necesidades de sus estudiantes.

Para lograr Sique los alumnos sean competentes en el uso de las fracciones para resolver diferentes problemas, el profesor debe enseñar una muestra representativa de los diferentes significados, ya que si se enseña solo uno de ellos (p. ej., parte-todo que comúnmente se aborda en la enseñanza), el alumno difícilmente podría hacer transferencia de otros significados que necesitará en la resolución de problema. Por tanto, una comprensión de los significados de las fracciones como un aspecto basal, permite abordar TMs adecuadas y así mejorar los aprendizajes de parte de los estudiantes.

Se cree que si se quiere que los alumnos sean competentes en el uso de las fracciones para resolver diferentes problemas, el profesor debe enseñar una muestra representativa de los diferentes significados, ya que si se enseña solo uno de ellos (p. ej., parte-todo que comúnmente se aborda en la enseñanza), el alumno difícilmente podría hacer transferencia de otros significados que necesitará en la resolución de problema. Por tanto, una comprensión de los significados de las fracciones como un aspecto basal, permite abordar TMs adecuadas y así mejorar los aprendizajes de parte de los estudiantes.

Se ha mostrado que, a partir de tercero básico, se pueden abordar distintos significados de las fracciones, no tan solo el de parte-todo, sino que también el de medida, y así como un acercamiento al concepto de fracción como razón y como cociente. Por esta razón se sugiere introducir las fracciones pasando desde la representación verbal a lo concreto-pictórico y simbólico, y posteriormente que transiten libremente por estos sistemas.

Es importante que los alumnos puedan trabajar la fracción parte-todo en contextos continuos y discretos. Centrar la enseñanza exclusivamente en contextos continuos, puede acarrear algunas complicaciones en los estudiantes, cuando aborden TMs en contextos discretos. Es aquí donde se debe poner el énfasis en la incorporación de los contextos discretos, los cuales deben ser abordados a la par con los contextos continuos, de esta manera se genera un aprendizaje cabal de la fracción como parte-todo, a partir de los primeros niveles educativos.

Por último, en algunos pasajes del capítulo se ha señalado la importancia del material manipulativo del muro de Freudenthal, como recurso didáctico para abordar algunos temas centrales de las fracciones (fracciones equivalentes, relación de orden y la adición y sustracción de fracciones con igual denominador). Si bien es un material interesante y útil, no es el único y se insta a los docentes a que puedan hacer uso de otros[1], siempre y cuando contribuyan a la comprensión de las fracciones de una manera manipulativa y práctica. Por ejemplo, como los estudiantes saben que el denominador es el número que le da nombre a la fracción, entonces sumar o restar fracciones de igual denominador, equivale a sumar o restar objetos del mismo nombre, por lo tanto, el resultado debe ser siempre un número de objetos con ese nombre. Esto permitirá solucionar el error que cometen algunos estudiantes cuando suman numeradores y denominadores entre sí, respectivamente.

1 Para profundizar en materiales manipulativos y sus usos en la enseñanza de las fracciones, ver Canals (2009) o Castro et al. (2015).

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas. Santiago de Chile*. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf.

Canals, M. (2009). *Fracciones*. Barcelona: Rosasensat.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.

Castro, E., Castro-Rodríguez, E., Fernández, J., Flores, P. y Molina, M. (2015). Enseñanza y aprendizaje de los números racionales y sus operaciones. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria* (pp. 205-229). Madrid: Pirámide.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, M., Escudero, D. y Flores, E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Paraninfo.

Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 189-218). Madrid: Pirámide.

Isoda, M. y Estrella S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M. y Estrella S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Llinares, S.c y Sánchez, M. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación de Chile. (2013a). *Programa de estudio tercer año básico: Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2013b). *Programa de estudio cuarto año básico: Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Promoviendo el álgebra en niñas y niños, a través de patrones

PEDRO VIDAL-SZABÓ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

JUAN NÚÑEZ-FERNÁNDEZ
Universidad Arturo Prat

INTRODUCCIÓN

El álgebra es una rama de la matemática que tradicionalmente se ha enfocado como objeto de enseñanza y aprendizaje en la formación escolar de adolescentes. Sin embargo, en el currículo chileno, el álgebra está en un eje temático que tuvo una aparición tardía en la formación escolar de niñas y niños, dada la reforma curricular del año 2005 con sus ajustes curriculares del año 2009. Esta reforma estableció que el eje temático Álgebra se iniciara en quinto año básico y en los niveles anteriores se proponían actividades de patrones y regularidades en contextos numéricos y geométricos (Mineduc, 2009). Recién con la reforma curricular del año 2012 se estableció que este eje temático comenzara en primer año básico, bajo el nombre de Patrones y Álgebra, describiéndose que niñas y niños puedan explicar y describir relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, pues con el estudio de los patrones se "facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico" (Mineduc, 2012, p. 219). El desarrollo de este tipo de pensamiento a temprana edad puede dar oportunidades para entender propiedades matemáticas abstractas y comprender relaciones entre variables, entre otros temas matemáticos.

El álgebra abarca distintos contenidos, como la formación y funcionamiento de expresiones algebraicas, utilizando propiedades y definiciones de una estructura algebraica (por ejemplo, del sistema numérico de los números naturales), asimismo la representación de problemas de planteamiento a través de variables e incógnitas (Kieran, 2014). En particular, la enseñanza del álgebra en los primeros niveles educativos ha sido rotulado como Álgebra Temprana, la que según Carraher y Schliemann (2014), remite a:

- Un programa específico de investigación que considera la formación profesional docente que centra su propósito en el fomento y desarrollo del pensamiento algebraico durante la formación escolar desde prekínder hasta los primeros 12 años.
- Provee enfoques de enseñanza y evaluación adecuados para el aprendizaje algebraico de niñas, niños y jóvenes.

El álgebra temprana asume que la aritmética elemental se funda en ideas y principios que son de naturaleza algebraica, lo cual hace que sean considerados en el currículo, a su vez, contempla nociones y representaciones del álgebra que requieren ser dominados por los docentes para dar acceso a los estudiantes a un conocimiento algebraico superior en la medida que avanzan en su formación escolar.

Este capítulo profundiza en la enseñanza del álgebra para el aprendizaje de niñas y niños operacionalizado con el modelo COPISI, un acrónimo que remite a las representaciones **CO**ncreta, **PI**ctórica y **SI**mbólica (Cf., Brunner, 1988; Mineduc, 2012), considerando la combinación entre operar con incógnitas y pensar en términos de variables y sus relaciones.

EL INICIO DEL ÁLGEBRA EN NIÑAS Y NIÑOS

Pensar algebraicamente es un proceso que involucra construir relaciones matemáticas generales expresando dichas relaciones en formas cada vez más sofisticadas (Soares, Blanton y Kaput, 2005), lo cual se traduce en una manera de razonar que se activa al construir, justificar y expresar conjeturas sobre una estructura matemática y las relaciones subyacentes (Blanton y Kaput, 2004).

En el año 1977, Freudenthal caracterizó el álgebra de la escuela como un tópico que incluía tanto la resolución de ecuaciones como el pensamiento algebraico que contiene la capacidad de describir relaciones y resolver procedimientos de manera general. Actualmente, esta caracterización contempla el abordaje de aspectos simbólicos del trabajo algebraico y tipos de pensamiento relacional que subyace al razonar algebraicamente. Este tipo de razonamiento ha cobrado importancia en los currículos, ya que considera procesos cognitivos que se vinculan a la actividad algebraica, vía símbolos y expresiones, incluyendo el uso de palabras, acciones y gestos.

El razonamiento algebraico se concibe como alguna combinación entre: [1] operar con incógnitas; [2] pensar en términos de variables y sus relaciones; [3] reconocer una estructura algebraica (por ejemplo, sistema numérico de los números naturales, N), a través de algunas operaciones aplicables a los elementos pertenecientes a un conjunto no-vacío (por ejemplo, sumar y multiplicar con número naturales). Es importante señalar que los estudiantes pueden demostrar su razonamiento algebraico mediante alguna combinación entre [1], [2] y/o [3], independientemente si están haciendo uso o no de alguna notación algebraica convencional. En el contexto de la educación básica, puede darse una generalización de la aritmética para ser caracterizada algebraicamente, por ejemplo, la propiedad conmutativa de la multiplicación en N puede sugerirse a partir de casos particulares ($3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$; $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$; ... ; $a \cdot b = b \cdot a$, en que a y b son números naturales) y así levantar conjeturas que han de ser demostradas en la medida que se afiance el conocimiento matemático. Para ello, a través de la tabla de multiplicación se puede visualizar la propiedad conmutativa, y también a través de arreglos rectangulares como se muestra a continuación:

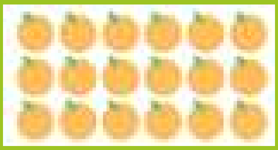
REGULARIDADES EN LA TABLA DE MULTIPLICACIÓN

Los números en su diagonal (celdas blancas) limita dos regiones (la celeste y la amarilla), estas contienen los mismos números producto de la propiedad conmutativa en que:

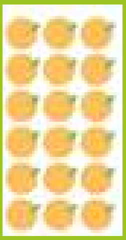
$$3·2=2·3;\ 7·8=8·7;\ \dots\ ;\ a·b=b·a$$

ARREGLOS RECTANGULARES TRANSPUESTOS

Para el caso de 6 x 3, se pueden ordenar en 6 columnas y 3 filas un total de 18 naranjas como se muestra a continuación:



Además, si se ordenasen en 3 columnas y 6 filas la cantidad de naranjas se conserva (3 x 6), como se muestra a continuación:



Desde finales de los años 80, los contenidos de álgebra y los de funciones empezaron a ser combinados en los currículos e investigaciones en álgebra escolar, de hecho, fueron gradualmente consideradas las funciones en gráficos, tablas y representaciones simbólicas como objetos algebraicos legítimos (Cf., Schwartz y Yerushalmy, 1992). A partir del año 2000 se sugiere que niñas y niños son capaces de involucrarse en tareas que desarrollan los diferentes aspectos del álgebra y sus raíces presentes en la actividad matemática tal que, por ejemplo, se pueda identificar a voz de niñas y niños ciertas generalidades por medio de una escucha activa por parte de sus profesores, también a través de una aritmética generalizada se afianza la comprensión de propiedades en el sistema numérico de los naturales (Kaput, 2000). Sin embargo, en ocasiones existe un paso abrupto entre la aritmética elemental y el álgebra escolar lo cual dificulta comprender nociones basales del álgebra que tienen una base más conceptual que procedimental.

La incorporación del álgebra a los primeros años escolares no es tan solo agregar más contenido al currículo, sino que debe dar lineamientos que permitan que el quehacer docente se enfoque en el desarrollo del pensar algebraico a temprana edad, en que los estudiantes puedan representar, generalizar y formalizar distintas expresiones (Godino et al., 2014).

OPERACIONALIZACIÓN ENTRE EL ENFOQUE COPISI Y EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

El enfoque COPISI, creado por Brunner (1988), es una estrategia empleada para la enseñanza y aprendizaje de la matemática que permite el tránsito de lo concreto a lo abstracto haciendo uso coordinado de materiales tangibles, diseños pictóricos y símbolos matemáticos (MINEDUC, 2012). Al respecto, el enfoque COPISI plantea tres modalidades con sus tránsitos respectivos:

Modalidad Enactiva (fase concreta). Es cuando el aprendizaje emerge a través de la manipulación de recursos didácticos tangibles y adquirido por los sentidos. Por ejemplo, determinar la cantidad de peces que tiene una pecera y que es posible de observar en el mundo real (ver Figura 1).

Modalidad Icónica (fase pictórica). Lo adquirido, por medio de los sentidos y la manipulación de los recursos, debe ser comunicado por medios perceptibles como, por ejemplo, dibujando un cuadrado por cada pez, lo cual hace comenzar un proceso de abstracción para representar lo invariante. En la Figura 1, dibujar dos peces o dos cuadrados amarillos para representar la cantidad dos.

Modalidad Simbólica. Corresponde a un esquema abstracto que puede ser el mismo lenguaje o cualquier otro símbolo estructurado, como los matemáticos. En la Figura 1, la cantidad de peces es representada simbólicamente por el dígito “2”.

Figura 1. Tránsito de lo tangible a lo abstracto, vía enfoque COPISI.

En el contexto de una actividad de desarrollo profesional para docentes de educación básica que enseñan matemática —actividad basada en el problema extraído de Vila y Callejo (2004, p. 27)—, se aborda una operacionalización entre el enfoque COPISI y el razonamiento algebraico. Se invita a resolver el siguiente problema, para ello haga uso de una cinta de papel como muestra la Figura 2.

Tomar una cinta de papel y doblar por la mitad, haciendo coincidir los dos extremos, uno sobre otro. Al abrir el papel, ¿cuántas marcas observas en el papel? Y si en lugar de hacerlo una vez, volvemos a doblar por la mitad, pero ahora dos veces en el mismo sentido anterior, ¿cuántas marcas observas? (Ver Figura 2).

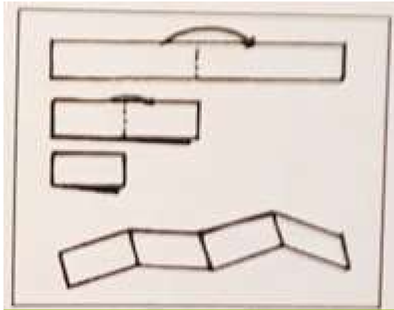


Figura 2. Cinta de papel

Y si imaginas una cinta larguísima de papel y doblas el papel diez veces, con el mismo procedimiento anterior. ¿Cuántas marcas crees que habrá en el papel? ¿Por qué?

Aplicando el enfoque COPISI se consideran distintos tránsitos que pueden emerger en su resolución.

A. TRÁNSITO DE LO CONCRETO A LO PICTÓRICO

- Se trabaja con la cinta de papel de modo tal que se dobla por su mitad, luego se abre la cinta para contar el número de marcas que quedan en el papel. Y esto vuelve a repetirse. En este caso, está privilegiada la modalidad concreta.
- Se va dando cuenta, quien resuelve, que para 1 doblez habrá 1 marca, para 2 dobleces habrá 3 marcas, para 3 dobleces habrá 7 marcas y que para 4 dobleces habrá 15 marcas. Acá se enlista en hoja para transitar desde una fase concreta a una fase pictórica, en la que se empieza a explicitar la relación entre los dobleces y las marcas de la cinta de papel.

En este caso, el recurso didáctico es la cinta de papel y en el primer tránsito es relevante su uso, ya que permite establecer una relación inicial entre los estados de la cinta al doblar cada vez por su mitad (número de dobleces) y las marcas que van quedando en la cinta de papel al ser desplegada después de cada uno de los estados (número de marcas).

Una posible dificultad en esta primera etapa es intentar realizar 5 o 6 dobleces con la cinta de papel, pero esto puede producir problemas en el conteo de las marcas porque ya estarán muy próximas unas de las otras y/o no estarán tan bien marcadas en la cinta de papel. De ahí, una posible devolución podría ser ¿Cómo registrarías lo que estás haciendo? Esto dará paso a la fase pictórica.

B. TRÁNSITO A LO PICTÓRICO DESDE LO CONCRETO, EN MIRAS A LO SIMBÓLICO

- Se va tomando registro en una hoja de papel y en formato lista el conteo de las marcas. Por ejemplo, 1→3→7→15→..., y así. O bien, 1→1; 2→3; 3→7; 4→15; 5→ (...); 6→ (...); lo cual entabla una relación entre el número de dobleces y el número de marcas en la cinta de papel. Se puede decir que la modalidad pictórica está siendo privilegiada, en el sentido que dichos registros expresan lo que está sucediendo en la cinta de papel y, a su vez, en la medida que se estructuran dichos registros se transita hacia la modalidad simbólica (al pasar de lista a tabla, por ejemplo).
- También, se puede realizar una tabla en la que rotulan las variables en juego (dobleces y marcas en el papel) y organizan los números obtenidos relacionalmente, lo cual da cuenta de una modalidad simbólica que se afianza. Ver la siguiente tabla de ejemplo en que "(...)" es un número desconocido que puede deducirse:

DOBLECES	MARCAS EN EL PAPEL
1	1
2	3
3	7
4	15
5	(...)
6	(...)

Es posible que puedan darse ciertas dificultades. Por ejemplo, dado que para el doblez 1 es 1 marca y para el doblez 2 son 3 marcas, o sea, (1+2) marcas, se piense entonces que para el doblez 3 sea (1+2+3) marcas, es decir, 6 marcas. Para ello, una posible devolución podría ser que se solicite explicar, mediante el papel ¿cuántas marcas se tendrán con 3 dobleces? Luego, a través del medio didáctico podrá obtener información y responder la pregunta. También puede ser posible que, en vez de contar las marcas del papel, se cuente el número de partes que queda dividido el papel, frente a lo cual, una posible devolución es ¿Qué solicitan contar en la actividad?

A continuación, maneras de contar en el papel.

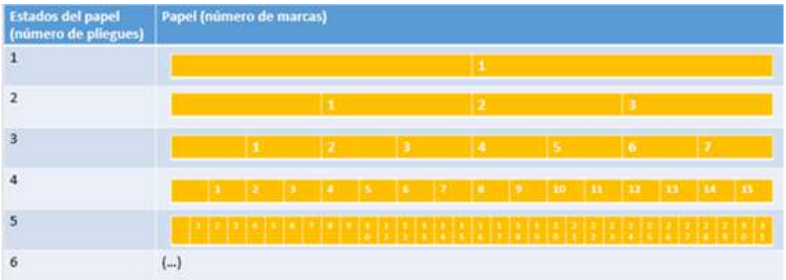


Figura 3. Conteo del número de marcas, estableciendo el doble del anterior más 1.

Figura 4. Conteo del número de marcas, estableciendo potencias de base 2 menos 1.

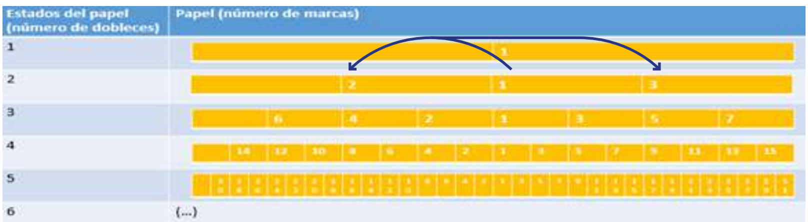


Figura 5. Conteo del número de marcas, estableciendo un conteo en forma de zig-zag.

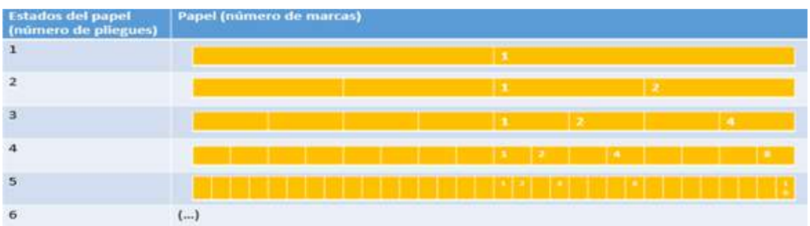


Figura 6. Conteo del número de marcas, estableciendo el doble cada vez en la suma.

Estas maneras de contar que se pueden apreciar en las Figuras del 3 al 6, permiten dar cuenta de cómo se comienza a transitar a la modalidad simbólica.

C. TRÁNSITO HACIA LO SIMBÓLICO.

A continuación, se presenta el trabajo algebraico en una modalidad simbólica, en tanto, se entablan relaciones numéricas. En particular, se puede establecer una relación aditiva como sigue:

a. $1 = 1$
b. $3 = 1+2$
c. $7 = 1+2+4$
d. $15 = 1+2+4+8$
e. $31 = 1+2+4+8+16$
f. $(...) = 1+2+4+8+16+32$

O también, una relación aditiva equivalente, pero usando potencias de base 2:

a. $1 = 2^0$
b. $3 = 2^0+2^1$
c. $7 = 2^0+2^1+2^2$
d. $15 = 2^0+2^1+2^2+2^3$
e. $31 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4$
f. $(...) = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$

Igualmente, se puede establecer una relación por medio de la resta:

a. $1 = 2 - 1$
b. $3 = 4 - 1$
c. $7 = 8 – 1$
d. $15 = 16 - 1$
e. $31 = 32 - 1$
f. $(...) = 64 – 1$

O usando potencias de base 2:

a. $1 = 2^1-1$
b. $3 = 2^2-1$
c. $7 = 2^3-1$
d. $15 = 2^4-1$
e. $31 = 2^5-1$
f. $(...) = 2^6-1$

Y de manera más general, para n dobleces, hay (2^n-1) marcas, en que ese "-1" puede ser interpretado como el que resulta de restar una marca del papel que coincide en posición con la que genera el primer doblez realizado, de ahí que entonces para el doblez n=1 se tenga (2^1-1=2-1=1) marca en el papel (ver Figura 7).

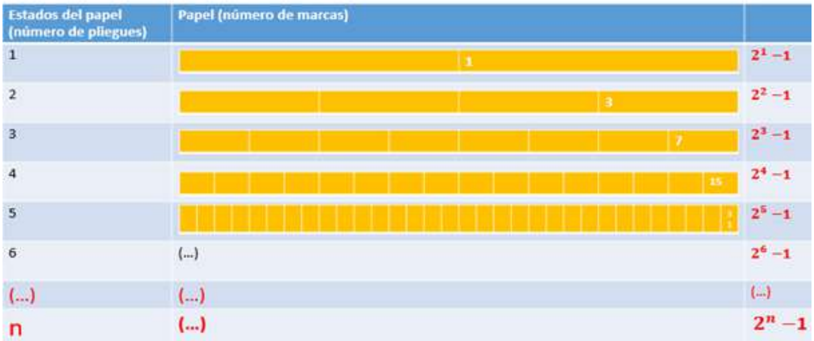


Figura 7. Conteo del número de marcas, estableciendo una relación general.

Como se pudo apreciar, existe un razonamiento algebraico que activa el problema, en el sentido de operar entre incógnitas y pensar en términos de variables y relaciones numéricas. La incógnita "(…)" requiere establecer qué valores se relacionan entre las variables: número de dobleces (variable independiente) y el número de marcas en la cinta de papel (variable dependiente), lo cual supone una relación funcional entre dichas variables.

UNA PANORÁMICA CURRICULAR

Las Bases Curriculares del Mineduc (2012, p. 219) describen el eje temático Patrones y Álgebra como:

Los **patrones** (observables en secuencias de objetos, imágenes o números que presentan regularidades) pueden ser representados en formas concretas, pictóricas y simbólicas, y los estudiantes deben ser capaces de transportarlos de una forma de representación a otra. **La percepción de los patrones les permite predecir y fundamentar su razonamiento al momento de resolver problemas**. Una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como el pensamiento algebraico.

Las modalidades concretas, pictóricas y simbólicas contribuyen al razonamiento algebraico frente a un problema, por ejemplo, en los primeros años escolares puede darse la siguiente tarea matemática (ver Figura 8), que demanda en el resolutor obtener el mecanismo por el cual la secuencia se va formando, en el primero caso 1, 3, 5, 7, 9 y 11 sumo 2 cada vez que se avanza en la secuencia, análogamente para el segundo caso, mientras que el tercer caso decrece la secuencia de 2 en 2 desde 20, es decir, cada vez se resta 2 hasta llegar al 12.

Figura 8. Actividad extraída del texto Sumo Primero (Isoda y Estrella, 2020a)

Como aproximación curricular, el razonamiento algebraico puede situarse en las habilidades de argumentar y comunicar al tener que expresar oralmente o con texto escrito el resultado del descubrimiento de patrones y regularidades, como también en la habilidad de modelar al tener que identificar regularidades en expresiones geométricas y numéricas. (Ver Figuras 9 y 10)

	1° año básico	2° año básico	3° año básico	4° año básico
ARGUMENTAR Y COMUNICAR	d. Describir situaciones del entorno con lenguaje matemático. e. Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones, patrones y reglas, entre otros, empleando expresiones matemáticas. f. Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados.	c. Describir situaciones de la realidad con lenguaje matemático. d. Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones, patrones y reglas, entre otros, empleando expresiones matemáticas. e. Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados.	d. Formular preguntas para profundizar el conocimiento y la comprensión. e. Descubrir regularidades matemáticas - la estructura de las operaciones inversas, el valor posicional en el sistema decimal, patrones como los múltiplos - y comunicarlas a otros. f. Hacer deducciones matemáticas de manera concreta. g. Describir una situación del entorno con una expresión matemática, con una ecuación o con una representación pictórica. h. Escuchar el razonamiento de otros, para enriquecerse y para corregir errores.	d. Formular preguntas para profundizar el conocimiento y la comprensión. e. Descubrir regularidades matemáticas, - la estructura de las operaciones inversas, el valor posicional en el sistema decimal, patrones como los múltiplos - y comunicarlas a otros. f. Hacer deducciones matemáticas. g. Comprobar una solución y fundamentar su razonamiento. h. Escuchar el razonamiento de otros, para enriquecerse y para corregir errores.

Figura 9. Habilidad de argumentar y comunicar relacionada con álgebra (Mineduc, 2012).

	1º básico	2º básico	3º básico	4º básico
MODELAR	g. Aplicar modelos que involucren sumas, restas y orden de cantidades. h. Expresar, a partir de representaciones pictóricas y explicaciones dadas, acciones y situaciones cotidianas en lenguaje matemático.	f. Aplicar y seleccionar modelos que involucren sumas, restas y orden de cantidades. g. Expresar, a partir de representaciones pictóricas y explicaciones dadas, acciones y situaciones cotidianas en lenguaje matemático.	i. Aplicar, seleccionar y evaluar modelos que involucren las cuatro operaciones y la ubicación en la recta numérica y en el plano. j. Expresar, a partir de representaciones pictóricas y explicaciones dadas, acciones y situaciones cotidianas en lenguaje matemático. k. Identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas.	i. Aplicar, seleccionar, modificar y evaluar modelos que involucren las cuatro operaciones con números naturales y fracciones, la ubicación en la recta numérica y el plano y el análisis de datos. j. Expresar, a partir de representaciones pictóricas y explicaciones dadas, acciones y situaciones cotidianas en lenguaje matemático. k. Identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas.

Figura 10. Habilidad de modelar relacionada con álgebra (Mineduc, 2012).

SECUENCIAS CON REGULARIDAD Y PATRONES

Las regularidades y los patrones son conceptos que pueden estar desde los primeros años de escolaridad porque su formulación es posible de llevar a cabo por niñas y niños, no contradiciendo generalmente los desarrollos psicomotor y cognitivo propios de los estudiantes de ese rango etario. Las regularidades pueden estar hechas de material concreto para que se permita la manipulación y se pueda descifrar algún patrón, como también ser los primeros esbozos para una construcción del lenguaje algebraico. En consecuencia, la incorporación temprana de tareas matemáticas que involucren regularidades y patrones supondrá un avance importante en el desarrollo del razonamiento algebraico, ya que dichos conceptos son fundamentales en la construcción de la matemática escolar por la versatilidad que poseen al estar presentes en otros ejes temáticos del currículo, e inclusive, también son propios de la cultura humana.

Por ejemplo, la Figura 11 presenta un bosquejo de friso diaguita formado por ganchos que salen de triángulos llenos con tintura negra y separados por líneas paralelas, verticales y poligonales. ¿Cuál es el patrón?

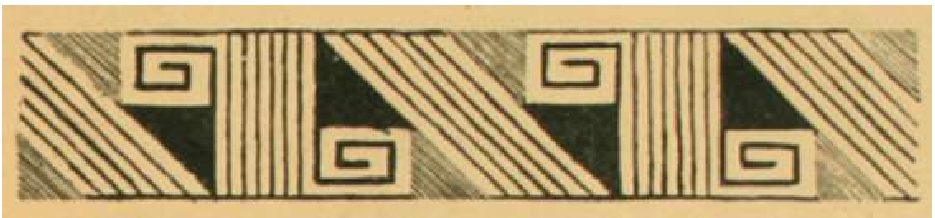


Figura 11. Bosquejo friso diaguita (Gutiérrez, s.f., p. 17)

Una secuencia es una continuidad de elementos bajo una cierta regla de orden o patrón. Sin embargo, hay secuencias aleatorias que no será posible predecir con seguridad el evento siguiente teniendo en cuenta los anteriores.

Existen aproximaciones conceptuales sobre secuencias con regularidad y patrones. Por ejemplo, Cortegana (2019) menciona que existen diferentes clases de secuencias, entre ellas:

SECUENCIAS NUMÉRICAS
Tienen números ordenados, según alguna regla fija de formación.

Ejemplos:
0, 3, 6, 9, 12, (...). Esta secuencia corresponde a números múltiplos de tres en sentido creciente.
5, 8, 11, 14, 17, (...). Esta secuencia corresponde a números desde 5 y que en un sentido creciente aumenta 3 cada vez, esto es $5+3n$ con $n \in N$.
49, 42, 35, 28, 21, (...). Esta secuencia corresponde a números múltiplos de siete en sentido decreciente.
28, 23, 18, 13, 8, (...). Esta secuencia corresponde a números desde 28 y que en un sentido decreciente disminuye 5 cada vez, esto es $28-5n$ con $n \in N$.

SECUENCIAS DE ELEMENTOS
Tienen un criterio de orden implícito o explícito de forma sucesiva, creciente o decreciente según alguna característica.
Ejemplos:
a A b B c C d D (...). La secuencia corresponde a letras ordenadas alfabéticamente alternando minúsculas y mayúsculas.
 (...). La secuencia corresponde a plátanos que se ordenan según los criterios de color (negro/blanco) y forma (cerrado/abierto).

SECUENCIA DE EVENTOS
Tienen un criterio de orden siguiendo una secuencia lógica. Por ejemplo, los días de la semana o los meses del año, entre otros.

SECUENCIA FIGURAL
Tienen un orden de elementos figurales en una posición específica. Por ejemplo:

 (...)

La secuencia corresponde al orden pato-gato-perro.

A la matemática se le define como la ciencia de los patrones, en el sentido de Devlin (1985) citado en Cortegana (2019). Asimismo, Steen (1988, p. 611) indica que la matemática “ya no es solo el estudio de los números y el espacio, la matemática se ha convertido en la ciencia de los patrones, con la teoría construida sobre relaciones entre patrones y aplicaciones derivadas del ajuste entre patrón y observación”.

Los patrones son una serie de soluciones a problemas que se presentan de manera recurrente, los cuales están basados en experiencias acumuladas y son procesos centrales de la matemática. Existen varios tipos de patrones, algunos cualitativos y otros cuantitativos.

PATRONES NUMÉRICOS (CUANTITATIVOS)

Implican el reconocimiento de propiedades de una colección de números. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, (...)

PATRONES ENTRE FIGURAS Y FORMAS GEOMÉTRICAS (CUALITATIVOS)

Permiten identificar y examinar algunas propiedades referidas a una colección figural. Por ejemplo, el atributo forma presente en una colección de figuras geométricas.

ACTIVIDADES REFERIDAS A SECUENCIAS Y PATRONES

Los patrones en una secuencia con regularidad no siempre poseen un solo atributo cuando son de naturaleza cualitativa, lo cual supone un grado de complejidad que puede progresar. Por ejemplo, en la Figura 12 muestra una tarea que da cuenta de ello.

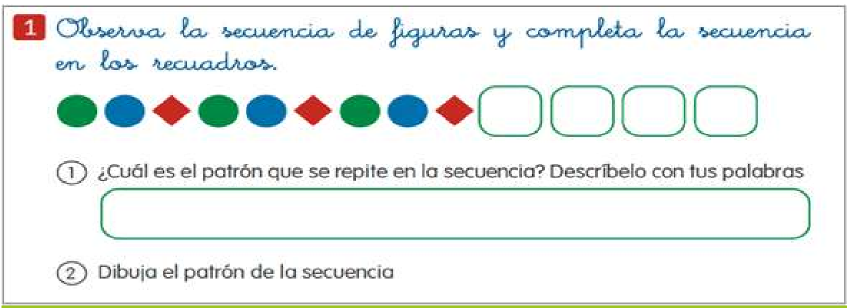
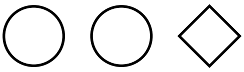


Figura 12. Actividad extraída del texto Sumo Primero (Isoda y Estrella, 2020b, p.38)

La tarea consiste en completar una secuencia que presenta un patrón de recurrencia que contiene dos atributos variables: forma y color. Se pide al estudiante que observe la secuencia con regularidad y que describa el patrón que está presente para finalmente dibujarlo en la secuencia restante por completar.

Dado que el patrón abarca dos atributos, es posible que el estudiante reconozca que a continuación viene un elemento circular y que se equivoque respecto del color. Esto último hace notar la importancia del uso de lápices de colores en este caso, ya que se utilizan los colores verde, celeste, rojo. Igualmente, notar que esta tarea considera dos registros de representación, esto es, un registro que guarda relación con las palabras referidas a la descripción del patrón (registro verbal) y otro registro con las figuras que expresan el patrón en la secuencia (registro figural), ver Tabla 1.

Tabla 1. Registro de Representación del Patrón (Elaboración propia)

Tipo de patrón	Registro de Representación del Patrón	
	Verbal	Figural
Patrón con atributos forma - color	círculo verde, círculo azul y cuadrado rojo	
Patrón con atributo forma	círculo, círculo y cuadrado	
Patrón con atributo color	verde, azul y rojo	

Es importante destacar que los patrones cualitativos no solamente pueden ser visuales, sino también pueden ser sonoros e involucrar otros sentidos. En ese sentido, una tarea puede consistir en que niñas y niños puedan transferir un patrón del tipo ABBAABBA (...) a un patrón sonoro, por ejemplo: palmada-silbido-silbido-palmada-palmada-silbido-silbido-palmada- (...); o también a uno kinestésico, por ejemplo: saltar hacia atrás, hacia adelante, hacia adelante, hacia atrás, hacia atrás, hacia adelante, hacia adelante, hacia atrás, (...). La versatilidad de este contenido es amplia porque no solo está presente en la matemática escolar, sino que también puede hallarse en la música, en la educación deportiva y otras actividades humanas.

Si se toma un patrón de naturaleza cuantitativa, se puede hallar un problema tan cotidiano como saber cuántas personas se pueden sentar alrededor de una mesa, como se aprecia en Figura 13 donde los círculos representan la cantidad de personas y los rectángulos representan la cantidad de mesas. La lectora y el lector podrán percibir cómo el razonamiento algebraico puede estar inmiscuido en dicho problema al preguntarse, por ejemplo: ¿Cuántas personas podrían sentarse alrededor si fuesen 15 mesas?

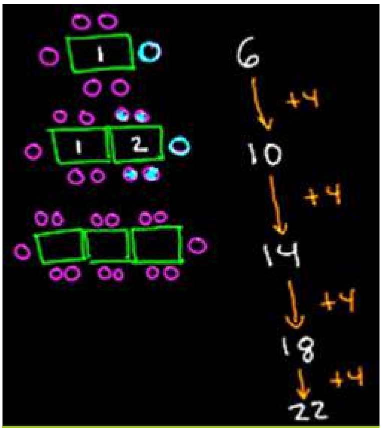


Figura 13. Patrones matemáticos desde la plataforma Khan Academy[1]

1 Fuente: https://es.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-math-reasoning/pre-algebra-number-patterns/v/math-patterns-example-1

REFLEXIONES FINALES

Desarrollar el álgebra tempranamente es un desafío docente en educación básica, no solo por la incorporación de contenidos de álgebra en el tránsito de lo concreto a lo pictórico y a lo simbólico, sino también porque ha de evitarse discontinuidades durante el aprendizaje algebraico.

La enseñanza para el aprendizaje del álgebra en una temprana edad toma un interés especial dentro de la Didáctica de la Matemática y el quehacer docente, en cuanto se hace necesario contar con tareas matemáticas con el propósito de que niñas y niños vivan situaciones didácticas de secuencias regulares con patrones cualitativos y cuantitativos, pues estos conceptos versátiles son claves para pensar algebraicamente, en tanto, se descubren o inventan nuevas formas de representar la realidad atendiendo a relaciones entre cantidades, al reconocimiento de estructuras, al estudio sobre cambios, a la generalización, resolución de problemas, modelización, justificación y poder predecir algunos fenómenos.

Asumir las secuencias y patrones como la mejor alianza para trabajar ideas y principios de naturaleza algebraica a temprana edad es importante para el diseño de enseñanza, pues además abarca la búsqueda de números desconocidos y el estudio de relaciones funcionales en secuencias con regularidad y patrones. Así, niñas y niños tienen la oportunidad de enfrentarse a problemas significativos que los guíen a encontrar la necesidad de desarrollar estrategias cada vez menos concretas y más abstractas para hallar un conjunto solución y así acceder a un conocimiento algebraico cada vez más avanzado en la medida que progresan en su formación matemática.

Finalmente, como se pudo apreciar en el presente capítulo, la matemática puede ser atribuida a la ciencia de los patrones, tal que el quehacer de la comunidad que practica y hace matemática se centra en la búsqueda de patrones en números, el espacio, las ciencias, las computadoras, y en la imaginación. De hecho, las aplicaciones de la matemática utilizan patrones y sus relaciones para producir estructuras matemáticas duraderas que permiten explicar y predecir fenómenos naturales ajustables a modelos (Steen, 1988).

REFERENCIAS

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. En M. Høines y A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen University College. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489698.pdf

Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Ediciones Morata.

Carraher, D., y Schliemann, A. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 193-196). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54

Cortegana, M. (2019). *Comprendemos y completamos patrones numéricos hasta el 50.* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Trujillo. Recuperado de http://dspace.unitru.edu.pe/bitstream/handle/UNITRU/15317/CORTEGANA%20TORRES%20MIRIAM%20LILIANA.pdf?sequence=1

Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive of History of Exact Sciences*, *16*(3), 189-200. Recuperado de https://link.springer.com/article/10.1007/BF00328154

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Gutierrez, A. (s. f.). *Dibujos indígenas en Chile*. Recuperado de http://www.memoriachilena.gob.cl/archivos2/pdfs/MC0054980.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 1° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME1_web.pdf

Isoda, M., & Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 27-32). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_6

Ministerio de Educación (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/270?show=full

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-177735_archivo_01.pdf

Schwartz, J., y Yerushalmy, M. (1992). Getting Students to Function in Algebra. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Education*, (pp. 261-289). Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Judah_Schwartz/publication/266439744_GETTING_STUDENTS_TO_FUNCTION_IN_ALGEBRA/links/551bd18f0cf20d5fbde21426.pdf

Soares, J., Blanton, M., y Kaput, J. (2005). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics*, *2*(5), 228-235. Recuperado de https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/12/5/article-p228.xml

Steen, L. (1988). The Science of Patterns. *Science. 240*, 611-616. Recuperado de http://www.steen-frost.org/Steen/Papers/98algebra_mn.pdf

Vila, A., y Callejo, M. L. (2004). *Matemática para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

Modelación de datos y conceptos básicos para el desarrollo de la estadística a temprana edad

JORGE OLIVARES-AGUILERA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

La estadística es la ciencia metodológica encargada del manejo de datos empíricos nacidos en un contexto que se debe analizar en beneficio de la resolución de un problema. Su enseñanza, es un factor clave en el siglo XXI debido a la globalización, los avances tecnológicos y al constante uso de datos. Un ejemplo de aquello, es la información entregada por la plataforma statista donde calcula que, en la actualidad (año 2021), en un solo minuto se envían 197,6 millones de mails y 69 millones de mensajes por las aplicaciones de WhatsApp o Facebook Messenger, se comparte alrededor 695.000 historias por Instagram y se suben 500 horas de contenido a la plataforma de YouTube; una muestra insignificante del ritmo frenético con el que se producen y comparten datos hoy en día. En consecuencia, surge la necesidad de formar personas capaces de interpretar la información entregada por los datos, para tomar decisiones de manera crítica y asertiva ante el constante flujo de información que se genera día a día.

Debido a los pasos agigantados de la globalización, la estadística es un motor central en el desarrollo de los ciudadanos y su enseñanza debe ser impartida desde temprana edad. Enseñar estadística desde el primer ciclo de educación básica es crucial para que cada estudiante se familiarice con el manejo de datos, su lectura e interpretación. En otras palabras, la introducción temprana a esta disciplina fomenta la alfabetización estadística, promoviendo importantes habilidades básicas como la comprensión de información, su organización y significado. Una manera apropiada de introducir al estudiante en esta disciplina es mediante el uso del ciclo investigativo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones), que incentiva la modelación de datos. Esta modelación puede ayudar al estudiante a desarrollar su razonamiento en la estadística informal temprana y en la comprensión de conceptos claves como la incertidumbre, el contexto, los datos, la distribución y la variabilidad, entre otras (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

El presente capítulo, en una primera instancia, sintetiza la progresión curricular estadística en el primer ciclo de Educación Básica de Chile. Posteriormente, hace referencia a elementos claves para comprender la estadística como una ciencia que promueve un razonamiento y pensamiento propio de la disciplina mediante la modelación de datos, abordando algunos conceptos sustanciales (el contexto, la variabilidad y la incertidumbre), comúnmente entrelazados y necesarios para interpretar y analizar una situación problema concerniente al ámbito estadístico. Así también, se ilustran algunas medidas de tendencia central (MTC) que son frecuentemente utilizadas por las personas (media, moda y mediana), se profundiza en ellas, para entender en qué momento es apropiado su uso y qué posibles errores se pueden cometer al no comprenderlas apropiadamente. Finalmente, se plantea una tarea matemática (TM) cuyo objetivo es el fortalecimiento de la modelación de datos mediante la implementación del ciclo investigativo PPDAC en un contexto para estudiantes de primer ciclo de enseñanza básica. En la TM, a modo de sugerencia, se especifican algunos resultados relevantes que serán de ayuda para una futura implementación.

SÍNTESIS DE LA PROGRESIÓN CURRICULAR ESTADÍSTICA EN PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA EN CHILE

Como se hace referencia en el capítulo VI del primer tomo, el currículum escolar chileno en el eje temático de Datos y Probabilidad de la asignatura de Matemática, promueve la recolección, registros y organización de datos en los primeros años escolares para posteriormente, progresar en el diseño y aplicación de encuestas, resguardando la coherencia respecto al grado de dificultad. La siguiente Tabla 1, detalla los objetivos de aprendizajes para los primeros cuatro años de educación básica, referente al eje temático mencionado previamente.

Tabla 1. Objetivos de aprendizaje considerados para el eje temático Datos y Probabilidad de 1° a 4° año básico desde MINEDUC (2012).

Niveles de Educación Básica			
1° año	2° año	3° año	4° año
OA19. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	OA20. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.	OA23. Realizar encuestas y clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barras.	OA25. Realizar encuestas, analizar los datos, comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.
OA20. Construir, leer e interpretar pictogramas	OA21. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. OA22. Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.	OA24. Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos. OA25. Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada.	OA26. Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones. OA27. Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.
		OA26. Representar datos usando diagramas de puntos.	

LA ESTADÍSTICA COMO DISCIPLINA METODOLÓGICA

La estadística es una disciplina que está al servicio de otras áreas, provee herramientas e ideas coherentes para el manejo de datos empíricos, por ejemplo, datos obtenidos al contar o medir fenómenos naturales con instrumentos. Esta disciplina está sujeta a situaciones concernientes a la variabilidad e incertidumbre que, mediante la recolección y análisis de datos, promueve la realización de inferencias inductivas. Así también, busca hacer predicciones y explicaciones a problemas nacidos del contexto, investigar las causas de la variación y con ello, generar una mayor comprensión de dicho contexto. Su objetivo, es el de apoyar en la toma de decisiones en presencia de incertidumbre y la comprensión de fenómenos ligados a la realidad (Del Pino y Estrella, 2012).

¿CÓMO DESCRIBIR EL RAZONAMIENTO Y PENSAMIENTO ESTADÍSTICO DE UN ESTUDIANTE?

Para un docente es natural formular esta pregunta, su respuesta no es sencilla. En las últimas décadas, diversas investigaciones han tratado de responder tal pregunta, específicamente la realizada por Pfannkuch y Wild (2004) en la que proporcionan un modelo que describe este razonamiento y pensamiento mediante cuatro dimensiones:

i. Un ciclo investigativo (propuesto en el capítulo V y que se hará mención posteriormente).
ii. Promover la búsqueda y comprobación constante de preguntas e hipótesis a partir de los datos, los análisis realizados y los resultados obtenidos.
iii. Actitudes necesarias en un trabajo estadístico, por ejemplo: el escepticismo o la falta de confianza frente a un fenómeno, una mentalidad abierta a las posibles perspectivas que podrían surgir en el transcurso del ciclo investigativo, la perseverancia por encontrar la verdad o una posible solución al problema planteado, un espíritu crítico capaz de entregar argumentos desde la objetividad a base de evidencias, la curiosidad característica de todo investigador, entre otras.
iv. Los modos fundamentales de un razonamiento estadístico:

    a. Reconocimiento de la necesidad de los datos. La toma de decisiones y el emitir un juicio fiable sobre situaciones reales, se deben fundamentar desde la recopilación y análisis de los datos, ya que estos proporcionan información relevante sujeta al contexto.

b. La transnumeración de los datos. Referido al cambio entre representación para promover la comprensión, es decir, pensar en la reclasificación de los datos, transformarlos en tablas, gráficos, entre otras, para así obtener una comprensión más detallada del fenómeno a investigar.
c. La percepción de la variación. Alude a la recolección adecuada de los datos y a los juicios solidos que surgen de estos, considerando las fuentes de la variabilidad e incertidumbre provenientes de los datos.
d. Un razonamiento con modelos estadísticos. Da cuenta de la reflexión proveniente de la reproducción experimental de los fenómenos que observamos, de la forma más exacta posible, en base a los datos obtenidos.
e. La integración de la estadística y el contexto.

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE ESTADÍSTICO EN LOS ESTUDIANTES?
Como fue mencionado en el capítulo VI del primer tomo, el ciclo investigativo PPDAC describe los procedimientos a través de los cuales un estadístico trabaja (para este caso un estudiante), como también el pensamiento que implementa en la construcción de su aprendizaje (Pfannkuch y Wild, 2004). En una primera instancia, se propone que el estudiante aborde un problema estadístico originado desde el contexto, este debe ser relevante para él, ya que lo involucra y lo responsabiliza en su resolución. Se construye un *plan* de acción que es de utilidad para obtener, registrar y organizar la información necesaria para comprender el problema. Posteriormente, mediante la recopilación de datos, se extrae cuanta información sea posible de ellos, se filtran y se observan con la finalidad de explorar en mayor detalle las variables involucradas y así, dar paso al análisis de datos. En esta etapa, se generan hipótesis nuevas basadas en las observaciones que se disponen mediante el uso de representaciones de tablas, gráficos, entre otras. Finalmente, en la etapa de conclusión, se genera y comunica la interpretación del análisis de los datos para dar respuesta a la problemática inicial.

La intención del ciclo investigativo PPDAC, es la de solucionar la problemática (en la medida de lo posible) por medio de las modificaciones al sistema desde el análisis de los datos. Para llevar esto a cabo, es necesario proponer proyectos donde el estudiante, mediante un análisis inductivo, adquiera los conocimientos estadísticos desde su propia experiencia (Batanero y Díaz, 2011). Involucrar al estudiante en la construcción de su conocimiento, promueve un pensamiento crítico y objetivo, incentiva la alfabetización y el razonamiento estadístico, estimula el desarrollo de habilidades tales como la argumentación y la representación por medio del análisis de las evidencias estadísticas de los datos (Vidal-Szabó, Kuzniak, Estrella y Montoya, 2020).

A continuación, se detalla una experiencia propuesta por Alsina y Vásquez (2017). La situación original planteada se modifica para dar cuenta las etapas del ciclo investigativo PPDAC:

Experiencia: ¿Qué tipo de vehículos pasan por la rotonda?

Problema: Desconocimiento de los vehículos que pasan cerca de la escuela ya sea a una hora determinada o durante todo el día. La experiencia surge a raíz del interés de los estudiantes de primero básico por saber qué tipos de vehículos pasan en la rotonda que está justo al lado del patio de la escuela.

Plan: En primer lugar, se dialoga con los estudiantes para que construyan sus propias predicciones e inferencias. Posteriormente, se los invita a salir para contabilizar los vehículos que circulan por la rotonda durante un periodo de tiempo previamente establecido y que ellos mismos controlan con un reloj de arena.

Datos: En grupos de tres personas se responsabilizan por un tipo de transporte y van registrando su frecuencia (marcando una cruz o un palito cada vez que pasa un vehículo).

Análisis: Una vez recogidos los datos, la maestra plantea la pregunta que activa un pensamiento estadístico: ¿Qué tipo de vehículo pasará más durante el día? De esta manera, mediante la organización y exploración de los datos, los estudiantes deben inferir su respuesta. Para guiar el desarrollo de esta pregunta se puede generar preguntas del tipo: ¿Qué debemos hacer con la información que recopiló cada grupo? o bien ¿Cómo podemos organizar la información que recopiló cada grupo?, estas preguntas incentivan la organización de los datos que será de utilidad para la comprensión de la situación.

A partir de los resultados que aporta cada grupo se anotan todos los datos como se muestra en el ejemplo de la Figura 1:

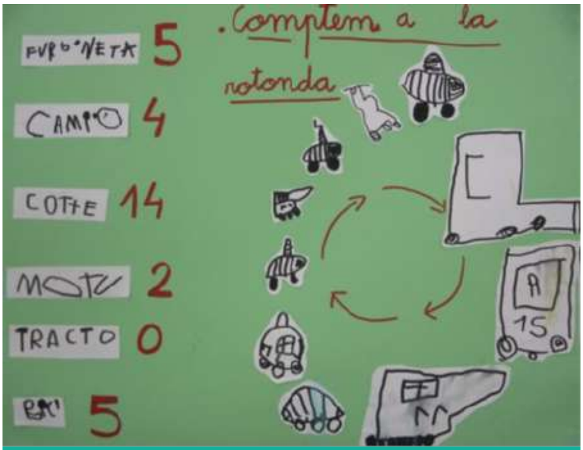


Figura 1. Ejemplo de organización de los datos.

En la Figura 1 se detalla lo siguiente: "furgoneta 5, camión 4, coche 14, moto 2, tractor 0, bici 5". Así también, al lado izquierdo, se logra apreciar la clasificación de las categorías de las variables con su respectiva frecuencia absoluta y al lado derecho, se muestra una infografía que da a entender los tipos de vehículos (y en algunos casos las cantidades de estos), que pasaron por la rotonda en el tiempo establecido.

Cada grupo debe interpretar los resultados a partir del planteamiento de preguntas tales como: ¿Qué tipo de vehículo ha pasado más? ¿Qué tipo de vehículo ha pasado menos?, con el objetivo de incentivar la lectura de los datos.

Conclusiones: En esta etapa los estudiantes interpretan y dan a conocer al curso sus análisis retomando la pregunta central. Se espera que sus conclusiones estén sustentadas desde un análisis frecuencial, por ejemplo, los estudiantes podrían concluir que: "*es posible* que durante el día pasen más coches", ellos deben inferir que el tipo de vehículo que pasa más durante el día podría ser el coche, debido a que representa la mayor frecuencia de vehículos en el tiempo establecido, y el uso de la palabra *posible* hace referencia de un pensamiento inferencial al no tener un conocimiento total de la situación puesto que, no pueden contabilizar la cantidad de vehículos que transitan durante todo el día. Así también, se validan (o invalidan) las hipótesis generadas anteriormente y se proponen nuevas ideas que pudieron surgir en el desarrollo de la actividad.

¿QUÉ ES LA MODELACIÓN DE DATOS?

Modelar datos sirve para describir comportamientos, disminuir la incertidumbre generada por la variabilidad de los datos, desarrollar una comprensión científica del contexto, buscar respuestas y explicaciones del por qué se produjeron determinados resultados, así como también, predecir futuros comportamientos o desenlaces. Desde esta perspectiva, Wild y Pfannkuch (1999) expresan que el modelado de datos corresponde al razonamiento estadístico que la persona desarrolla ante una situación de la vida real, es decidir, qué aspectos de una situación son relevantes para un análisis, cómo estos se estructuran, cómo se relacionan, cómo se representan, cómo se miden, cómo se interpretan los resultados y qué se puede concluir de la situación desde el análisis de los datos (Lehrer y Schauble, 2007). Por lo tanto:

El modelado de datos en el aula implica involucrar a los niños directamente en el planteamiento de preguntas, en la identificación de atributos de los fenómenos que se logran apreciar, midiéndolos y estructurándolos, y luego componiendo, revisando y comunicando los resultados. La selección de los atributos es un componente fundamental de la modelación de los datos. (Leavy y Hourigan, 2017, p.163)

CONSIDERACIONES PARA MODELAR DATOS

La modelación de datos sirve para poseer una interpretación más detallada de la realidad, ayuda a comprender, abstraer e incluso sintetizar algunos aspectos importantes de ella. En concordancia con lo anterior, enseñar a los estudiantes a ser capaces de modelar la información extraída de su contexto es de vital importancia, de esto último Dantal (1997) propone cinco pasos para su enseñanza, estos son ejemplificados desde la experiencia propuesta previamente:

1. *Observación detallada de la realidad:* Los estudiantes examinan el acontecer en su escuela, observan situaciones que para ellos son relevantes y dignas de analizar, por ejemplo, los tipos de vehículos que pasan por la rotonda que está junto a su escuela.
2. *Una descripción simplificada de ella:* El contexto nos provee de información que no necesariamente será de ayuda para dar respuesta a la pregunta, por ejemplo, la marca de cada vehículo o el color de estos. Desde esta perspectiva, los estudiantes deben ser capaces de filtrar la información de tal modo que, prevalezcan las características que ayudan a agrupar los vehículos (coches, camiones, bicicletas, entre otros).
3. *Construir un modelo:* Proviene de los datos tomados del contexto real. Los estudiantes construyen un modelo de tabla, para leer la información recabada previamente y la transcriben a una representación de lista e infografía.
4. *Un trabajo matemático con el modelo:* La representación de la tabla de datos, la lista y la infografía, sintetizan la información y dan claridad de la frecuencia de cada vehículo. (Se debe recordar que la matemática para la estadística es una herramienta que está al servicio de ella, al igual que ocurre, por ejemplo, con la Física). En consecuencia, se espera por parte de los estudiantes, poder predecir el comportamiento de los vehículos que pasan por la rotonda desde las frecuencias obtenidas.
5. *Interpretar los resultados en la realidad:* Mediante el registro frecuencial, dan cuenta del comportamiento del tránsito de los vehículos en la rotonda en un tiempo determinado. Esta información les ayuda para responder a la pregunta central de la actividad (¿Qué tipo de vehículo pasará más durante el día?).

Es preciso ser cautos en el desarrollo de estos pasos, ya que puede ser un obstáculo en el aprendizaje apresurar el tránsito entre ellos o relevar uno por sobre otro, comúnmente, se otorga énfasis al desarrollo de los pasos 3 y 4 restándole valor a los demás. No obstante, todos los pasos son igual de importantes en el aprendizaje de la modelación y se debe siempre recordar que este proceso ayuda a describir e interpretar la realidad, a extraer información relevante de ella, a analizarla, a levantar hipótesis y a generar conclusiones que ayudan a resolver o disminuir la problemática nacida del contexto (Batanero, Díaz, 2011).

CONTEXTO, VARIABILIDAD E INCERTIDUMBRE: ¿QUÉ SIGNIFICAN ESTOS CONCEPTOS EN EL ÁMBITO ESTADÍSTICO?

CONTEXTO

El contexto es todo aquello que rodea, ya sea física o simbólicamente a un fenómeno, proporciona significado y otorga información relevante con respecto a los datos (Franklin et al., 2005). En la enseñanza de la estadística en edad temprana, es importante que los estudiantes se enfrenten a problemas nacidos desde el contexto, es decir, su acercamiento debe ser desde una situación problemática cercana, capaz de crear y promover la experimentación de ideas estadísticas informales que dan paso al fortalecimiento de conceptos básicos que se desarrollarán posteriormente (Makar, 2018).

Existen tres tipos de contextos: contexto de datos, contexto de la experiencia de aprendizaje (Pfannkuch 2011), y contexto del diseñador (Wilkerson y Laina 2018). El contexto de datos se refiere a todo lo que acontece a una situación en el mundo real donde emerge el problema y los datos que se analizan. El contexto de la experiencia de aprendizaje se refiere a la tarea propuesta, al entorno de aprendizaje y los conocimientos previos de los estudiantes, sus experiencias personales y las preferencias de aprendizaje que traen para comprometerse a solucionar la problemática. Finalmente, el contexto del diseñador forma parte del constructo cognitivo de los estudiantes e influye directamente en sus procesos de razonamiento. Por ejemplo, cuando interactúan con un software que promueve el razonamiento estadístico (Excel, GeoGebra, TinkerPlots, entre otros), ellos tienden a implementar las mismas representaciones que otorga dicho software, por lo que es de vital importancia siempre tener una vigilancia sobre los softwares utilizados y sobre las distintas representaciones que estos proveen. Los tres tipos de contextos interactúan e incentivan el aprendizaje de los estudiantes sobre el razonamiento a partir de los datos (Pfannkuch et al., 2018).

El contexto del problema es un factor clave a considerar en la construcción de entornos de aprendizaje exitosos para los estudiantes. En particular, la modelación de datos requiere estar vinculada a un rico contexto problemático (Leavy y Hourigan, 2016). Cabe resaltar que las experiencias de modelación de datos incentivan los procesos estadísticos significativos debido a que los estudiantes construyen ideas desde las interpretaciones que otorgan a las representaciones, además promueve un análisis conceptual por sobre uno procedural, es decir, en lugar de simplemente aplicar las ideas previamente enseñadas por procedimientos, los estudiantes dan significado a los datos (English, 2010).

VARIABILIDAD Y SUS FUENTES

La variabilidad se entiende como la predisposición de un conjunto de datos a cambiar, es decir, cómo un fenómeno se modifica respecto a su estado inicial. Desde este punto de vista, hay que considerar la omnipresencia de la variabilidad, es decir, se debe reconocer que la variabilidad está inmersa en muchos fenómenos que acontecen en el día a día (Batanero y Díaz, 2011). Esto último hace referencia a la variabilidad como una característica que puede cambiar en un determinado grupo de individuos o hechos, por ejemplo: las distintas alturas que tienen ciertos estudiantes de tercero básico (conjunto de datos), estas serán distintas entre sí debido a diferentes factores (genética, alimentación, horas de sueño, entre otras), más aún, si registramos sus alturas a comienzo de año y las comparamos al final de este, es muy probable apreciar un crecimiento en sus estaturas (cambio en los datos iniciales).

Antes de ahondar en las fuentes de la variabilidad, es necesario hacer una distinción entre dispersión (variación) y variabilidad: La dispersión es "identificar y medir la variabilidad para predecir, explicar o controlar un fenómeno. El término de variabilidad se utiliza para el fenómeno general del cambio y dispersión para describir el efecto total del cambio" (Burrill y Biehler, 2011, p. 62). Por ejemplo, si nos referimos a las alturas de los jóvenes chilenos y las representamos en una gráfica, la variabilidad hace referencia al cambio entre sus alturas y la dispersión corresponde a la distancia existente entre las distintas alturas. También, es importante resaltar que los estudiantes deben tener una comprensión acabada de la dispersión que acontece en el fenómeno y la incertidumbre presente en él para así efectuar una recopilación adecuada de los datos y hacer juicios apropiados a partir de estos.

Franklin et al. (2005) proponen que la variabilidad de los datos puede provenir de distintas fuentes, algunas de ellas son:

1. Por Medición: Se da cuando se mide repetidas veces sobre un mismo ítem, ya que se observa que las diversas medidas no son iguales, varían porque el instrumento de medida no es muy fiable o adecuado, o bien, posee

intrínsecamente un error de medida, e incluso, puede darse porque el sistema donde se hace la medida está en constante cambio. Por ejemplo, si se les solicita a tres estudiantes que midan el largo del patio de la escuela con una regla de 20 centímetros, sus mediciones no serán iguales y precisas debido a que el instrumento utilizado no es confiable para medir distancias grandes a causa del error que puede generar en su utilización.

2. Por la Naturaleza de los Datos: Se da de manera natural, o sea, es inherente o intrínseco a los datos. Ejemplo de aquello puede ser la comparación de las estaturas de los chilenos con las de los rusos, en promedio, las estaturas de estos últimos son mayor que la de los chilenos, estas estaturas están intrínsecamente relacionadas con la genética de cada individuo (el entorno, la alimentación, los ancestros y las circunstancias del lugar condicionan la evolución genética de las personas con el pasar de los siglos), desencadenando una variación en sus alturas.
3. Por Inducción: Se induce por manipulación de factores que inciden en los datos. Por ejemplo, cuando se desea comprobar la efectividad de una vacuna, generalmente, existen dos poblaciones que sirven de ayuda para corroborar su efectividad, una es de control pues se suministra un placebo y a la otra se suministra la vacuna, la idea es poder comparar la variabilidad natural con la variabilidad que se induce al suministrar la vacuna y con ello concluir si esta es efectiva, tiene algún efecto secundario y si no representa algún perjuicio para la salud de las personas.
4. Por Muestreo: Cuando se toman diferentes muestras de una misma población, estas resultan ser variadas. Por ejemplo, cuando se desea hacer una encuesta en la región de los Lagos[1] de Chile sobre ciertos candidatos a la presidencia, es poco práctico y rentable realizar tal encuesta a las 828.708 personas que la conforman, es por esto que se selecciona una muestra para su implementación, cierta cantidad de gente, por ejemplo: las personas que transitan en una esquina de una calle altamente congestionada, de esto último se ha de imaginar que se implementa a 200 personas el día Lunes, y otras 200 personas el día Martes, los resultados de las encuestas entre estos dos días tendrán variación entre ellas, es decir, no existirá la misma proporción de preferencias entre los candidatos.

1 Dato extraído de: http://resultados.censo2017.cl/Region?R=R10

INCERTIDUMBRE

La incertidumbre corresponde a la falta de certidumbre, es decir, el desconocimiento (total o parcial) y la poca claridad de un fenómeno, corresponde a la imperfección en el conocimiento sobre el estado o los procesos de la naturaleza. La noción de incertidumbre es amplia e incluye una gran variedad de fenómenos asociados a la aleatoriedad, y cada vez que existe necesidad de enfrentar situaciones que presentan incertidumbre se activa el pensamiento probabilístico para medir qué tan incierta es una situación (Kazak et al., 2018). Ejemplo de aquello puede ser cuando una persona va a la costa de la playa una mañana nublada, ella puede pensar que probablemente llueva durante el transcurso del día debido a que el cielo está nublado y las nubes presentan un color gris oscuro.

TAREAS MATEMÁTICAS QUE PROMUEVEN UN RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

A continuación, se plantean tres actividades que profundizan y ponen en práctica los conceptos tratados previamente. Así también, en la primera actividad, se aborda el uso apropiado de algunas medidas de tendencia central (MTC): moda, mediana y media aritmética; en la segunda actividad, se promueve la construcción de algún criterio desde el análisis objetivo del contexto y finalmente, en la última actividad, se incentiva la modelación de los datos por medio del ciclo investigativo PPDAC.

CORRER 80 METROS PLANOS: ACTIVANDO LOS CONOCIMIENTOS

La siguiente tarea matemática se implementa en el taller 13 del programa SUMO primero en terreno, el objetivo de esta TM es que los docentes pongan en juego sus creencias y concepciones a base de una situación problemática, en la cual, mediante el diálogo y las confrontaciones de ideas, se espera que logren profundizar en sus conocimientos. Por otro lado, la TM aborda algunas de las medidas de tendencia central (media, moda y mediana), conceptos utilizados frecuentemente por las personas y que se comienzan a introducir conceptualmente en el primer ciclo de escolaridad. Así también, la TM sirve de ayuda para la ejemplificación de los conceptos propuestos previamente (contexto, variabilidad e incertidumbre). A continuación, en la Figura 2, se muestra la TM implementada a los docentes del programa.

Figura 2. La actividad propuesta es una modificación de la actividad de Garret y García[3] (2007).

Antes de profundizar en la TM, se hace la invitación a reflexionar en torno a la pregunta planteada, ¿Qué cree usted? ¿Qué tiempo debe considerar el profesor como mejor estimador? Cabe resaltar que no necesariamente se debe escoger algún número expuesto en la lista. Así también, se invita a reflexionar las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos y/o estadísticos presentes en la actividad?, ¿Qué dificultades podrían surgir en la implementación?, ¿Cuáles podrían ser los posibles errores que se pueden cometer al desarrollar la actividad? Son preguntas necesarias que ayudan a profundizar en los saberes que se poseen, preguntas que pueden orientar el estudio de los conceptos involucrados, como también, ayudar a identificar posibles respuestas esperadas en la implementación.

Esta TM es una modificación de la actividad propuesta por Garret y García (2007), ella pretende evaluar el uso de la media aritmética como el mejor estimador frente a un dato atípico generado por un error de medida. En la actividad existe la posibilidad que los docentes utilicen la moda y la mediana como mejor estimador, lo cual deja en evidencia una posible falta de comprensión de los conceptos, como también, existe la posibilidad de la falta de consideración del contexto y cómo este influye directamente en el análisis de los datos.

En matemática la persona intenta purificar el resultado, tratar de encontrar la generalidad del problema aislándolo del contexto, pero en estadística ocurre lo contrario. Si bien, también se busca una generalidad o algún patrón presente en la situación problema, el análisis de los datos siempre debe estar guiado por el contexto, ya que el significado de estos depende de él. Por ejemplo, si se considera

2 Concerniente al detalle que se presenta en color naranjo, los 12 segundos corresponden al tiempo promedio empleado por una niña (que entrena) de 10 a 12 años para recorrer 80 metros planos, un dato relevante para un análisis apropiado de la situación.

que una niña de 11 años tarda 12 segundos en recorrer 80 metros planos, es probable pensar que está en buena forma, que el tiempo implementado es poco considerando la distancia y su edad, por otro lado, si se considera la misma situación, pero en vez de una niña es Usain Bolt, la apreciación es totalmente distinta, se puede pensar que ya no está en su mejor momento o que presenta alguna lesión, puesto que su mejor marca de tiempo en recorrer 100 metros planos es de 9,58 segundos[3] (récord mundial del año 2009). Este puede ser un claro ejemplo de cómo el contexto condiciona el análisis de los datos, lo nutre de significado e influye en su apreciación.

POSIBLES RESPUESTAS

Usualmente las personas recurren a las MTC para describir algunos fenómenos que acontecen en la realidad, puesto que caracterizan la distribución de frecuencias mediante un valor alrededor del cual se encuentran distribuidos la totalidad de los datos. En concordancia con lo anterior, se plantea que:

> En la observación de una realidad, frecuentemente se describe al conjunto de datos con un solo número que sea representativo. Para tal fin, no se usa el valor más elevado ni el valor más pequeño como único representante, ya que sólo simbolizan los extremos más que valores típicos. Es por esto último que se busca un representante más adecuado, un valor central. Las medidas que describen al centro de la distribución se les denominan Medidas de Tendencia Central (MTC), entre las que se encuentran la Media, Mediana y Moda. (Estrella, 2008, p.7)

A continuación, se describen (grosso modo) cada una de ellas, no obstante, la comprensión de estos conceptos no se puede reducir a solo conocer las definiciones y propiedades, sino que, además, se debe reconocer los problemas donde es apropiado emplear tal concepto, su lenguaje característico, sus distintas representaciones, algoritmos y procedimientos.

- Se entiende por moda al valor que cuenta con mayor frecuencia en una distribución de datos.
- La mediana hace referencia al valor de la variable que deja el mismo número de datos antes y después que él, una vez ordenados éstos.
- La media aritmética representa en un valor las características de una variable cualitativa de un conjunto de datos y no solo corresponde al cálculo obtenido una vez sumados todos los valores de la variable y luego dividiendo por el número de observaciones (perspectiva procedimental), sino que, además, hace referencia al centro de gravedad o punto de equilibrio al coincidir con el centro del conjunto de los datos en una distribución simétrica (perspectiva conceptual).

3 Información extraída de: https://es.statista.com/estadisticas/917373/ranking-historico-masculino-de-la-prueba-de-los-100-metros-lisos-en-el-mundo/#:~:text=Con%20su%20marca%20de%209,fin%20de%20la%20temporada%202019.

LA MODA COMO REPRESENTANTE

Para la situación descrita en la actividad 1, sería posible afirmar que el dato que representa mayor frecuencia es el apropiado o el mejor candidato para representar el tiempo de esta situación, esto se puede generar debido a que el número 15 es el que más se repite y los valores restantes (a excepción del 7), están en torno a él, por lo cual, el docente puede pensar que si aproxima los valores restantes obtendrá nueve veces el 15, tomando esto como argumento. Estrella et al., (2019) plantean que, para este tipo de circunstancias, la moda es el peor candidato para representar el tiempo recorrido por la estudiante, debido a que este concepto es apropiado de utilizar en medidas nominales (como, por ejemplo: género o estado civil) y ordinales (como, por ejemplo: categorías con orden lógico mutuamente excluyentes). Otras características que posee la moda y que se debe tener en consideración es que no es afectada por los valores extremos, es decir, si se modifica el 7 y el 15,5 (primer y último valor una vez ordenados de menor a mayor), la moda seguirá siendo 15 segundos. También, la moda puede no ser única y más aún, puede no existir.

LA MEDIANA COMO REPRESENTANTE

Es posible pensar que la mediana es el mejor estimador en esta situación, no solo por la facilidad que tiene para establecerse, sino que también, por ser única en un conjunto de datos numéricos. No obstante, la mediana tiene ciertos inconvenientes en esta situación: no considera la totalidad de los datos involucrados (al fin de cuenta ¿cómo discernir qué dato es más importante de los diez expuestos?), solo toma dos de estos diez dado que es una cantidad par. Así también, la mediana es apropiada utilizar en situaciones donde los datos presenten una distribución asimétrica. En palabras simples, a excepción del 7, pareciese que todos estos están muy juntos dando la impresión de la existencia de una simetría, esto último se puede apreciar de mejor manera si se representa la información en un diagrama como se muestra a continuación en la Figura 3:

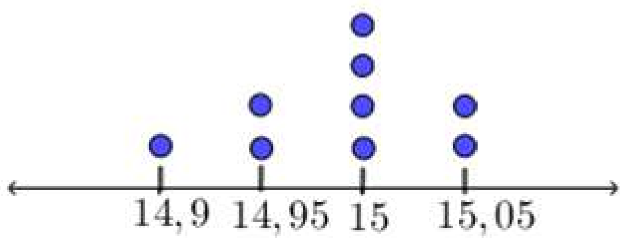


Figura 3. Diagrama para el registro de los tiempos que tardó la niña en recorrer 80 metros planos (se excluye el tiempo “7 segundos” en la representación).

Como se ejemplifica en la Figura 3, los puntos azules representan nueve de los diez estudiantes que registraron el tiempo de su compañera al recorrer los 80 metros planos (exceptuando el punto correspondiente al dato 7 segundos al ser considerado como un posible error), estos parecen cumplir con una especie de simetría en torno al tiempo 15 segundos. Finalmente, al no presentar una distribución asimétrica, la mediana no es el mejor candidato para representar la situación.

LA MEDIA ARITMÉTICA COMO REPRESENTANTE

Para esta MTC se tiene dos casos, el primero es cuando se consideran todos los datos, incluyendo el dato atípico (7 segundos, ¿En qué se puede basar para argumentar que el dato "7" es atípico?) y el segundo caso, cuando no se considera este dato atípico.

Para el primer caso, si la respuesta otorgada considera la totalidad de los datos (incluyendo el dato atípico), se evidencia que posiblemente predomine un análisis procedimental por sobre uno conceptual, es decir, se privilegia el uso del algoritmo sin tener en consideración el contexto y el cómo este influye directamente en el análisis de los datos. Esto último es de gran relevancia, puesto que no se considera que la media aritmética es un estimador poco robusto, es decir, se ve afectada con valores extremos. Para este caso, el dato atípico no solo modifica el valor de la estimación, sino que, evidencia un posible error en la medición, por ejemplo, el estudiante que registró los 7 segundos puede que haya comenzado a contabilizar el tiempo después de haber iniciado la carrera su compañera o que detuviera el cronometraje antes de cubrir los 80 metros planos. Más aún, si se considera la información entregada concerniente al contexto, se puede pensar que recorrer esta distancia en 7 segundos es poco probable de lograr porque en promedio una niña de 10 a 12 años tarda 12 segundo en completar la distancia.

Una dificultad por considerar para la media aritmética, es la tendencia a ser situada siempre en el centro de la distribución, esto solamente ocurre cuando dicha distribución es simétrica (Estrella et al., 2019). Por el contrario, si la distribución es asimétrica, no cumplirá con tal propiedad.

Concerniente al segundo caso, tomar en consideración el contexto es crucial para el análisis de los datos, la interpretación de estos depende de él. En consecuencia, la mejor estimación que representa el tiempo real recorrido por la estudiante debe ser la media aritmética teniendo en consideración el contexto de la situación:

$$\frac{15{,}05 + 14{,}95 + 15{,}05 + 15 + 15 + 14{,}9 + 15 + 14{,}95 + 15}{9} = 14{,}98\overline{3} \text{ segundos}$$

Nótese que no se ha considerado el dato 7 segundos debido a que, probablemente se concibió a causa de un error. Finalmente, la media aritmética es un buen candidato debido a que es el mejor estimador en presencia de errores de medición en una distribución simétrica.

CONSIDERACIONES CON RESPECTO A LA MEDIA ARITMÉTICA

Existen dos formas de comprender la media aritmética, una conceptual y otra procedural. Para la primera, la media aritmética se puede interpretar de dos maneras:

a. Como un reparto justo: Un valor que representa al conjunto de datos considerando a todos estos como iguales (Leavy y O'Loughlin, 2006).

La Figura 4, ejemplifica la interpretación de la media aritmética como reparto justo.

Figura 4. Interpretación de la media aritmética como reparto justo[5].

Es preciso tener en consideración el análisis realizado por Sol para encontrar el valor medio de las vueltas realizadas por día, ella modifica lo que ocurrió realmente (no corrió tres vueltas el primer día).

b. Concebir la media aritmética como un punto de equilibrio: Los valores mayores compensan a los menores, similar a un centro de gravedad (Leavy y O'Loughlin, 2006).

Por ejemplo, una profesora desea encontrar el promedio de las alturas de sus seis estudiantes, ella mide la altura de cada uno y obtiene las siguientes medidas: 120 cm,120 cm,130 cm,140 cm,150 cm y 150 cm. Posteriormente, la profesora ordena estas alturas como lo muestra la Figura 5.

4 La figura representa un fragmento de la TM propuesta en el libro del Estudiante Sumo Primero, 4° Básico. Específicamente, el registro diario de vueltas que efectuó Sol (Isoda y Estrella, 2020, p. 77).

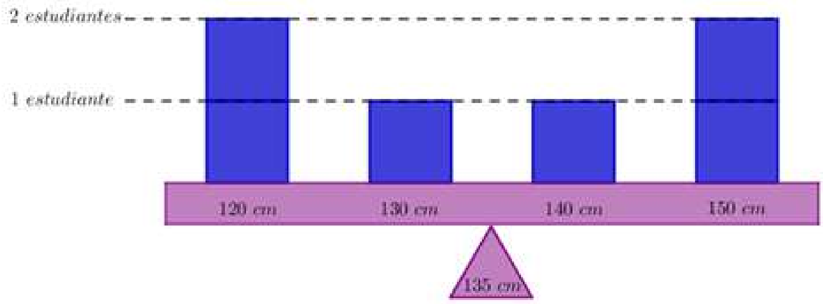


Figura 5. Representación del promedio de las alturas de seis estudiantes como punto de equilibrio. Cada cuadrado representa a un estudiante, la barra morada indica sus alturas y el triángulo simboliza el lugar donde se equilibra la barra una vez situados los cuadrados sobre ella.

Como se puede apreciar, es en los 135 centímetros donde se encuentra el punto de equilibrio o centro de gravedad, en otras palabras, el promedio de las alturas de los seis estudiantes es 135 centímetros.

Finalmente, la media aritmética puede ser comprendida desde lo procedural o procedimental, esto quiere decir, se comprende de manera algorítmica, un procedimiento para obtener el número central de una distribución y no considerando el contexto de donde se obtienen los datos.

EL CONTEXTO, LA VARIABILIDAD Y LA INCERTIDUMBRE REPRESENTADAS EN LA ACTIVIDAD DE 80 METROS PLANOS

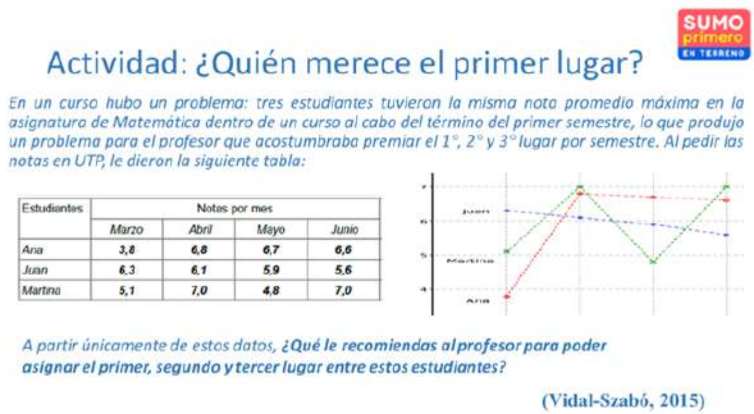
Hasta el momento, se ha dado énfasis en cómo el contexto influye directamente en el análisis de los datos al proveer información relevante para comprender los sucesos concernientes a la situación. Si bien, se puede referir al él como el corazón de la estadística, no es el único concepto que influye directamente en ella.

En la actividad planteada anteriormente, el contexto hace inferir que la situación se desarrolla en una clase de Educación Física, donde diez estudiantes registran el tiempo que tarda en recorrer su compañera una distancia determinada, teniendo como referencia que una niña que entrena generalmente tarda aproximadamente 12 segundos en completar la distancia, toda esta información es relevante para comprender y analizar la situación. Así también, se tiene una variabilidad de información representada en datos numéricos y una incertidumbre que se plasma en la pregunta planteada, es más, es natural plantear no solo una única pregunta, por ejemplo, se puede pensar ¿Cómo controlar esta variabilidad de estos datos?, ¿Cómo predecirla? o ¿Cómo reducirla? Todo esto deja en evidencia que la variabilidad es parte de la esencia de la estadística, tal como lo es el contexto al proveer información para su análisis y así también, lo es la incertidumbre, ya que esta surge cuando existe una variabilidad en una situación estadística y a su vez, al no poseer un conocimiento total de la situación o fenómeno que acontece. Por este motivo, es apropiado decir que son conceptos entrelazados e inherentes en ciertas actividades estadísticas.

¿QUIÉN MERECE EL PRIMER LUGAR?

A continuación, se propone la siguiente actividad realizada en el taller 13 del programa SUMO primero en terreno. Esta TM se presenta al final del taller para que cada docente la realice de forma asincrónica y la comparta en el foro correspondiente al taller 13[5]. La finalidad no es solo la realización de la actividad, sino que además los docentes compartan entre ellos, apreciando distintas perspectivas y más importante, fomentando una comunidad de profesores en todo Chile en torno a la reflexión matemática y/o estadística considerando como base un mismo problema.

En la Figura 6 se representa la actividad asincrónica propuesta a los docentes.



Estudiantes	Notas por mes			
	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Ana	3,8	6,8	6,7	6,6
Juan	6,3	6,1	5,9	5,6
Martina	5,1	7,0	4,8	7,0

Figura 6. Tarea matemática asincrónica: ¿Quién merece el primer lugar?[6]

Al igual que la actividad anterior, se hace la invitación a reflexionar en torno a la pregunta planteada, ¿Qué cree usted? ¿Cuál sería su recomendación y fundamento para otorgar los respectivos lugares de premiación?

Es posible pensar que la media aritmética es la MTC más apropiada de utilizar en esta situación, lo cual es correcto, pero la actividad está diseñada de tal manera que los tres promedios sean exactamente iguales (5,975), imposibilitando este criterio como recomendación y fundamento. Por lo tanto, ¿Qué hacer en este caso?, ¿Se debe utilizar otra MTC? (¿será apropiado utilizar otra MTC?), ¿Se recomienda al docente que la asignación de los lugares lo haga de acuerdo con el favoritismo que tiene por cada estudiante? Para promover el análisis de la TM, se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué posible interpretación se puede dar a los datos representados?

5 Enlace del foro del taller: https://www.sumoprimeroenterreno.cl/foro-estadistica-temprana-variabilidad-contexto-e-incertidumbre/

6 La actividad propuesta incentiva al docente a crear un criterio para definir los lugares de los estudiantes (Vidal-Szabó, 2015, p. 56-57).

Vidal-Szabó (2015) plantea que si se analiza el contexto, un posible criterio puede ser la perseverancia y regularidad que tiene cada estudiante con respecto a sus notas y así, por ejemplo, los puestos quedarían de la siguiente manera: Ana - Juan - Martina. En este análisis, se establecen diferencias entre las notas consecutivas para determinar de manera implícita la variabilidad de ellas: se usa el criterio de heterogeneidad con sesgo de notas sobre el promedio de Ana premiándola por el esfuerzo, mientras que a Martina se le sanciona por los grandes cambios y a Juan le asigna el segundo lugar utilizando el criterio de representatividad del promedio u homogeneidad entre las notas. Ejemplo de aquello, es la siguiente respuesta (Figura 7) que proporciona un grupo de docentes en el foro del programa.

> La recomendación que le hacemos las docentes del LMMF, es que premie en 1° lugar a la estudiante Ana, si bien ella en el comienzo tuvo una baja calificación, está la pudo superar y mantenerla durante el año, demostrando una constancia en su trabajo, lo que se puede evidenciar en sus notas. En 2° lugar premiaríamos a Juan, ya que tuvo un leve descenso en sus calificaciones, pero sin embrago este fue constante durante el transcurso del año. Por último en el 3° lugar premiaríamos a Martina, ya que ella a tenido una intermitencia en su rendimiento, lo que se ve reflejado en sus calificaciones.

Figura 7. Respuesta proporcionada por un grupo de docentes del programa SUMO primero en terreno[7].

Como se puede apreciar, los docentes del establecimiento encuentran sustento para su argumentación en el contexto que acontece en la situación. Dada la variabilidad de las notas y la imposibilidad de utilizar la media aritmética, surge la incertidumbre de cuál será el mejor criterio para asignar los puestos de tal manera que sea los más justos posibles. El contexto ayuda a responder de forma apropiada ante tal dificultad. Así también, se puede apreciar en la Figura 8 cómo el docente pone en evidencia la consideración de tal contexto.[8]

En ambos casos, el contexto ayuda a reducir la incertidumbre que generó la

> Considerando los y las estudiantes, su desempeño escolar y la disposición al aprendizaje; tomaría en cuenta algunos agentes que se verifican a través de la evolución de sus aprendizajes a través del semestre.
> El aspecto clave es que Ana rinde de menos a más, a diferencia de sus pares, en que un caso se mantuvo en la media y el otro caso con muchos altibajos.
> En las calificaciones se evidencia un esfuerzo en su desempeño, manteniendo un promedio de las tres últimas notas sobre 6.5.
> Los datos muestran un camino, que no se puede perder de vista a la hora de tomar decisiones pedagógicas.

Figura 8. Respuesta proporcionada por un docente del programa SUMO primero en terreno[8].

7 La información propuesta en la Figura 7 se tomó de: https://www.sumoprimeroenterreno.cl/foro-estadistica-temprana-variabilidad-contexto-e-incertidumbre/

8 La información propuesta en la Figura 8 se tomó de: https://www.sumoprimeroenterreno.cl/foro-estadistica-temprana-variabilidad-contexto-e-incertidumbre/

variabilidad de las notas y el no poder utilizar la media aritmética. Si bien, los dos ejemplos mostrados son similares, no necesariamente debe ocurrir siempre. Lo importante es que el criterio forjado sea desde un análisis apropiado a partir del contexto.

FORTALECIMIENTO EN LA MODELACIÓN DE DATOS: UNA ACTIVIDAD PROPUESTA PARA EL PRIMER CICLO DE ENSEÑANZA BÁSICA

Finalmente, para fortalecer lo presentado en este capítulo, se propone una última actividad. Su objetivo, no es solamente poner en juego los conceptos estudiados hasta el momento, sino que también, es ayudar a derrumbar una posible creencia al considerar que los estudiantes (de 5-6 años) dependen exclusivamente de las semejanzas y similitudes perceptivas en los objetos para la construcción y uso de atributos. Mediante la colaboración y el diálogo, se espera que en la implementación de esta actividad los estudiantes sean capaces de ver más allá de los atributos perceptibles de cada dato (animales para este caso), que no justifiquen sus razonamientos solamente por estos atributos, como lo son el color de piel, la cantidad de patas, la existencia de manchas, el tamaño, entre otras; que puedan vislumbrar las cualidades de los animales como una colección, cómo estas cualidades interactúan entre sí y cómo estas interacciones ayudan a solucionar el problema planteado mediante la interpretación desde el contexto. Cabe resaltar que los animales utilizados para la actividad presentan la característica de no poder ser clasificados fácilmente en una categoría si se construye en base a los rasgos o atributos perceptibles a simple vista. A continuación, en la Figura 9, se muestra la TM implementada a los docentes del programa SUMO primero en terreno.[9]

Figura 9. Ayudando en el Zoo: Actividad propuesta para promover la modelación de datos desde el ciclo investigativo PPDAC[10].

9 Mediante el diálogo colaborativo entre los docentes, se debe construir el mejor criterio para agrupar los animales dentro del zoológico teniendo en consideración la supervivencia, resguardo y confort de cada uno de ellos (Leavy & Hourigan, 2017, p. 163-183).

En esta ocasión también se hace la invitación a desarrollar la actividad, pero esta vez, es recomendable que la pueda hacer con algunos colegas, o incluso con miembros de su familia, debido a que la actividad se sustenta desde la colaboración. El desarrollo grupal de la TM deja en evidencia aspectos importantes de la modelación de datos. Así también, se invita a reflexionar sobre las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los conocimientos estadísticos presentes en la actividad?, ¿Qué habilidades podría promover en los estudiantes la implementación de la TM?, ¿Qué dificultades podrían surgir en su aplicación?, ¿Cuáles podrían ser los posibles errores que puede cometer el estudiante al desarrollar la actividad?, ¿Qué respuestas esperaría por parte de ellos? Son preguntas que pueden ayudar en la planificación y en la implementación de la actividad.

Como se logra apreciar en la actividad, existe una amplia variabilidad de datos (los animales) y a base de la dificultad planteada, surge la incertidumbre de cómo agruparlos de forma apropiada, de tal manera que cada animal pueda vivir en condiciones ideales en el zoológico. Así también, con la implementación de la actividad se pone en acción el ciclo investigativo PPDAC, debido a que existe un problema nacido del contexto, el zoológico: un tema importante y cercano para los estudiantes, involucrándolos y motivándolos en busca de una resolución. Para ello, la colaboración es fundamental para la construcción de un plan de acción que considere cómo manejar e interpretar los datos, qué aspectos relevantes son los que se deben examinar para tal interpretación, cómo registrar los datos, entre otras. Una vez recolectados los datos, en este caso las características y cualidades de los animales, es necesario limpiarlos para su posterior análisis, es decir, de todos los datos recolectados seleccionar aquellos que sirven para responder o solventar tal problemática. Estos se analizan, se generan hipótesis y se profundizan en ellos extrayendo información que a simple vista permanece oculta y que surge desde un análisis apropiado del contexto, por ejemplo: el hábitat de los animales, su alimentación, su interacción con otros animales, su grado de ferocidad, entre otras. Finalmente, se plantean conclusiones en beneficio de resolver o disminuir la problemática, o en el caso contrario, volver a implementar el ciclo o retroceder a una fase previa para lograr un mejor grado de satisfacción ante tal situación.

En la implementación del ciclo investigativo, los estudiantes modelan los datos, se fomenta la alfabetización y razonamiento estadístico en ellos, se promueve su capacidad de representar y argumentar estadísticamente en base a evidencias y se les incentiva a examinar afirmaciones basadas en los datos de forma crítica.

ALGUNAS RECOMENDACIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD

La actividad está diseñada de tal manera que la cantidad de recintos del zoológico no sea conocida, como también la representación física de este, debido a que estos datos pueden intervenir en la interpretación y clasificación de los atributos de los animales, por ejemplo, al detallar la superficie de algún recinto, puede que esto interfiera en la cantidad de animales que se pueden colocar ahí, perjudicando el análisis esperado.

En la implementación de la TM es importante ir guiando su desarrollo mediante preguntas orientadoras como: ¿Qué tenemos que hacer?, ¿Qué animales estarían en ese grupo? ¿Por qué piensas eso?, ¿Qué categorías existen? o ¿Cuántos animales están en la categoría x? Así también, con respecto a la lectura de la relación entre categorías de los datos ¿Cuál es la categoría más (o menos) frecuente?, ¿Hay más animales en la categoría x que en la categoría y?, si es así, ¿Cuántos más? o ¿Qué título encajaría en la categoría?, entre otras; esto, con la finalidad de revelar los razonamientos y las justificaciones por parte de los estudiantes.

En conclusión, la selección de los atributos no es una tarea trivial, es importante tener presente que un elemento fundamental en la creación de estos modelos es la selección de los atributos y la clasificación de los elementos de acuerdo con ellos (English, 2012). Esta capacidad de centrar el análisis en los atributos de los datos exige que los estudiantes asistan a las cualidades de ellos más que a los atributos en sí mismos. Así también, el conocimiento del fenómeno que se está investigando, guían en su selección y apoya las conversaciones y negociaciones que tienen lugar dentro de un grupo al seleccionarlos (Leavy y Hourigan, 2017).

SUGERENCIAS PARA EL DOCENTE

Como se menciona previamente, la actividad se obtuvo de una investigación realizada por Leavy y Hourigan, 2017. En ella, se destacan algunos resultados relevantes que son necesarios conocer debido a que pueden ser de utilidad para una nueva implementación:

- El análisis de los datos reveló que los niños (5 a 6 años) respondieron fácilmente a la situación de clasificación, dialogando entre ellos para la selección apropiada al contexto.
- La selección de atributos y la posterior clasificación, sugiere que los niños demuestran la capacidad de identificar los atributos compartidos entre los datos en lugar de limitarse a identificar los diversos atributos individuales.
- El contexto del problema requería que los niños vieran los objetos, cada uno de ellos diferente, como una colección.

- La mayoría demostró una relativa facilidad para identificar y aplicar los atributos pertinentes, así como la competencia en la comunicación y la justificación de estas decisiones.
- El conocimiento del contexto permitió modificar y profundizar las agrupaciones de los animales para tener en cuenta la situación del zoológico.

Este estudio proporciona pruebas convincentes del importante papel que desempeña el conocimiento del tema (datos en contexto) al generar decisiones por parte de los estudiantes. Ayudan a reorganizar y/o categorizar los datos (respondiendo a la variabilidad de estos), y otorga la oportunidad de abordar y resolver preguntas que en un comienzo estaban envueltas en la incertidumbre (Leavy y Hourigan, 2017).

REFLEXIONES FINALES

La estadística puede ser abordada de forma apropiada por los estudiantes de primer ciclo de enseñanza básica teniendo en consideración la modelación de los datos mediante la implementación del ciclo investigativo PPDAC. En él se pueden sustentar las bases de una alfabetización estadística e incentivar a los estudiantes la lectura e interpretación de los datos en beneficio de la resolución de problemas o el dar respuestas a las incertezas nacidas del contexto en el que se desenvuelven. Así también, les permite generar un pensamiento crítico, argumentar objetivamente sustentado en evidencias, dar afirmaciones basadas en un análisis previo, apreciar el valor que tiene la estadística en la vida cotidiana y cómo ella puede facilitar su interpretación.

En la enseñanza de primer ciclo de educación básica los estudiantes adquieren las primeras nociones estadísticas, como aquellas tratadas en este escrito. Lo vital es enseñarlas desde su conceptualización, evitando su introducción desde un tratamiento procedural. Así, se contribuye en la construcción de un raciocinio que les permita entender e interpretar los datos, transformarlos en información útil y con ello, generar hipótesis, análisis y conclusiones en beneficio de una comprensión más acabada del contexto.

REFERENCIAS

Alsina, A. Vásquez, C. (2017). Enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 8*(4), 199-212.

Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in trainingteachers. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study*, 57-69. Dordrecht: Springer.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64. http://dx.doi.org/10.7764/PEL.49.1.2012.5

English, L. D. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 24–47. https://doi.org/10.1007/BF03217564

English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 15-30. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3

Estrella, S. (2019). Comprensión de la media aritmética por profesores de secundaria en formación inicial. En Olfos, R., Ramos, E. y Zakaryan, D (Ed.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 101-121). Graó.

Estrella, S. (2008). Medidas de tendencia central en la enseñanza básica de Chile. *RECHIEM, 4*(1), 2-22. Recuperado de http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2015/05/RECHIEM_TD_Estrella-2008-con-tapa.pdf

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística*, Reporte (GAISE). Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/Spanish.pdf

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). Learning to reason about statistical models and modeling. In J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (pp. 143–163). Springer.

Isoda, M., y Estrella, S. (2020). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME4_web.pdf

Kazak, S., Pratt, D., y Gökce, R. (2018). Sixth grade students' emerging practices of data modelling. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0988-3

Leavy, A. M., y Hourigan, M. (2006). Preservice teacher understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 53-90. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9003-y

Leavy, A. M., y Hourigan, M. (2016). Crime scenes and mystery players! Using interesting contexts and driving questions to support the development of statistical literacy. *Teaching Statistics*, *38*(1), 29–35. https://doi.org/10.1111/test.12088

Leavy, A., Hourigan, M. (2017) The role of perceptual similarity, context, and situation when selecting attributes: considerations made by 5–6-year-olds in data modeling environments. *Educ Stud Math 97*, 163–183. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9791-2

Lehrer, R., Kim,M., y Schauble, L. (2007). Supporting the development of conceptions of statistics by engaging students in measuring and modeling variability. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*, 195–216. https://doi.org/10.1007/s10758-007-9122-2

Makar, K. (2018). Theorising Links Between Context and Structure to Introduce Powerful Statistical Ideas in the Early Years. En A. Leavy, Meletiou-Mavrotheris y E. Paparistodemou (Ed.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education*. (pp. 3-20). Springer.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/orientacion/2012/bases_curricularesbasica_2012.pdf

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 27–46. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education*, *50*(7), 1113–1123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Pfannkuch, M., y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 17–46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

Vidal-Zsabó, P. (2015). *Un estudio de clase para resignificar la variable estadística a nivel de la enseñanza escolar.* Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S. y Montoya, E. (2020). Análisis cualitativo de un aprendizaje estadístico temprano con la mirada de los espacios de trabajo matemático orientado por el ciclo investigativo. *Educación Matemática*, *32*(2), 217-246. https://doi.org/10.24844/EM3202.09

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–265. https://doi.org/10.2307/1403699

Wilkerson, M., y Laina, V. (2018). Middle school students' reasoning about data, context, and chance through storytelling with repurposed local data. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s1185 8-018-0974-9

CAPÍTULO V

Enfoques de enseñanza para aprender probabilidad en educación básica

PEDRO VIDAL-SZABÓ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

En el cotidiano, ciertas decisiones se ven afectadas por un sistema de creencias personales e informaciones de redes sociales, siendo algunas fiables, otras insuficientes, e incluso, algunas opuestas entre sí. A pesar de ello, tomar decisiones con riesgo reducido, como producto de las posibilidades menos riesgosas que emergen del análisis probabilístico en un escenario de incertidumbre, es posible de hacer en la medida que se es alfabetizado probabilísticamente, a grosso modo, esto es ser capaz de comunicar, cuantificar y modelar lo incierto (Pratt y Kazak, 2018).
Durante los primeros años escolares, se esperan tratar principalmente dos tipos de expresiones referidas a la probabilidad:

(1) expresiones en lenguaje informal de estimaciones sobre las posibilidades de eventos frente a incertidumbre, las que se realizan sin comunicar un resultado numérico, sino como expectativas o creencias, recurriendo a información cualitativa de varias fuentes, con el propósito de facilitar y agilizar la toma de decisiones;

(2) expresiones que estiman la probabilidad como frecuencia (absoluta o relativa), comparando los resultados obtenidos, después de una experimentación aleatoria y relacionándose formalmente con la probabilidad a-posteriori.

En la alfabetización probabilística son primordiales las habilidades para entender el significado de los conceptos básicos del lenguaje probabilístico y utilizar argumentos de probabilidad adecuados. También involucra elementos de predisposición en el sujeto, vinculados a la regulación del control referido a creencias y actitudes apropiadas para estudiar un fenómeno, tomando en cuenta, por ejemplo, sentimientos personales como la aversión al riesgo que se podrían respaldar bajo razones de una modelación probabilística.

No obstante, en ocasiones, el enfoque clásico de la probabilidad es privilegiado, desde este enfoque se promueve que se determine la probabilidad a-priori de un evento (también conocida como probabilidad teórica), a partir de un número fraccionario mayor o igual a 0 y menor o igual a 1, definido por el número de casos favorables como numerador y el número de todos los casos posibles como denominador, prescindiendo de una verificación experimental, lo cual puede opacar la diversidad de significados que posee el concepto probabilidad en el aprendizaje escolar como el significado intuitivo y frecuentista.

ALGUNOS ANTECEDENTES

El uso del término probabilis era de uso corriente en las lenguas derivadas del latín, significaba merecedor de aprobación. Hacking (1995) revisa que el término probable tenía otros usos en lenguaje común, antes del año 1662, por ejemplo, una afirmación era probable cuando estaba atestiguada correctamente y, más adelante, lo probable se convirtió en una señal frecuente mediante la cual se daba credibilidad (Madrid, 2012).

Laplace en el año 1812 publica la Teoría Analítica de las Probabilidades y dos años después publica un Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades en el que presenta principios y resultados generales de la teoría de la probabilidad. Posteriormente al analizar la obra de Laplace, según la filosofía determinista que puede desprenderse de su obra, el azar no tiene realidad en sí mismo porque nada sucede sin causa. Por tanto, el azar únicamente expresa el desconocimiento de la causa subyacente a un evento, siendo la probabilidad (de Laplace) el medio más adecuado para solventar esta ignorancia de los principios y las causas que actúan detrás de los fenómenos. En ese sentido, Laplace atendió al uso funcional de la probabilidad para la estadística y la demografía. Para más detalles, consultar Madrid (2012, capítulo 5).

Existen obstáculos epistemológicos relacionados al cálculo de la probabilidad en el desarrollo del concepto, por ejemplo, en el siglo XVIII el matemático D´Alembert calculó la probabilidad teórica de obtener una cara (C) y un sello (S) al tirar dos monedas, obteniendo equivocadamente 1 de 3. Su razonamiento consistió en que había un solo caso favorable (una-cara-y-un-sello) entre los tres posibles (dos caras, dos sellos y una-cara-y-un-sello), no reparando que obtener una cara y un sello se da como "cara-sello" y como "sello-cara", lo que daría una probabilidad 2 de 4, corregido por Laplace (Madrid, 2012, p. 132). Esto vislumbra algunas dificultades que pueden aparecer en el aprendizaje de la probabilidad, lo cual debe ser considerado desde la educación básica.

PROPÓSITOS FORMATIVOS DE LA PROBABILIDAD

La noción de incertidumbre incluye varios fenómenos aleatorios y es reconocible una activación del pensamiento probabilístico cuando alguien enfrenta situaciones que implican modelar algún evento incierto. De ello:

Enfrentar este tipo de situaciones demanda una enseñanza escolar enfocada en el desarrollo de un pensamiento probabilístico que contribuya a la formación del ciudadano crítico del siglo XXI, en que el estudio de la probabilidad proporcione herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre (Vergara et al., 2020, p. 9).

Aprender probabilidad puede prevenir engaños durante el proceso de decidir, tal como indicaba Laplace (1825) "no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación" (p. 206). Gal (2005) amplía la alfabetización estadística a la probabilidad, incluye la capacidad de interpretar y evaluar críticamente la información probabilística y fenómenos aleatorios, centrándose en la relevancia del contexto.

Complementariamente a lo anterior, a partir del estudio Borovčnik (2011), el mismo autor (Borovčnik, 2016), reorganizó aspectos del pensamiento probabilístico intuitivo como habilidades propuestas, que han de ser desarrolladas a lo largo de una trayectoria formativa tanto en estudiantes que aprenden como en profesores que enseñan probabilidad:

(1) habilidad de equilibrio entre los elementos psicológicos y formales;
(2) habilidad de comprender cuando faltan criterios directos para el éxito;
(3) la habilidad de separar conceptualmente la aleatoriedad de la causalidad;
(4) la habilidad de diferenciar la reflexión sobre un problema de la toma de una decisión.

El tema aleatoriedad ha de enseñarse de forma empírica a través de experimentos o simulaciones en la clase, lo cual es fundamental para conceptualizar la aleatoriedad (e.g., lanzar monedas y/o dados, obtener bolitas de una urna, entre otros). Konold (1991), toma algunos conceptos que se relacionan a la aleatoriedad, por ejemplo:

a. *casualidad* que reconoce una situación como aleatoria al no poder identificarse factores que le originan, o bien, existen aspectos incontrolables sobre dichos factores;
b. *incertidumbre* que se identifica frente a un evento por el cual no existe manera de predecirle con seguridad;
c. *múltiples posibilidades* que constituyen un fenómeno al ser aleatorio, pues existe más de un resultado posible;
d. *equiprobabilidad* dado en los eventos aleatorios que tienen la misma probabilidad de ocurrir;
e. *falta de información*, lo cual puede ser una explicación sobre la aleatoriedad, en relación con la ausencia de información sobre un evento;
f. *modelización*, pues la aleatoriedad no es cualidad de cierto evento sino un modelo aplicable a algunas situaciones, permitiendo comprenderles más.

En este capítulo se hace una revisión referida a los argumentos relacionados a la aleatoriedad en una tarea. Se revisan, bajo una panorámica curricular de los objetivos de aprendizaje vinculados a la probabilidad en los seis primeros años de enseñanza escolar, algunos enfoques para enseñar probabilidad y se examinan algunos conceptos fundamentales.

ARGUMENTOS ASOCIADOS A LA ALEATORIEDAD

En educación básica está privilegiado el uso de monedas, dados, urnas, entre otros artefactos para producir resultados provenientes de experimentos aleatorios de forma concreta, aunque también pueden ser simulados por medio de Microsoft Excel, LibreOffice Calc, GeoGebra, en general, procesadores de datos.

Una de las actividades de argumentación que se realizó en el contexto de un desarrollo profesional docente, es la tarea que se muestra en la Figura 1, la cual motiva en quien resuelve, una búsqueda de argumentos sobre la identificación de lo aleatorio en las secuencias de caras representado como “1” y cruces (o sellos) como “0”.

Tarea. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000001000101001000001000110001010000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados

a. ¿Qué niña ha hecho trampas?
b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Figura 1. Extraído de Batanero y colaboradores (2012, p. 230)

Se le invita a tomar un tiempo breve para pensar la respuesta y completar:

ARGUMENTOS INICIALES
a. ¿Qué niña ha hecho trampas?
b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Realizar el ejercicio intelectual anterior (inclusive, ejercicio pragmático si lo desea por medio de la realización de ensayos experimentales o simulados), le dará mayores oportunidades de aprendizaje y desarrollo cognitivo al contrastar sus respuestas con las que se han analizado desde la investigación didáctica en aleatoriedad. Ello le hará lograr un cambio cognitivo, en el sentido de Brizuela y Scheuer (2016), es decir, se podrá manifestar posiblemente un proceso multisensorial, multimodal, social y distribuido, que varía de persona a persona en tanto ocurre un desarrollo cognitivo y, a la vez, un aprendizaje inherentemente dinámico, enactivo y situado.

La tarea de la Figura 1, fue presentada a un grupo de futuros profesores y de estos se obtuvo una categorización que se exhibe en la tabla 1.

Tabla 1. Distribución de frecuencias referida a la pregunta ¿Qué niña ha hecho trampas?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Clara (correcta)	42	26.8
Luisa	89	56.7
No sabe	17	10.8
Ninguna de las dos	1	0.6
No responde	8	5.1

Fuente: Batanero y colaboradores (2012, p. 232)

En dicho estudio, es bajo el porcentaje que acierta correctamente a la respuesta en el grupo, solo el 26,8% de la muestra (Clara es quien ha hecho trampas). Esto indica una dificultad para reconocer la aleatoriedad en una secuencia. A continuación, la tabla 2 detalla los tipos de argumentos que emergieron en futuros profesores.

Tabla 2. Distribución de frecuencias referida a la pregunta ¿Por qué crees que ha sido ella? Sobre el total N=148 (futuros profesores que dan un argumento).

Argumento	Niña que hace trampas						Total	
	Clara		Luisa		No sabe/Ninguna			
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
A1. Frecuencias muy diferentes	1	2.4	5	5.7			6	4.1
A2. Frecuencias muy próximas	3	7.1	19	21.6			22	14.9
A3. Rachas largas	1	2.4	51	58.0			52	35.1
A4. Rachas cortas	12	28.6					12	8.1
A5. Existencia de un patrón	21	50.0	7	8.0			28	18.9
A6. No existe patrón			1	1.1			1	0.7
A7. Impredecibilidad					15	83.3	8	5.4
A8. Otros argumentos	4	9.5	5	5.7	3	16.7	19	12.8

Notar que, en el estudio, el 58% (51 personas) de los que declaran que Luisa ha hecho trampa, incorrectamente, privilegian el argumento de tener en su secuencia rachas largas, esto es, una microsecuencia de ceros o de unos seguidos.

Por ejemplo, en la secuencia de Luisa existe una microsecuencia de 9 ceros seguidos "(…) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (…)", racha larga. Mientras que los que señalan que Clara ha hecho trampa, correctamente, el argumento que predomina es la existencia de un patrón con un 50% (21 personas) que puede entenderse como una microsecuencia que se repite varias veces, en el caso de clara se repite frecuentemente "(…) 1 1 0 0 (…)".

Para contribuir a la visualización de la aleatoriedad en la ocurrencia de caras o sellos al lanzar una moneda, se amplió el número de lanzamientos a 1000 y se simuló en Excel bajo la función "=ALEATORIO.ENTRE(0;1)", dando 0 ó 1 aleatoriamente (ver Figura 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
1			1000 Lanzamientos																																							
2	Representación		0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
3	CARA	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
4	SELLO	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
5			0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
6			0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
7			1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	Frecuencias		1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
9	CARA	477	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
10	SELLO	523	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
11	TOTAL	1000	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
12			1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
13			0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
14			1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
15	Probabilidad estimada		0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
16	CARA	0,477	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
17	SELLO	0,523	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
18	TOTAL	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
19			0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
20			1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
21			1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
22			0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
23			1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
24			0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
25			1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
26			0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
27																																										

Figura 2. Simulación de 1000 lanzamientos de monedas.

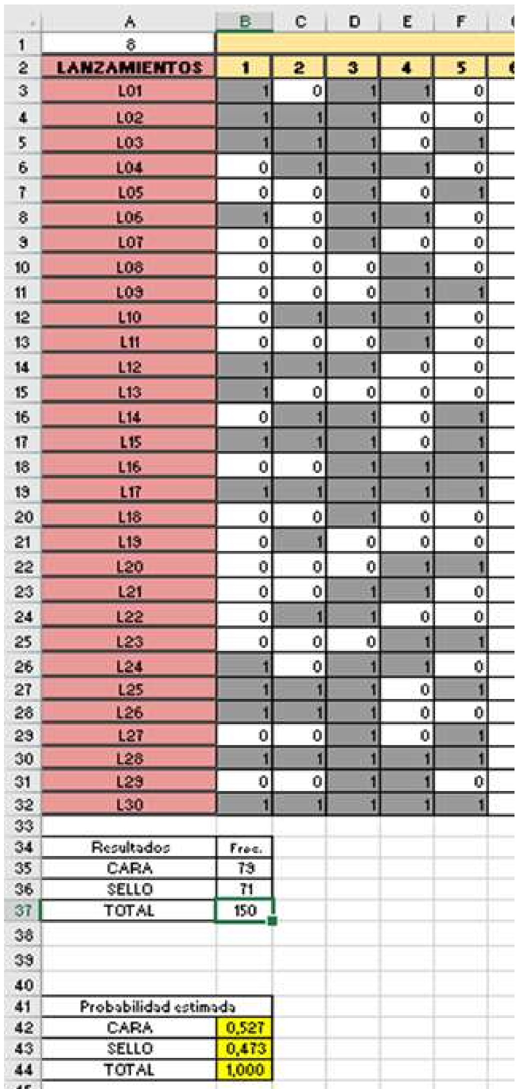
Esta simulación permite visualizar el comportamiento aleatorio, de hecho, cada celda que contiene el "1" (cara de la moneda) tiene color de celda gris. De esta forma, observando la hoja por columna desde la C hacia abajo es posible identificar la variabilidad en las longitudes de rachas, esto es, rachas cortas y largas tanto de unos como de ceros.

La probabilidad a-priori para obtener cara o sello en el lanzamiento aleatorio de una moneda es 0,5 (1 de 2) que para el caso es parecido a la frecuencia relativa de caras que es 0,477 (477 de 1000) y al de sellos que es 0,523 (523 de 1000), los que pueden ser considerados como una estimación de sus probabilidades.

En un colegio con profesores que se desempeñan en Educación Básica, se hizo el experimento de lanzar una moneda 150 veces, distribuidos los lanzamientos entre los docentes partícipes. Cada profesor realizó 30 lanzamientos de moneda; cada uno de ellos, anotaba la secuencia conformada por ceros y unos, para luego ser registrada desde la columna B a la columna F hacia abajo (Figura 3).

En una tabla de frecuencias, a través de la herramienta en Excel "=CONTAR.SI($B$3:$F$32;1)" se contaron las caras registradas como "1" en el cuerpo de datos (B3 hasta F32), y de igual modo, se contaron los sellos registrados como "0".

Los resultados dan como frecuencia absoluta para cara 79, mientras que para sello 71. Por lo tanto, en este caso, se obtuvo una probabilidad estimada de 0,527 para la obtención de cara (79 de 150) y de sello 0,473 (71 de 150).



	A	B	C	D	E	F
1	6					
2	LANZAMIENTOS	1	2	3	4	5
3	L01	1	0	1	1	0
4	L02	1	1	1	0	0
5	L03	1	1	1	0	1
6	L04	0	1	1	1	0
7	L05	0	0	1	0	1
8	L06	1	0	1	1	0
9	L07	0	0	1	0	0
10	L08	0	0	0	1	0
11	L09	0	0	0	1	1
12	L10	0	1	1	1	0
13	L11	0	0	0	1	0
14	L12	1	1	1	0	0
15	L13	1	0	0	0	0
16	L14	0	1	1	0	1
17	L15	1	1	1	0	1
18	L16	0	0	1	1	1
19	L17	1	1	1	1	1
20	L18	0	0	1	0	0
21	L19	0	1	0	0	0
22	L20	0	0	0	1	1
23	L21	0	0	1	1	0
24	L22	0	1	1	0	0
25	L23	0	0	0	1	1
26	L24	1	0	1	1	0
27	L25	1	1	1	0	1
28	L26	1	1	1	0	0
29	L27	0	0	1	0	1
30	L28	1	1	1	1	1
31	L29	0	0	1	1	0
32	L30	1	1	1	1	1
33						
34	Resultados	Frec.				
35	CARA	79				
36	SELLO	71				
37	TOTAL	150				
38						
39						
40						
41	Probabilidad estimada					
42	CARA	0,527				
43	SELLO	0,473				
44	TOTAL	1,000				
45						

Figura 3. Registro de 150 lanzamientos reales realizado por docentes de un Colegio de la comuna de la Cisterna en la RM.

CAPÍTULO V

La mayoría de los profesores en servicio al hacer el experimento aleatorio colaborativamente y analizar los resultados, cambiaron el argumento a uno correcto desde el punto de vista de la aleatoriedad, predominando el argumento de rachas largas o cortas, (A3 o A4, respectivamente), y también los argumentos de presencia o ausencia de patrones (A5 o A6, respectivamente), ver Tabla 2.

ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS REFERIDOS A LAS LONGITUDES DE RACHA

En ocasiones, la existencia de rachas largas se usaba como argumento para rechazar la aleatoriedad de la secuencia de Luisa, lo que sugiere una comprensión incorrecta de la independencia entre cada uno de los lanzamientos de moneda. Por el contrario, si se percibe la variabilidad inherente a un proceso aleatorio, a través de la independencia de ensayos y, en especial, a las distintas longitudes de rachas que presenta la secuencia de Luisa como argumento para aceptar su aleatoriedad, entonces se evoca una comprensión correcta del fenómeno.

Como ejemplo, uno de los futuros profesores del estudio de Batanero y colaboradores (2012) indica correctamente el siguiente argumento "Clara hace trampas porque (...), alternan los ceros y los unos; en cambio lo de Luisa parece más real, ya que hay más continuidad de resultados muchos ceros y unos seguidos (Participante 65)." (Ver Figura 4).

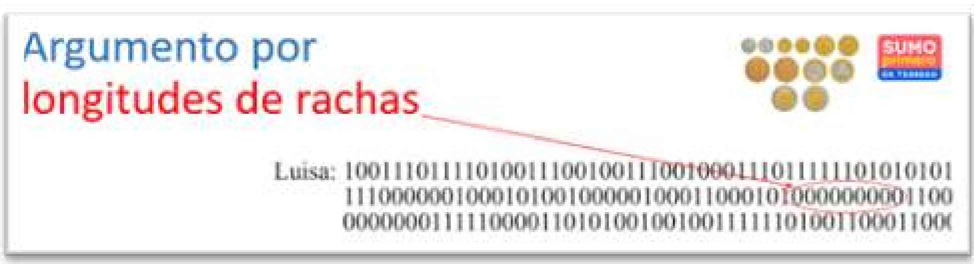


Figura 4. Visualización de las longitudes de racha en la secuencia de Luisa.

ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS REFERIDOS A PATRONES

El argumento sobre la existencia de un patrón en la secuencia, esto es, una microsecuencia repetida varias veces, hace referencia al orden de unos (caras) y ceros (sellos) que van apareciendo y al hecho de que parezca muy regular para ser aleatoria. En consecuencia, la regularidad en el patrón de alternancias entre unos y ceros es un indicio de no-aleatoriedad que se puede apreciar en la secuencia de Clara. No obstante, hay quienes pueden ocupar este mismo argumento para aceptar la aleatoriedad en la secuencia de Clara, lo cual sería una concepción incorrecta de aleatoriedad.

Como ejemplo, uno de los futuros profesores del estudio de Batanero y colaboradores (2012) indica correctamente el siguiente argumento “Clara hizo trampas porque los resultados obtenidos parecen ser una serie que se repite, ya que, aunque no se siga a la perfección es muy parecida en sus porcentajes (Participante 56).” (Ver Figura 5)

Figura 5. Visualización de la microsecuencia “1100” repetida en el caso de Clara.

PENSAR PROBABILÍSTICAMENTE EN EL ÁMBITO MATEMÁTICO Y ESTADÍSTICO

El estudio escolar de la probabilidad proporciona herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre, aunque a veces predominan aspectos procedimentales (p.e., hegemonía de la probabilidad a-priori en contextos irreales o irrelevantes) por sobre la comprensión conceptual o el desarrollo del razonamiento probabilístico (p.e., entender el rol de la probabilidad en la modelación de fenómenos aleatorios). A continuación, se toman dos tareas adaptadas del reporte GAISE. Más detalles en Franklin et al. (2007).

Tarea Matemática. *Asuma que una moneda es confiable (el chance de obtener cara es la misma que la de obtener sello), entonces si lanzamos la moneda cuatro veces ¿cuántas caras obtendríamos? ¿Con qué chance?*

Para responder esto, se puede realizar un diagrama de árbol para organizar todos los casos posibles, en que C representa cara y X representa sello (ver Figura 6)

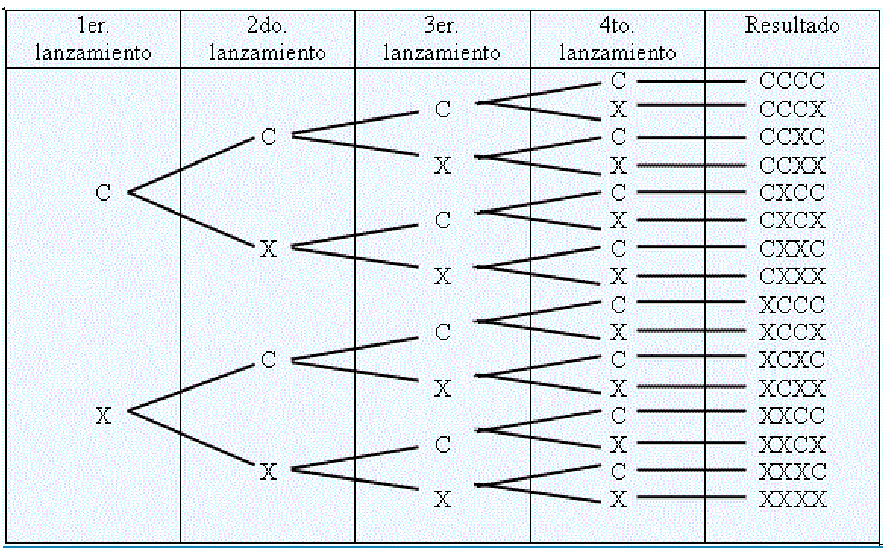


Figura 6. Diagrama de árbol para determinar casos posibles en 4 lanzamientos de moneda.

Notar que, en la columna final “resultado”, se presentan todas las combinaciones que se dan al lanzar cuatro veces una moneda. Es posible determinar una variable relacionada al número de caras que varía discretamente de 0 a 4.

Sin embargo, para obtener el chance de obtener 4 caras se tiene sólo una única opción (CCCC) de un total de 16, mientras que el chance de obtener 2 caras aumenta porque se tienen 6 opciones, a saber: CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC y XXCC de un total de 16, es decir, es más posible obtener 2 caras que 4 caras al lanzar cuatro veces una moneda. Dicho en otras palabras, la probabilidad a-priori de obtener 4 caras en cuatro lanzamientos de moneda es de 0,0625 (1 de 16), y la de obtener 2 caras es de 0,375 (6 de 16).

¿Será acaso que el chance de obtener 1 cara es la misma que la de obtener 3 caras? Se deja esta interrogante como desafío a la lectora y al lector, compare su pensar rápido (primera idea que se le vino a la mente) con su pensar más lento al procesar los resultados que tiene la Figura 6.

El razonamiento anterior es deductivo, pues al suponer que la moneda es confiable se procede deductivamente para determinar las probabilidades (a-priori) para cada posible número de caras que va desde 0 a 4, según el problema.

Tarea Estadística. *Tú eliges una moneda. ¿Es esta una moneda confiable?*
Al preguntar si la moneda es o no confiable, se sospecha que puede estar sesgada hacia la obtención de sellos, o bien, hacia la obtención de caras. En consecuencia, la búsqueda de la respuesta es de corte experimental. Por ejemplo, si se lanzara una moneda 1000 veces se podría obtener la siguiente tendencia como lo muestra el gráfico de la Figura 7.

Figura 7. Proporción de caras por cada 25 hasta 1000 lanzamientos de una moneda.

El gráfico muestra que en los primeros lanzamientos existe una dispersión alta en términos de cómo varía la proporción de caras del total de lanzamientos. Sin embargo, en la medida que aumenta el número de lanzamientos, la proporción de caras se estabiliza y se aproxima a 0,5 lo que coincide con la probabilidad esperada para una moneda confiable. En general, se puede enunciar que la frecuencia relativa del evento A tiende a su probabilidad teórica cuando el número de experimentos aleatorios tiende al infinito, lo cual puede intuirse a partir del gráfico de la Figura 7. Lo anterior se cumple cuando los eventos son independientes entre sí. Para más detalles, consultar Ley de los Grandes Números.

En la historia de la probabilidad, existen algunas curiosidades relacionadas a un gran número de lanzamiento de monedas: (a) el francés naturalista Count Buffon (1707-1788 e. c.) lanzó una moneda 4040 veces, resultando una proporción de caras de 0,5069 (2048 de 4040); (b) el australiano John Kerrich (durante la II guerra mundial), mientras cumplía condena, lanzó una moneda 10000 veces, resultando una proporción de caras de 0,5067 (5067 de 10000); (c) el inglés estadístico Karl Pearson (alrededor del siglo XVIII) lanzó una moneda 24000 veces, resultando una proporción de caras de 0,5005 (12012 de 24000), según Kelmansky (s.f.).

¿Será acaso que haya alguna moneda no confiable? Se deja esta interrogante como desafío a la lectora y al lector, compare su pensar rápido (primera idea que se le vino a la mente) con su pensar más lento al experimentar con varios lanzamientos de moneda.

El razonamiento anterior es inductivo, pues al no suponer que la moneda es confiable se realizan experimentos y se procede inductivamente para determinar una conclusión general a partir de observaciones de resultados experimentales.

En síntesis, el primer tipo de tarea predomina en el tratamiento que hace la matemática escolar, en tanto, la probabilidad considerada (a-priori) subyace a un proceso deductivo para hallar respuesta en un contexto analítico de prueba intelectual (probabilidad teórica). Mientras que el segundo tipo de tarea es del ámbito de la probabilidad a-posteriori, concebida como herramienta para buscar una solución que requiere de datos, lo cual involucra un proceso inductivo en un contexto experimental de prueba empírica (basado en la Ley de los Grandes Números).

UNA PANORÁMICA CURRICULAR DE LA PROBABILIDAD ELEMENTAL

En la tabla 3, se observa que formalmente la probabilidad comienza en 2° año básico, aunque niñas y niños en 1° año básico pueden experimentar con juegos de azar para luego representar resultados. En 3° y 4° año básico, se espera que los estudiantes realizan experimentos aleatorios diversos, de manera lúdica y cotidiana. Más adelante, en 5° y 6° año básico, van afianzando la probabilidad en su enfoque intuitivo y se introducen al enfoque frecuentista.

Tabla 3. Objetivos de aprendizaje considerados para la probabilidad de 1° a 6° año básico.

Niveles de Educación Básica				
2° año	3° año	4° año	5° año	6° año
OA20. Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.	**OA24.** Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	**OA25.** Realizar encuestas, analizar los datos, comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.	**OA24.** Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento, empleando los términos seguro, posible, poco posible e imposible.	**OA24.** Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.
OA21. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.		**OA27.** Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	**OA25.** Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	
			OA27. Utilizar diagramas de tallo-y-hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias	

Fuente: MINEDUC (2012)

Además, es posible reconocer algunos objetivos de aprendizaje (OA) que progresan, en el sentido que se solicita representar resultados provenientes de una experimentación aleatoria y en la medida que avanza la alfabetización probabilística, se espera que los estudiantes den uso a expresiones que permitan describir y comparar la posibilidad de los eventos, hasta llegar a conjeturar acerca de la tendencia de los resultados obtenidos en un experimento aleatorio como lanzar monedas, dados, o bien, extraer bolitas de una bolsa como se detalló anteriormente en el modelo de urna.

Como se puede examinar, el currículo chileno para abordar la probabilidad durante los primeros seis años escolares es una propuesta que se condice con los enfoques intuitivo y frecuentista, siendo estos compatibles con el modelo de urnas. Por otro lado, hay un énfasis en la construcción de distintas representaciones, lo cual supone avanzar en el manejo y análisis exploratorio de los datos provenientes de experimentos aleatorios, siendo estos últimos vistos como situaciones de incertidumbre de interés para niñas y niños. No obstante, hay que advertir que el ámbito numérico en los primeros años de escolaridad, dado que es reducido, habrá que notar la alta variabilidad que existe para un bajo número de ensayos en el contexto de un experimento aleatorio como se pudo ver en la Figura 7.

ENFOQUES DE ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD PARA EDUCACIÓN BÁSICA

En la enseñanza de la probabilidad en educación básica, se pueden reconocer dos enfoques predominantes en el currículo: el enfoque intuitivo y el enfoque frecuentista (Batanero et al., 2016).

ENFOQUE INTUITIVO DE LA PROBABILIDAD

Hay expresiones lingüísticas relacionadas con ideas intuitivas sobre el azar que persisten al paso del tiempo y generaciones humanas. Tempranamente, niñas y niños empiezan a dar uso a expresiones que permiten cualificar la probabilidad de eventos.

A continuación, se presentan tres escalas referidas a la cualificación probabilística de eventos y su vinculación cuantitativa con un valor para la probabilidad p que varía de 0 a 1 (en R: números reales), siendo cada vez las escalas más finas.

1° Escala

Imposible	Probable	Seguro
p=0	0<p<1	p=1

2° Escala

Imposible	Poco probable	Medianamente probable	Muy probable	Seguro
p=0	p cercano a 0,25 (por ejemplo, 1 de 4)	p cercano a 0,50 (por ejemplo, 2 de 4)	p cercano a 0,75 (por ejemplo, 3 de 4)	p=1

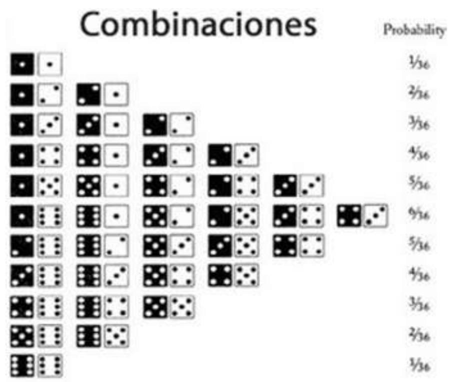
3° Escala

Imposible	Casi imposible	Poco probable	Medianamente probable	Muy probable	Casi seguro	Seguro
p=0	p positivo y muy cercano a 0	p cercano a 0,25	p cercano a 0,50	p cercano a 0,75	p inferior a 1 y muy cercano a 1	p=1

Al comienzo, es esperable que niños y niñas puedan distinguir eventos imposibles, de los posibles y de los seguros, es más, los mismos estudiantes podrían idear eventos para cada una de esas categorías. De esta forma, se da paso a lo probable o a lo posible que escapa de la certeza e introduce la incerteza en uso.

Para la enseñanza, es relevante considerar que en los primeros tres años escolares se puede progresar de la 1° a la 2° escala, y en cuarto año básico se espera que niñas y niños puedan progresar a la 3° escala. Para ello, será necesario considerar eventos que cumplan con el valor de la probabilidad sugerida para cada nivel de las escalas, por ejemplo, ver Tabla 4.

Tabla 4. Ejemplos del uso de escala

Experimento aleatorio	Lanzar dos dados de seis caras, numeradas del 1 al 6 y observar la suma que se obtiene
Resultados posibles y probabilidad a priori	
Uso de 3° escala	**Evento imposible:** obtener una suma de 13 (p=0) **Evento casi imposible:** obtener una suma de 12 (p=1/36=0,0278) **Evento poco probable:** obtener alguna suma entre 2 y 5 (p=10/36=0,2778) **Evento medianamente probable:** obtener alguna suma entre 5 y 8 (p=20/36=0,5555) **Evento muy probable:** obtener alguna suma entre 2 y 8 (p=26/36=0,7222) **Evento casi seguro:** obtener alguna suma entre 2 y 11 (p=35/36=0,9722) **Evento seguro:** obtener una suma entre 2 y 12 (p=1)
Comparaciones	**Es más probable** obtener una suma de 4 que obtener una suma de 2 **Es mucho más probable** obtener una suma de 7 que obtener una suma de 2 Obtener una suma de 3 **tiene la misma probabilidad** que una suma de 11

Fuente: Elaboración propia

En ese sentido, hay que tomar en cuenta el pensamiento probabilístico intuitivo (Borovčnik, 2016), sobre todo, tanto la habilidad de equilibrio entre los elementos psicológicos y formales como la habilidad de separar conceptualmente la aleatoriedad de la causalidad.

ENFOQUE FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad desde este enfoque, permite una conexión con la estadística. En esta perspectiva, la probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un evento al estabilizarse, asumiendo que la experimentación puede repetirse muchas veces, bajo las mismas condiciones e independientes un evento con otro (ver Figura 7).

Dentro de las limitaciones de este enfoque, se tiene que el valor de la probabilidad es una aproximación al valor teórico, por lo que se tendrá una probabilidad estimada. Por otro lado, es incierto el número de experimentos idénticos que se deben realizar para aceptar la estimación de la probabilidad. Además, a veces es difícil tener idénticas condiciones para realizar la experimentación aleatoria. Este enfoque de la probabilidad no siempre es aplicable a todo campo de conocimiento, porque hay ciertos fenómenos que son irrepetibles como algunos provenientes de la historia, la economía y otros.

MODELOS DE URNAS: UNA ARTICULACIÓN ENTRE ENFOQUES INTUITIVO Y FRECUENTISTA

Los modelos de urnas son habituales en probabilidad por ser visualizables, flexibles y aptos a varias situaciones (Berg, 1989). En particular, un modelo de urna puede simular resultados de variables aleatorias discretas, lo cual puede ser útil frente a la prohibición de hacer juegos al azar en algunas culturas. En el ámbito discreto, de hecho, cualquier problema en probabilidad se puede hacer comparable a un problema acerca de bolsas que contengan bolas, y cualquier fenómeno aleatorio puede hacerse similar, en sus aspectos esenciales, a extracciones sucesivas de bolas de un sistema combinado de bolsas (Pólya, 1954).

Un modelo de urnas se construye desde un conjunto de urnas que contengan bolas de igual tamaño y de diferentes colores. Se establece un conjunto de reglas que definen el proceder, según color de la bola extraída en cada urna (u otro atributo observable al ser extraída la bola). El origen de una gran variedad de modelos está dado por reglas que remiten al retirar o añadir bolas de urnas, al cuándo reponer o retirar, al número de bolas y de qué urnas. Supongamos el ejemplo de la Figura 8, hay tres modelos de urnas y se va considerar extraer una bola, observar color, registrar y luego reponer esa misma bola a la urna (i.e., extracción con reposición)

¿Qué podría ocurrir si este procedimiento se repite 400 veces para cada modelo de urna? Se supone que cada bola tiene el mismo chance de extraerse por el atributo de la forma que es idéntico en las bolas, no así el color porque varía.

Figura 8. Modelos de Urnas para conectar el enfoque intuitivo y frecuentista de la probabilidad

En el primer caso (urna con 4 bolas verdes), es claro que las 400 veces saldrá verde y no habrá ninguna otra opción, por lo que es seguro sacar una bola verde (1: valor de la probabilidad). Mientras que en el tercer caso (urna con 2 bolas azules y 2 rojas), ninguna vez saldrá verde, en consecuencia, es imposible sacar una bola verde (0: valor de la probabilidad).

En el segundo caso (urna con 2 bolas verdes, 1 azul y 1 roja), bajo la Ley de los Grandes Números, es medianamente posible sacar una bola verde, cercano probablemente a 200 de 400 extracciones con reposición (aunque no es del todo seguro). Esto podría dar cabida a expresiones sobre lo que se está observando experimentalmente y conectar dicha expresión a una frecuencia como resultado y estimación de la probabilidad.

Además, este tipo de actividad puede invitar a los estudiantes a pensar en la equiprobabilidad cuando la proporción de bolas es la misma (por ejemplo, 2 bolas verdes, 2 rojas y 2 azules) y que en un gran número de experimentos se establezca que sus frecuencias son cada vez más próximas entre sí, distribuyendo uniformemente. Por el contrario, la no-equiprobabilidad puede darse en una urna en que la proporción de bolas no es la misma, lo cual generará para un gran número de experimentos una distribución que no será uniforme. Por ejemplo, en la Figura 9, se tiene un experimento en que se debe sacar 2 bolas, tal que primero se saca una, no se repone y después se saca la segunda.

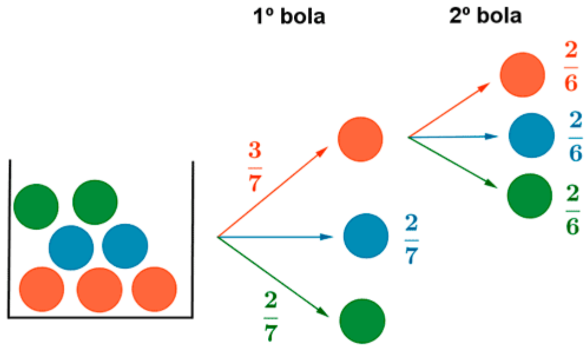


Figura 9. Modelos de Urna de dos extracciones y sin reemplazo.

En consecuencia, si primero se saca una bola naranja, luego es equiprobable sacar como segunda bola una naranja, verde o azul, ya que en la urna queda la misma proporción (2 bolas verdes, 2 bolas azules y 2 bolas naranjas).

En la experimentación, niñas y niños para un gran número de extracciones (e.g., 2100) podrán notar que en la primera extracción posiblemente está privilegiada la bola naranja (900 de cada 2100 extracciones aproximadamente por Ley de los Grandes Números), mientras que en la segunda dependerá de la primera: (a) si es naranja, entonces tiene la misma probabilidad de ser la segunda bola naranja, verde o azul; (b) si no es naranja, entonces no será equiprobable porque si es verde o azul, será más posible que la segunda bola sea naranja que verde o que azul.

Ahora, si se observan como un par ordenado (1° y 2° bola) y sin reemplazo de la primera bola nuevamente, se tienen 9 posibilidades —siendo R: naranja, A: azul y V: verde; entonces están los pares ordenados: RR, RA, RV, AR, AA, AV, VR, VA, VV—, tal que aproximadamente: 300 de cada 2100 extracciones podría salir RR, RA, RV, AR o VR; 200 de cada 2100 extracciones podría salir AV o VA; 100 de cada 2100 extracciones podría salir AA o VR.

La experimentación toma tiempo, lo cual puede verse como una inversión que va en directo beneficio de la experiencia de los estudiantes, su razonamiento probabilístico puede progresar al enfrentarse a estas actividades que involucran modelos de urnas. Y los materiales a usar pueden ser bolas de distintos colores e igual forma, una bolsa negra u otro material que permita tener las bolas invisibles para quien las extrae y unas hojas de trabajo para registrar lo que se observa en cada extracción con una intención educativa tras ello.

REFLEXIONES FINALES

Enseñar probabilidad es desafiante porque como docentes se debe dar oportunidad de aprendizaje probabilístico en situaciones con incerteza, lo cual es controlable teniendo en cuenta un margen de error que debe permitir y potenciar la alfabetización probabilística. Esto, debe dar cabida a los enfoques intuitivo, frecuencial (probabilidad a-posteriori) y clásico (probabilidad a-priori) con su respectiva articulación, sobre todo, en los primeros años, integrando lo cualitativo con lo cuantitativo referido al concepto probabilidad.

En este capítulo se hizo una revisión de las distintas argumentaciones que pueden usar personas que han pasado por una formación matemática frente a una situación de aleatoriedad. Esto permite valorar la experiencia que pueden tener niñas y niños en un escenario de aprendizaje y cambio cognitivo vinculado a la aleatoriedad y que da oportunidades de razonar, a partir de datos como resultados de experimentos aleatorios que pueden repetirse, vinculando así la probabilidad a-posteriori con la a-priori.

Como proyección, se espera que las profesoras y los profesores puedan realizar distintos experimentos aleatorios y analizar sus resultados. También se pretende contribuir al diseño de enseñanzas para niñas y niños para que pongan en juego los procesos de alfabetizar y razonar probabilísticamente.

REFERENCIAS

Batanero, C., Gómez, E, Serrano, L., y Contreras, J. L. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(3), 222-245. Recuperado de https://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/379

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., y Sánchez, E. (2016). Research on teaching and learning probability. En Autores (Eds.), *Research on Teaching and Learning Probability*. ICME-13 topical Surveys. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Berg, S. (1988). Urn Models. En S. Kotz, N. L. Johnson y C.B. Read (Eds.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (pp. 424-436). New York: Wiley.

Borovčnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 71-84). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_11

Borovčnik, M. (2016). Pensamiento probabilístico y alfabetización probabilística en el contexto del riesgo. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *18*(3), 1491-1516. https://revistas.pucsp.br/emp/article/viewFile/31495/21953

Brizuela, B., y Scheuer, N. (2016). Investigar el cambio cognitivo como proceso dinámico. *Infancia y Aprendizaje*, *39*(4), 627-660. https://doi.org/10.1080/02103702.2016.1223710

Hacking, I. (1995). *El Surgimiento de la Probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística.* Barcelona: Editorial Gedisa

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12_full.pdf

Gal, I. (2005). Hacia una alfabetización probabilística para todos los ciudadanos: bloques de construcción y dilemas educativos. En G. A. Jones (Ed.), *Explorando la probabilidad en la escuela. Desafíos para la enseñanza y el aprendizaje* (pp. 39-63). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gómez, E., Contreras, J., y Batanero, C. (2015). Significados de la Probabilidad en Libros de Texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

Kelmansky, D. (s. f.). *Ideas básicas de probabilidad*. Curso de Estadística de la Universidad de Buenos Aires. Recuperado de https://www.dm.uba.ar/materias/estadistica_Q/2010/2/C03%20Probabilidades.pdf

Konold, C. (1991). Comprensión de las creencias de los estudiantes sobre la probabilidad. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Constructivismo radical en la educación matemática* (pp. 139-156). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_7

Laplace, P. (1825). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Paris: Christian Bourgois.

Madrid, C. (2012). *Laplace, la mecánica celeste: ¡este Universo funciona como un reloj! Grandes ideas de la ciencia*. Madrid: RBA Coleccionables.

Ministerio de Educación (2012). Progresión de Objetivos de Aprendizaje – Habilidades. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71256_archivo_01.pdf

Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*. Princeton: Princeton University Press.

Pratt, D., y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham. http://doi-org-443.webvpn.fjmu.edu.cn/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Vergara, A., Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(1), 7-36. https://doi.org/10.12802/relime.20.2311

Las maneras de ver en geometría desde las formas de dos dimensiones en el primer ciclo básico

ANDREA PIZARRO-CANALES
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

CINTHIA IGLESIAS-MANCINI
Universidad Arturo Prat

INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está enfocado en profundizar estrategias didácticas específicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el primer ciclo de enseñanza básica. Pizarro (2018) da cuenta que una revisión de la literatura especializada sobre la enseñanza de esta disciplina para la Escuela Primaria se focaliza en analizar distintos tópicos, a saber (Sinclair y Bruce, 2015, p. 320-321):

- El rol del razonamiento espacial, su conexión con la matemática y la geometría escolar.
- El rol que cumple el dibujo en la construcción de conocimientos geométricos.
- La utilización de tecnologías digitales en la geometría y el razonamiento espacial.
- La importancia de las transformaciones geométricas en el curriculum escolar, incluyendo transformaciones isométricas.
- Propuestas para ampliar la geometría escolar de aquella que pone énfasis en el vocabulario (nombrar y clasificar formas[1] según propiedades) hacia una geometría activa orientada en el aprender haciendo (construir y deconstruir, comparar y manipular mentalmente formas de 3 y 2 dimensiones, orientación espacial).

1 Las formas geométricas son objetos que pueden tener distintas dimensiones. 0 dimensión (0D), 1 dimensión (1D), 2 dimensiones (2D) o 3 dimensiones (3D). Se considera como sinónimos formas 2D y figuras geométricas en el plano.

En el capítulo V del tomo I y en este, se abordan aspectos esenciales al último tópico antes descrito, asociado a una manera activa de aprender geometría, sin dejar de lado el enfoque piagetiano descrito en el capítulo V. Ahí, se revisan también aspectos asociados a la evolución histórica de la geometría y la manera en que este proceso ha influido y afectado en la forma en cómo se enseña actualmente. De acuerdo a lo planteado en dicho capítulo, es relevante recordar que, Gonseth (1945-1952) señala que la dialéctica[2] de la geometría se apoya en tres pilares fundamentales: la intuición, la experiencia y la deducción, y que estos tres pilares colaboran a entender la relación entre el espacio y el mundo sensible. La intuición y la experiencia conforman un polo empírico de la Geometría y la deducción participa del polo teórico.

Como se señala en el capítulo antes mencionado, en este nivel de enseñanza se aborda la Geometría I, en la cual su fuente de validación es la realidad y el mundo sensible. En ella, se ponen en juego los tres pilares nombrados anteriormente y descritos en capítulo V del tomo I[3] (Houdement y Kuzniak,1999).

El presente capítulo centra su atención en el estudio de las formas de dos dimensiones, de ahora en adelante formas 2D, en el primer ciclo de enseñanza básica, en relación al proceso de enseñanza para su aprendizaje. En efecto, para iniciar este proceso, es necesario propiciar tareas matemáticas en las que los estudiantes experimenten, ofreciéndoles diversas oportunidades de manipulación de materiales concretos o mediante softwares que permitan trabajar la geometría dinámica. La importancia de entrar desde la experiencia, permite a los estudiantes que conceptos geométricos abstractos que no se pueden definir en este nivel puedan originar representaciones mentales, a partir de la manipulación de objetos concretos.

---

2 Según la RAE, dialéctica es una técnica de discusión y debate que intenta descubrir la verdad mediante la confrontación de argumentos contrarios entre sí.
3 Para profundizar en el tema ir al capítulo V del tomo I.

La entrada tradicional que ha tenido la enseñanza de las formas geométricas se ha realizado a través del reconocimiento, la identificación, la descripción y la caracterización de ellas. A continuación, se propone una mirada alternativa a esta concepción, desde la deconstrucción de las formas como se explica más adelante. De acuerdo a lo planteado por Duval (2005, 2016), el proceso de deconstruir las dimensiones de las formas es lo que lleva a los estudiantes al desarrollo del razonamiento matemático. En este capítulo se aborda la enseñanza de las formas 2D a partir de las distintas maneras de ver propuestas por el autor.

LAS MANERAS DE VER SEGÚN DUVAL

A continuación, se presentan las maneras de ver en geometría a partir de lo planteado por Duval (2005, 2016). Estas consisten en maneras de enfocar la enseñanza de la geometría, a partir del tipo de tareas geométricas que propicia e intenciona cada una de ellas. La elección del tipo de tareas pone en juego el tipo de habilidades que se están desarrollando cuando se trabaja en esta disciplina y la relación que se tiene con las formas. La tarea propuesta condiciona la relación con las figuras, ya que a partir de su naturaleza se determina la manera de verla. El autor plantea que existen cuatro tipos de maneras de ver: el botánico, el agrimensor, el constructor, el inventor y define una quinta manera, asociada a la deconstrucción. A continuación, se define cada una de ellas relacionándolas con tareas geométricas que potencian su trabajo en el primer ciclo básico.

EL BOTÁNICO

Es la entrada más evidente e inmediata al aprender geometría. Desde esta manera de ver, se distinguen características visuales de las formas. Se trata de aprender a reconocer, identificar y nombrar las formas elementales que se utilizan en la geometría, reconociendo las formas 3D y 2D, como, por ejemplo: los cuerpos geométricos y las figuras que lo componen. Duval (2005), señala que una manera de acceder desde esta perspectiva es la que utiliza Piaget (1948), quien solicita a niños de dos a siete años dibujar a mano alzada, sin utilizar instrumentos, una hoja de un árbol que están mirando físicamente. Al resolver esta tarea, los estudiantes deben coordinar la visión con el movimiento del cuerpo[4], que en este caso es la mano al ir dibujando con el lápiz.

Un ejemplo de tareas, a partir de esta entrada, se encuentra en la Figura 1. En ella se solicita que, exclusivamente y a través del tacto, los estudiantes puedan reconocer la forma que están tocando, de manera de construir o evocar mentalmente una representación, para luego asociarla con una de las figuras que tiene al frente. A partir de lo antes descrito se puede proponer a los estudiantes la siguiente tarea matemática: Señala, ¿a cuál de las formas 2D que tienes a la vista se parece la que tienes en las manos?

Figura 1. Identificación de figuras geométricas a partir de la percepción y asociación con otro a la vista.

Los estudiantes, al resolver tareas que se propician desde esta entrada, potencian el desarrollo de dos habilidades de visualización: percepción de

4 Esta corresponde a una de las habilidades de visualización abordadas en el capítulo V del tomo I. Para mayor referencia revisar el capítulo.

habilidades espaciales y discriminación visual[5].

EL AGRIMENSOR

Esta es la entrada histórica de la geometría. Esta manera de ver se estudia en el eje de medición de manera independiente de acuerdo a lo planteado en el currículo chileno vigente y las corrientes actuales[6]. Duval (2005) señala que se trata de aprender a medir longitudes. Las propiedades de las formas son criterios de selección para las mediciones que se deben realizar, por ejemplo, si medimos un terreno que tiene forma de cuadrado, basta con que se mida un solo lado para tener la longitud del terreno. En esta entrada un estudiante que trabaja como agrimensor pone en juego diferentes habilidades, dependiendo de la tarea matemática que desarrolle, pudiendo ser de dos tipos: medición de un objeto o terreno del mundo real o medición de una forma dada en una representación gráfica, medición de una forma con medidas dadas en una representación y medición de magnitudes distintas a la longitud. En la Tabla 1 se propone una clasificación de los diversos tipos y subtipos de tareas que se pueden proponer a los estudiantes desde la entrada del agrimensor:

Tabla 1. Matriz explicativa de las maneras de ver del agrimensor y los tipos de tareas

Manera	Tipo	Subtipo
Agrimensor	Tipo 1: Medición de un objeto o terrreno del mundo real	Primer subtipo: Sin hacer su representación. Segundo subtipo: Elaborando una representación en el plano. Tercer subtipo: Elaborando una representación en una cuadrícula a escala.
	Tipo 2: Medición de una forma dada en una representación gráfica	Primer subtipo: Cálculo de perímetro o área de una forma dada en una cuadrícula a escala. Segundo subtipo: Cálculo de perímetro o área de una forma dada en una cuadrícula a escala. Tercer subtipo: Cálculo de perímetro o área de una forma dada en el plano.
	Tipo 3: Medición de una forma con medidas dadas en una representación	Primer subtipo: Medición de forma dada en contexto real. Subtipo 2: Medición de una forma en ausencia de contexto.
	Tipo 4: Medición de magnitudes distintas a la longitud	
Constructor		
Inventor		
Deconstrucción dimensional de las formas		

5 Mayor información, remítase al capítulo V del tomo I.
6 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. Estados Unidos: autor. https://www.nctm.org/PtA/

Tipo 1: Medición de un objeto o terreno del mundo real

Un estudiante al medir un terreno y llevarlo sobre un registro escrito (dibujo) realiza variados procesos cognitivos de los cuales los docentes no siempre son conscientes. A continuación, se detallan los procesos cognitivos que se llevan a cabo cuando se solicita resolver tareas matemáticas asociadas a medir un terreno y representar esta información, clasificadas de acuerdo a los diversos tipos de registros que se solicita poner en juego al resolverlas. Con el objetivo de ilustrar los procesos, se considera como referencia la tarea matemática: medir una huerta para poder cercarla y determinar el número de metros de malla que se necesitan para realizar este proceso. Se enuncian las acciones que realiza un estudiante de acuerdo a cada subtipo.

Primer subtipo: Sin hacer su representación

La tarea solicita la medición de un objeto del mundo real, sin considerar que el estudiante represente lo que observa, y solicita exclusivamente el registro numérico de los valores obtenidos, a partir de la medición efectuada. Posteriormente, el estudiante debe comunicar sus hallazgos.

Un ejemplo de este subtipo se muestra en la Figura 2:

"La huerta tiene 6 metros de largo y 2 metros de ancho. Se necesita en total 16 metros de cerco"

Figura 2. Actividad de medición de un terreno[7]

1. Mide la distancia entre dos personas u objetos o la longitud de un terreno.
2. Registra numéricamente los valores obtenidos.
3. Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

Segundo subtipo: Elaborando una representación en el plano

La tarea solicita la medición de un objeto del mundo real, considerando la representación de lo que observa y solicita el registro numérico de los valores obtenidos a partir de la medición efectuada. Posteriormente, el estudiante debe comunicar sus hallazgos.

7 Foto extraída de https://soyeducadora.files.wordpress.com/2014/09/huerto2.jpg?w=1240&h=930

Un ejemplo de este subtipo se muestra en la Figura 3:

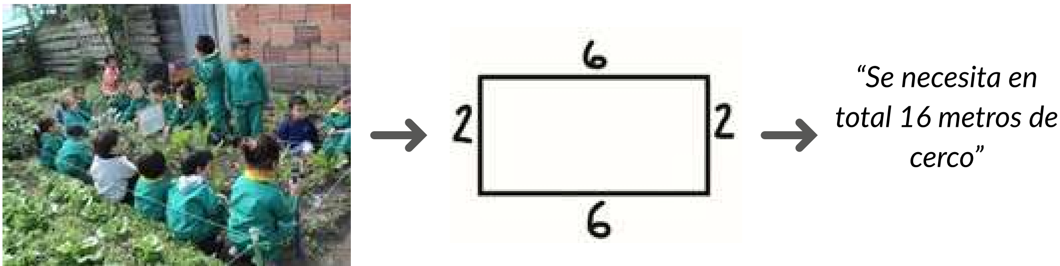


Figura 3. Actividad de medición de un terreno[8]

El estudiante:

1. Mide la distancia entre dos personas u objetos o la longitud de un terreno.
2. Elabora a mano alzada una representación en un medio de registro (hoja de papel, pizarra, cartulina...). En el primer ciclo de enseñanza básica se considera la representación sobre un medio que esté cuadriculado.
3. Identifica las medidas encontradas en el dibujo a mano alzada.
4. Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

Tercer subtipo: Elaborando una representación en una cuadrícula a escala
La tarea solicita la medición de un objeto del mundo real, considerando la elaboración de un plano a escala de lo que observa, empleando para ello una escala de medida, y explicitándola. Requiere también que el estudiante realice el registro numérico de los valores obtenidos a partir de la medición efectuada. Posteriormente, el estudiante debe comunicar sus hallazgos.

Un ejemplo de este subtipo sería el siguiente:

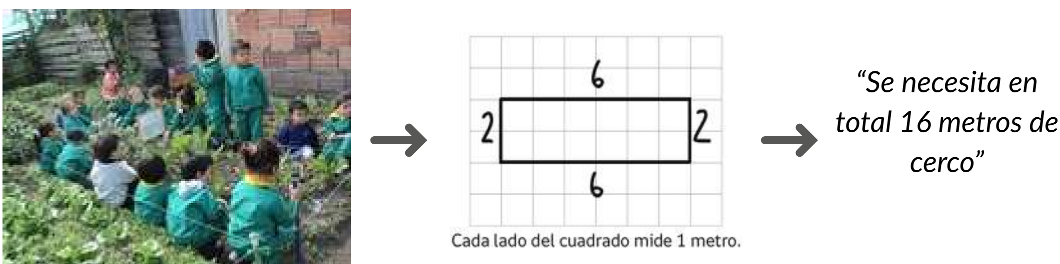


Figura 4. Actividad de medición de un terreno[9]

8 Foto extraída de https://soyeducadora.files.wordpress.com/2014/09/huerto2.jpg?w=1240&h=930
9 Foto extraída de https://soyeducadora.files.wordpress.com/2014/09/huerto2.jpg?w=1240&h=930

El estudiante:

1. Mide la distancia entre dos personas u objetos o la longitud de un terreno.
2. Realiza un plano a escala sobre un papel cuadriculado, señalando la escala de medida.
3. Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

En este subtipo, los estudiantes realizan una correspondencia entre la cuadrícula y la imagen real, asociando la longitud de la medida de un lado del cuadrado exclusivamente a un metro, pues el manejo de escalas y proporciones se aborda de manera posterior al primer ciclo. Este último subtipo de tareas no se encuentra presente en el curriculum vigente del primer ciclo de enseñanza básica en Chile, sin embargo, los estudiantes realizan la correspondencia en forma intuitiva con el apoyo del papel cuadriculado.

Tipo 2: Medición de una forma dada en una representación gráfica
Para el caso de tareas que implica el cálculo de longitudes de formas 2D, en los que no existe un contexto real, este se realiza a partir de un dibujo en el que pueden o no estar dadas sus medidas. Se distinguen tres subtipos en este tipo de tarea matemática.

Primer subtipo: Cálculo de perímetro o área de una forma dada en una cuadrícula
La tarea solicita determinar el perímetro o el área de una forma que se encuentra en una cuadrícula. En la gestión de este subtipo de tarea matemática, es importante que el docente señale previamente que un cuadrado equivale a una unidad, pues existe una ausencia de escala.

Al resolver una tarea de este subtipo, los pasos a seguir por un estudiante serían los siguientes:

1. Mide haciendo uso de la cuadrícula.
2. Registra numéricamente los valores obtenidos.
3. Realiza cálculos matemáticos mentales o escritos.
4. Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

Una ilustración de este tipo de tareas se enuncia en la Figura 5.

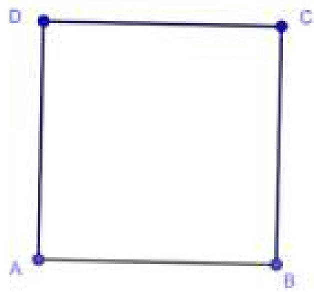


Figura 5. Cálculo del perímetro de una figura, identificando sus medidas.

Tipo 3: Medición de una forma con medidas dadas en una representación

Este tipo de tareas no es una tarea propia del agrimensor, pero está muy presente en los textos escolares. En ellas el foco está en aplicar fórmulas que permiten obtener un cálculo, pues las medidas de las formas se encuentran dadas en el enunciado de la tarea. O bien, están descritas en la representación de la figura entregada.

La tarea solicita determinar el perímetro o el área de un objeto que se encuentra representado en un contexto real o en ausencia de él.

Primer subtipo: Medición de forma dada en contexto real

Un ejemplo de un estudiante que resuelve una tarea matemática que pertenece a este subtipo es el siguiente:

- Lee y comprende el enunciado de la tarea matemática, que no corresponde a una tarea de tipo simple[10].
- Evoca mentalmente el contexto real del problema.
- Observa la imagen en la representación dada y analiza la información entregada. Producto de ello pone en juego las propiedades que le permiten obtener la información necesaria para resolver la tarea propuesta.
- Resuelve aplicando la fórmula que le permite dar respuesta a la tarea propuesta.
- Registra numéricamente el resultado obtenido.
- Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

Un ejemplo de este tipo de tareas se muestra en la Figura 6, extraída del texto Sumo Primero de tercero básico.

10 Existe una tipología de tareas matemáticas (Nechache, 2017): Las tareas simples. Poseen un débil nivel de exigencia, su resolución exige en el enunciado de la tarea, explícitamente, el uso de conocimientos y procedimientos ya memorizados por el sujeto.

Figura 6. Cálculo del perímetro de una figura (Isoda y Estrella, 2020a, p.35)

Segundo Subtipo: Medición de una forma en ausencia de contexto

Un ejemplo de un estudiante que resuelve una tarea matemática que pertenece a este subtipo es el siguiente:

- Observa cada figura e identifica las medidas dadas.
- Realiza cálculos matemáticos mentales o escritos.
- Comunica oralmente o por escrito sus hallazgos.

Un ejemplo de este subtipo de tareas se muestra en la Figura 7, extraída del texto Sumo Primero.

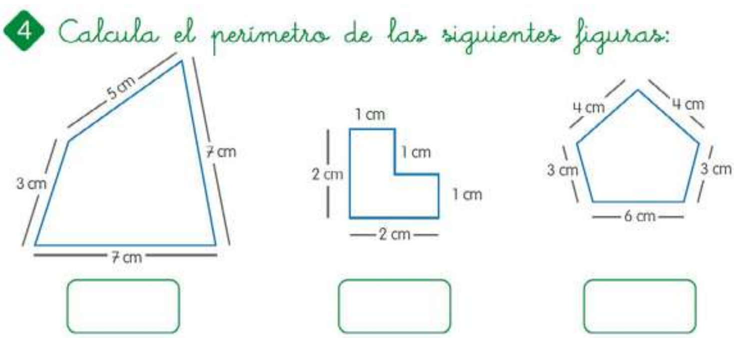


Figura 7. Cálculo del perímetro de una figura (Isoda y Estrella, 2020a, p.36)

Tipo 4: Medición de magnitudes distintas a la longitud

Este tipo de tareas matemáticas que se abordan desde la entrada del agrimensor y que se trabajan en el primer ciclo básico, están relacionadas con medir ángulos empleando el transportador, calcular la medida de superficies[11], determinar la masa de ciertos objetos, calcular el tiempo transcurrido entre eventos, y la medición de las capacidades[12].

11 Se define el área como la medida de la superficie.
12 Se define el volumen como la medida de la capacidad.

Es importante recalcar que la realización de conversiones de unidades de medida, ya sean de longitud, masa, tiempo, capacidad o superficie es un tipo de tarea que aborda exclusivamente un cambio de registro de representación y no se relaciona con formas de entrar a la geometría.

EL CONSTRUCTOR

Esta entrada es necesaria para construir el razonamiento geométrico (Duval, 2005). En ella, son las propiedades de la figura las que jerarquizan la secuencia de pasos a seguir para su construcción. La particularidad de esta forma de entrar a la geometría, es que, para construir formas geométricas se utilizan instrumentos de apoyo que pueden ser la regla no graduada y el compás; o bien, a partir de softwares geométricos: como el GeoGebra, Cabri geométrico u otro. En ambos casos, ya sea con el uso de la mano al tomar el lápiz u otro artefacto[13] o el uso del mouse al mover el cursor, se construye una forma geométrica.

Con el objetivo de ilustrar esta entrada, se ejemplifica mediante la tarea geométrica: "Construir un triángulo isósceles", conocida su definición[14].

Al resolver la TMG[15], se ponen en juego conocimientos y propiedades de objetos geométricos que permiten determinar bajo qué condiciones es posible construir un triángulo que cumpla la definición antes descrita: Se sabe que, en toda circunferencia, los radios de ella son de igual longitud, por lo que, si se consideran dos de ellos, se tienen los tres puntos no colineales para formar el triángulo pedido. Estos puntos corresponden al centro y los dos puntos de la circunferencia, determinados por los radios trazados. La construcción mencionada es posible de ser realizada bajo una secuencia lógica de pasos, ya sea empleando instrumentos geométricos o software para su construcción, y siempre cumplirá con la condición de tener dos lados congruentes. Es entonces la definición de circunferencia una posible estrategia que permite construir dicho triángulo.

Para abordar la TMG, haciendo uso de regla y compás, el docente deberá solicitar al estudiante que construya una circunferencia empleando un radio arbitrario. Luego, considerar el centro *O* y dos puntos cualesquiera *C* y *D* que pertenezcan a la circunferencia. Posteriormente, trazar los segmentos *CO*, *DO* y *CD*. Se sugiere que se pida nombrar otros puntos *E* y *F* pertenecientes a la misma circunferencia de manera que, siguiendo los mismos pasos de construcción, los estudiantes observen que cualquier triángulo construido bajo estas condiciones siempre será isósceles. Ver Figura 8 que ilustra la construcción.

13 Los artefactos son objetos digitales o no digitales que permiten resolver tareas matemáticas. Es un medio didáctico que a través de una adecuada gestión permite constatar y comprender las propiedades matemáticas en estudio.
14 El triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados congruentes o de igual longitud.
15 Tarea matemática del área de la geometría.

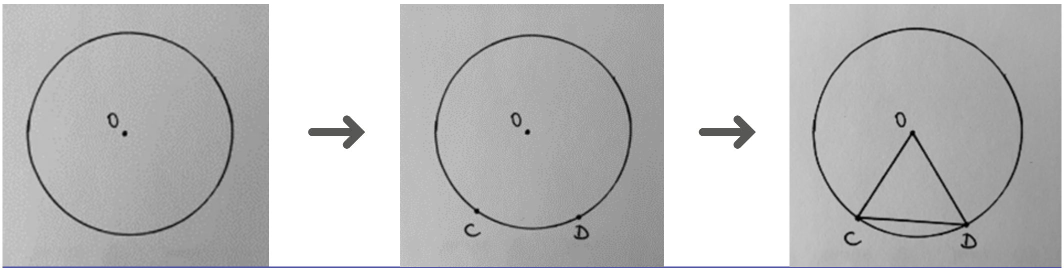


Figura 8. Construcción geométrica del triángulo isósceles COD

Ahora bien, si se realiza esta construcción y se anima a través de un software, queda explícita la geometría dinámica[16], ya que se puede visualizar que el triángulo mantiene sus propiedades independientemente de la medida de sus lados, o la posición en el plano, dadas las condiciones de su construcción.

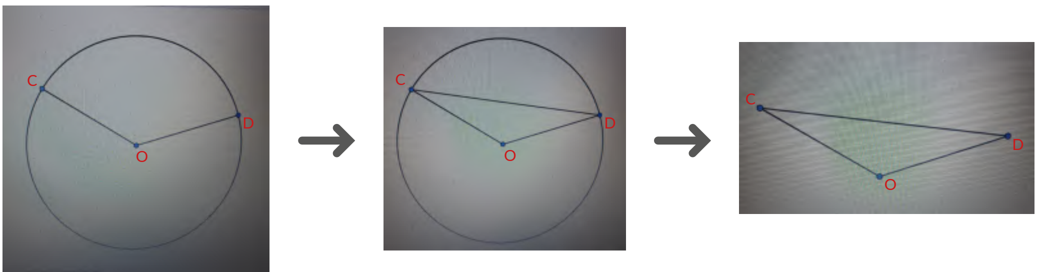


Figura 9. Construcción geométrica del triángulo isósceles a partir de circunferencia usando software Geogebra

La geometría dinámica obliga al estudiante a poner en juego las propiedades de los objetos para poder construir, ya que sin ellas es imposible su realización (Duval, 2005, 2016).

La tarea recién descrita no está presente en el primer ciclo de educación básica en Chile, pues desde la entrada del constructor, se construye utilizando las propiedades de los objetos. A este tipo de TM_G se les conoce con el nombre de construcciones geométricas, en las que la medida no tiene injerencia, ni ocupa ningún rol en la construcción de la figura.

16 Se llama geometría dinámica a la que utiliza los softwares informáticos para realizar construcciones geométricas, siendo este el artefacto para construir los objetos. La potencialidad de ellos, es que permiten que los estudiantes en un primer momento puedan explorar a través de la manipulación de los objetos en el plano.
Por ejemplo, un punto A podría desplazarse libremente por el plano, salvo que por construcción tenga ciertas restricciones de desplazamiento. Un caso particular, sería: si A es un punto que pertenece a la recta l, solo podría desplazarse en l.
Es en el año 1984 que se crea el primer software geométrico, Cabri, creado por especialistas en didáctica de la matemática. Esto constituyó el inicio de la geometría dinámica, en la que se obliga al resolutor a pensar en propiedades geométricas para la realización de las construcciones.

Por otra parte, cabe preguntarse ¿con qué tipo de tareas se puede introducir el estudio de la geometría desde la manera de ver del constructor en el primer ciclo de enseñanza básica? En este nivel, es posible desarrollar otros tipos de construcciones, llamadas construcciones mecánicas, las que se pueden realizar con apoyo de instrumentos geométricos o artefactos. En ellas, el estudiante necesita conocer la definición del objeto a construir. Siguiendo el mismo ejemplo anterior, asociado a la construcción de un triángulo isósceles, un estudiante podría trazar un segmento *AB* de medida arbitraria, por ejemplo $\overline{AB}$=5 cm. Posteriormente, a partir de *A* o de *B* trazará otro segmento, en este caso se elige el punto *B*, copiando la misma medida a partir de él, obteniendo el segmento $\overline{BC}$. Finalmente, se unen los tres puntos, generándose el triángulo isósceles ABC como se ilustra en la Figura 10.

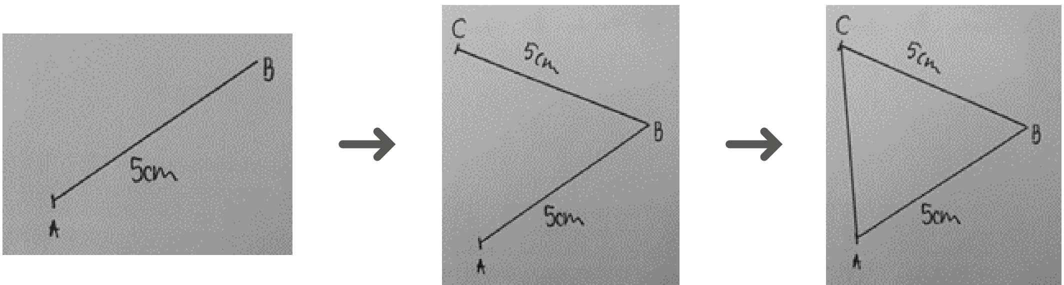


Figura 10. Construcción mecánica del triángulo isósceles ABC

La construcción mecánica permite poner en acto la definición de la figura a partir de una representación específica, un caso particular. Es evidente que haciendo uso de la geometría dinámica también es posible hacer construcciones mecánicas. Sin embargo, sólo es posible reproducir lo que se hace con lápiz y papel, ya que la generalización es imposible de realizar, debido al procedimiento efectuado para desarrollar la construcción. En la Figura 11 se ilustra la construcción antes descrita haciendo uso de un software geométrico.

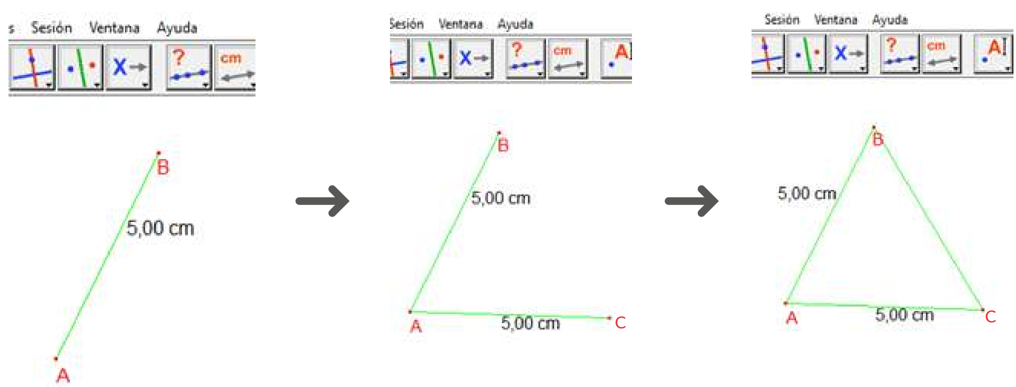


Figura 11. Construcción mecánica del triángulo isósceles ABC con Cabri geométrico

En síntesis, se entiende en los primeros años de escolaridad por construir a aquella actividad en la que los estudiantes trabajan con redes, moldes, cajas, calcando las caras de formas 3D, etc. Por tanto, la construcción está asociada a construir mecánicamente y armar o desarmar formas geométricas.

INVENTOR

En esta entrada se resuelven tareas matemáticas que son de tipo estándar o robustas[17], en las que se exige una deconstrucción visual de una forma dada. Para ello, Duval (2005, 2016) señala que, en ocasiones, es necesario recurrir a construcciones auxiliares a partir de una figura inicial para llevar a cabo la tarea. Para realizar estas construcciones auxiliares, se necesita evocar las propiedades de la figura, proceso que no se realiza necesariamente de manera consciente por quien resuelve la tarea, pero que constituye un punto de partida en su resolución.

Por ejemplo, en el programa de estudio de segundo básico, se propone como desafío que los estudiantes "resuelvan problemas relativos a construcciones de triángulos, cuadrados y rectángulos" (Mineduc, pp.119, 2013). Para ello, se proponen tres tareas, de las cuales abordaremos la siguiente: Construyen con una cuerda un triángulo que tenga todos los lados que sean congruentes.

El estudiante para desarrollar la tarea antes descrita, primero necesita deconstruir mentalmente la forma solicitada, pensando inicialmente en sus características. Esto se relaciona con las medidas de los lados que lo conforman, por tanto, necesitará generar tres segmentos de igual medida. Posteriormente, y utilizando una pizarra de corcho, por ejemplo, como se muestra en la Figura 12; el estudiante podría seguir los siguientes pasos: pinchar dos chinches azules que estén amarrados a una cuerda, siendo esta su medida arbitraria. Luego, tomar cada uno de los extremos de la cuerda restante para copiar la distancia entre los chinches azules, pinchando la cuerda tensa con el chinche rojo, para así construir el triángulo con las características requeridas.

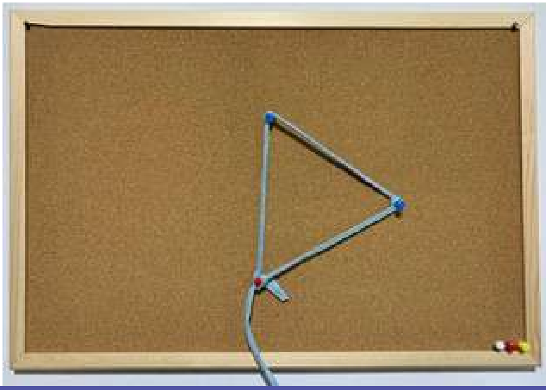


Figura 12. Construcciones de formas 2D con pizarra de corcho

17 Son de alto nivel de exigencia, su resolución requiere de conocimientos y técnicas de resolución que no necesariamente están aprendidas y que no están disponibles en una enseñanza ni en una persona particular (Nechache, 2017). Para mayor referencia revisar el capítulo I del tomo I de este libro.

Un ejemplo de este tipo de entrada, se muestra en el texto Sumo Primero de segundo básico (ver Figura 13). En ella se solicita dibujar solo una línea sobre el rectángulo dado para formar otras dos figuras requeridas. Por ejemplo, el ítem 3 solicita al estudiante dibujar una línea en una posición tal que la figura resultante sean un cuadrado y un rectángulo.

Cada estudiante puede desarrollar su propia estrategia para llevar a cabo la tarea solicitada. Más aún, intenciona un proceso de puesta en común para que los estudiantes puedan constatar que existen diversas estrategias para su desarrollo.

A partir de esta tarea se propicia la entrada desde el inventor pues en ella se intenciona que el estudiante realice una deconstrucción visual de la forma dada inicialmente, es necesario recurrir a trazos auxiliares para lograr obtener las figuras solicitadas.

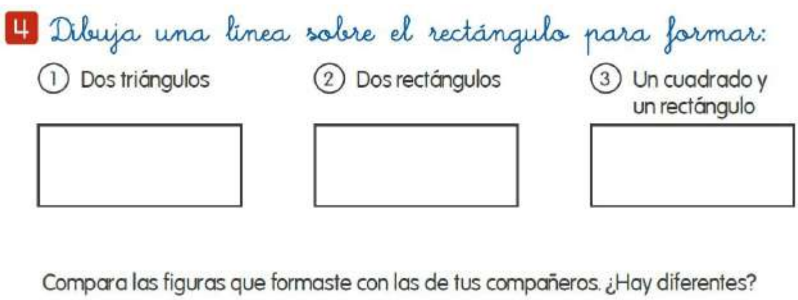


Figura 13. Creación de formas 2D a partir de otra dada (Isoda y Estrella, 2020b, p.45)

En la tarea recién descrita se requiere que el estudiante no deconstruya la forma 2D dada, sino que se requiere que la reconfigure, como si fuera un rompecabezas. Esto pues, se le descompone en unidades figurales del mismo número de dimensiones que la figura de partida (2D/2D). Este tipo de división recibe el nombre de mereológica, en la que se divide un todo en partes que se yuxtaponen o superponen. Se realiza con las partes obtenidas una figura que puede ser similar, como el caso del ítem 2 de la Figura 16, o bien, distinta como el caso del ítem 1 y 3.

Las tareas que exijan la realización de una descomposición mereológica se pueden llevar a cabo de manera mental inicialmente, luego de manera material, ya sea recortando y reorganizando las piezas, o de manera gráfica, agregando trazos como es el caso de lo requerido en la tarea matemática propuesta en la Figura 14.

LA QUINTA MANERA DE VER: LA DECONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL DE LAS FORMAS

Duval (2005, 2016) señala que la manera exigida por el razonamiento matemático demanda la descomposición de las formas geométricas de cualquier dimensión en unidades figurales de dimensiones inferiores a la dada. Un cubo se deconstruye en seis cuadrados (3D/2D); otro caso, una pirámide de base cuadrada, se deconstruye en un cuadrado y cuatro triángulos isósceles (3D/2D). Un polígono, se puede deconstruir en cada uno de los segmentos que lo componen (2D/1D). Un segmento, se puede deconstruir en infinitos puntos (1D/0D). El realizar el proceso de deconstruir las dimensiones, pasando de superficies a líneas representa una revolución cognitiva para la visualización.

El caso particular del cubo, descrito anteriormente se puede ir descomponiendo de manera sucesiva: los estudiantes pueden constatar que esta forma está compuesta por una configuración de seis cuadrados congruentes mediante diversas estrategias y haciendo uso del material concreto, por ejemplo: desarmando una caja de forma cúbica y pintando de distintos colores las caras que la forman. Posteriormente, pueden seguir con la deconstrucción: cada cuadrado de la configuración se puede descomponer en segmentos de recta 2D/1D, y cada segmento de recta puede ser descompuesto en puntos, 1D/0D. Es posible también la realización del proceso antes descrito de manera inversa.

Es el juego de armar y desarmar el que va desarrollando en los estudiantes el razonamiento geométrico. En estos niveles, de manera exclusiva para el paso de 3D a 2D.

Figura 14. Estudiante desarmando cajas

En la Figura 14 se muestra el tipo de tarea antes descrito, a partir de la descomposición de un prisma recto de base rectangular. La estudiante progresivamente va desarmando la caja propuesta, lo que le permite identificar las formas 2D que la componen.

Duval (2005, 2016) plantea que no existe una jerarquía asociada a cada una de las maneras de ver. Sin embargo, da cuenta que la entrada del constructor y del inventor pueden fundar el conocimiento geométrico, pues desde esta entrada las TMG propuestas requieren poner en juego las propiedades geométricas que tienen los objetos matemáticos.

ESTRATEGIAS Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FORMAS 2D

En el primer ciclo de enseñanza básica, las formas 2D se enseñan a partir de los cuerpos geométricos, identificando las formas que los componen. A continuación, se presentan algunas ideas en relación con la enseñanza de las formas 2D, a partir de los planteamientos de Jaguthsing (2014), en coherencia con las ideas de Duval (2005, 2016) descritas en los apartados anteriores.

a. En niveles iniciales, los estudiantes generan imágenes conceptuales para un concepto. Por tanto, la utilización de definiciones no corresponde a una entrada idónea para trabajar la conceptualización con los estudiantes. En cambio, se sugiere el uso de ejemplos a través de materiales concretos, entregando representaciones que corresponden al concepto en juego, y otras que no. Desde esa entrada será posible establecer conjeturas y caracterizaciones de las formas en juego.
b. Tal como se ha indicado en el apartado 2, la incorporación de la geometría dinámica permite a los estudiantes explorar a través de la manipulación de los objetos en el plano. Esto le permitirá establecer elementos invariantes y elementos que cambian tras la manipulación de artefactos. Por ejemplo, si se interesa en trabajar las vistas de las formas 3D, para identificar las formas 2D que la componen, el uso de un software de geometría dinámica, como por ejemplo Geogebra, permitirá ir variando las vistas de una forma 3D. También, a través de estos recursos se puede animar el armado y desarmado de formas 3D, tal como se muestra en la Figura 15, al deconstruir un prisma recto de base cuadrada.

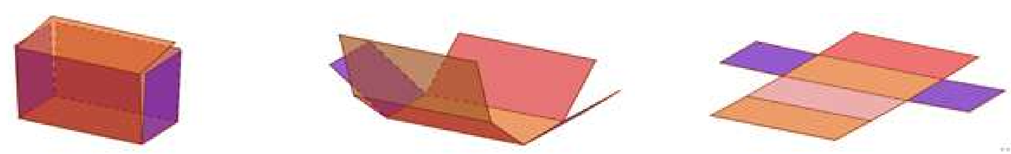


Figura 15. Animación de deconstrucción de un paralelepípedo usando Geogebra

c. Existen una infinidad de recursos didácticos, desde materiales concretos a materiales específicos para enseñar matemática, que permiten la construcción de las formas de dos dimensiones en primer ciclo básico: palos de maqueta unidos con plasticina, uso de bombillas de papel con lana o cuerda para unir, tangrama, geoplano, papel lustre, formas 2D imantadas, barras mecano, pizarra de corcho con chinches, entre otros. En la Figura 16 se presentan ejemplos de este tipo de materiales. Es importante destacar que estos materiales concretos, u otros, si bien tienen un cierto grosor, lo que los hace constituirse como formas 3D, en su utilización como medio de enseñanza, se consideran como forma 2D, ya que se observan exclusivamente desde una cara (desde arriba).

Figura 16. Ejemplos de materiales concretos para realizar construcciones de formas 2D.

Por ejemplo, el tangrama es un rompecabezas chino[18] que se compone de siete piezas geométricas: un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos rectángulos isósceles diferentes. Todas ellas componen un cuadrado dividido en siete partes distintas. Este recurso ofrece la posibilidad de armar formas de dos dimensiones yuxtaponiendo piezas, a partir de un modelo o consigna dada. Esto permite también que los estudiantes, desarrollen las habilidades de visualización abordadas en el capítulo V del tomo I.

d. La deconstrucción realizada con el software Geogebra, ilustrada en la Figura 15 es posible de realizar con material concreto armando y desarmando cajas. Se puede utilizar un material llamado cuerpos desarmables, como lo muestra la última imagen de la figura 19, ocupando la misma función que las cajas de medicamentos.

18 Sus primeras apariciones se sitúan en China a principios del siglo XIX.

e. Los palos de maqueta pegados con silicona, ofrecen la posibilidad de construir polígonos, a partir de un modelo dado o evocando mentalmente una figura. Al realizar estas construcciones es posible generar solo casos particulares de la forma dada, pues se recurre a la medida de los lados de la forma, representados por los palos de maqueta, como se muestra en la Figura 17. En consecuencia, el estudiante al resolver esta tarea, está trabajando con una entrada de constructor mecánico con material concreto, pero requiere poner en juego aspectos del agrimensor para generar su construcción.

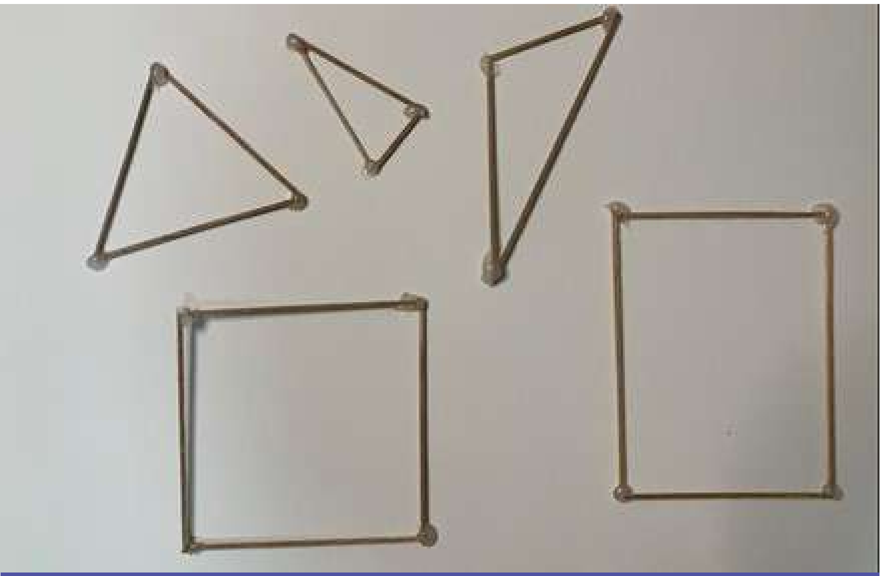


Figura 17. Construcciones de formas 2D con palos de maqueta unidos con silicona.

f. Otro tipo de recurso que también tiene su adaptación al contexto digital, que es susceptible de utilizar para entrar a la geometría desde el constructor, es el geoplano. Corresponde a un tablero de madera u otro material, con varios pivotes dispuestos en cuadrícula o circunferencia. En su utilización, los estudiantes deben pensar en las propiedades geométricas previo a la construcción de la forma 2D requerida. Esto corresponde a una característica propia desde la entrada del constructor. Es un recurso limitado, pues permite hacer construcciones con unidades de medida establecidas, pues se debe incorporar la unidad de medida en su diseño. Por tanto, se generan casos particulares de la construcción dada empleando como unidad de medida la distancia horizontal o vertical entre dos pivotes. Se ilustran algunos ejemplos de construcciones en la Figura 18.

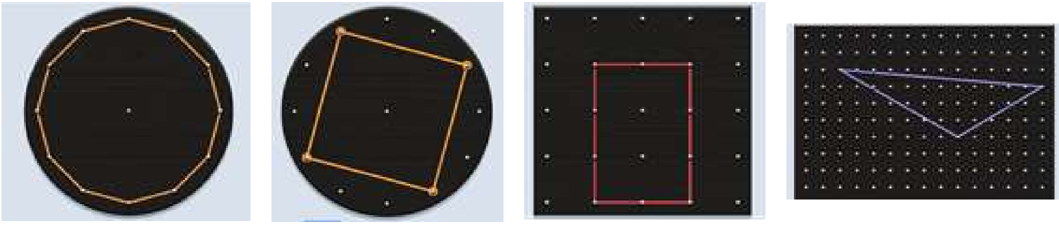


Figura 18. Construcciones de figuras geométricas con geoplanos digitales[19]

g. Otro tipo de material que se puede emplear en este nivel, son formas 2D en que sus bordes están imantados[20], de manera que al combinarlos puedan construir otras formas solicitadas, ya sean 2D o 3D. A partir de una forma 3D, se les puede solicitar que calquen o estampen cada una de las caras de la forma 3D y que reconozcan las figuras geométricas que la componen. En este tipo de tareas, el estudiante efectivamente pone en juego propiedades geométricas de las formas, de acuerdo a su nivel de desarrollo cognitivo, haciendo uso de propiedades al reconocer objetos e identificar sus elementos constitutivos.

h. En el primer ciclo de enseñanza básica, es posible orientar a que los estudiantes puedan reconocer algunas propiedades de las figuras. En este sentido, es importante brindarles experiencias que lo permitan. Para ello, proponga un conjunto de formas y propicie que los estudiantes las clasifiquen y comiencen a levantar definiciones mínimas de las formas 2D. Es relevante que en la gestión de la tarea matemática se pueda hacer énfasis en las relaciones que van existiendo entre las diversas formas. Desde esta entrada, los estudiantes tendrán la posibilidad de utilizar justificaciones y probar sus conjeturas. El uso de software de geometría dinámica puede enriquecer la gestión de la tarea.

Al proponer tareas matemáticas en las que nuestros estudiantes tengan la posibilidad de transitar por distintos tipos de representaciones del mismo objeto geométrico se potencia el pensamiento creativo.

19 Fuente: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/
20 Se muestra este material en el capítulo V del tomo I.

DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES QUE PUEDEN PRESENTAR LOS ESTUDIANTES EN EL APRENDIZAJE DE LAS FORMAS 2D.

Las maneras de ver permiten enseñar la geometría teniendo clara conciencia de las habilidades que se potencian en cada una de las TMG que se proponen a los estudiantes. Para su enseñanza, es necesario considerar las dificultades, obstáculos y posibles errores que se pueden presentar. A continuación, se abordan algunas de ellas.

a. Relativas al uso del material concreto

El material concreto es un recurso muy necesario para la enseñanza en los primeros años de escolaridad, sin embargo, se debe escoger muy bien cuál de ellos utilizar para evitar obstáculos en el aprendizaje. Por ejemplo, se aconseja utilizar palos de maqueta unidos por plasticina para trabajar las figuras geométricas, sin embargo, al manipular este material, se deforman. Así, el estudiante estará en los primeros años construyendo un cuadrado, pero al manipularlo, se transformará es un rombo (ver Figura 19). Si bien este objeto no se enseña en primer ciclo, es interesante utilizar este material para estudiar las relaciones que existen entre los cuadriláteros. La modificación le permitiría variar la forma, haciendo que el estudiante se de cuenta de relaciones que se dan entre los cuadriláteros, por ejemplo.

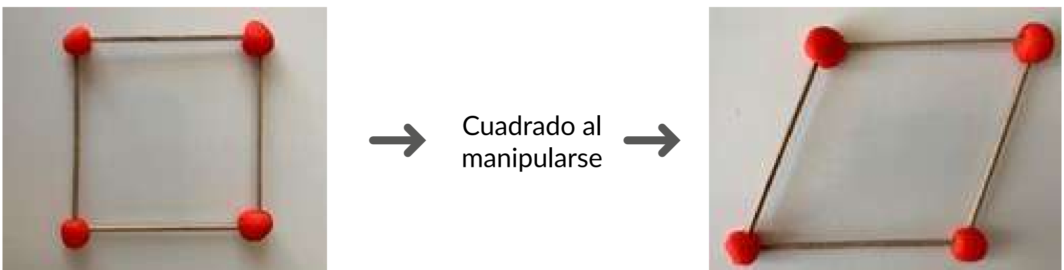


Figura 19. Relaciones entre cuadrado y rombo con material concreto

A raíz de la dificultad antes descrita, en este nivel es necesario abordar su enseñanza pegando sobre una hoja o una superficie lisa los palos de maqueta unidos con plasticina, como se muestra en la Figura 20. Esta dificultad se presenta también cuando se unen bombillas de papel conectadas con lana. En el caso de no realizarse esta construcción en una superficie lisa, por ejemplo, para el caso del cuadrado que se muestra en la Figura 19, se puede hacer una variación de la misma construcción a través de palos de maqueta pegados con silicona como se mostró en la Figura 17. Esto permitirá que las figuras queden fijas sin deformarse al manipularlas. En cursos superiores, el estudio de las relaciones entre de ambos objetos es posible a través de este recurso.

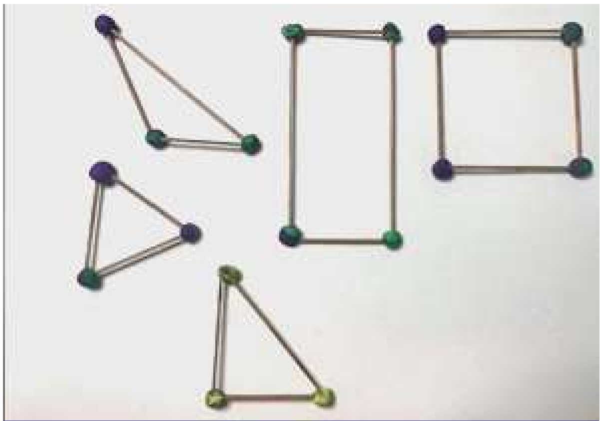


Figura 20. Construcciones de formas 2D con palos de maqueta unidos con plasticina.

b. Relativas a la posición en el plano en que se entregan las formas

La enseñanza tradicional de las formas 2D considera entregar a los estudiantes figuras geométricas que siempre se encuentran en la posición usual o estándar, esto es, con la base de la forma de manera horizontal, formas prototípicas. Esto hace que los estudiantes definan a las formas desde lo visual y no desde las propiedades que lo caracterizan. En el mismo contexto de las figuras prototípicas, los estudiantes pueden reconocer como triángulos, sólo a aquellos casos particulares de triángulos, como el caso de los isósceles o equiláteros, por ejemplo. No consideran a un triángulo obtuso como tal, pues no es una forma con la que estén relacionados.

En niveles iniciales, se recurre a la definición de una forma para poder trabajarla con los estudiantes. Esto representa un nivel de abstracción al que no pueden acceder sin un adecuado andamiaje. En cambio, se debería comenzar mostrándoles una cierta cantidad de objetos que constituyan representaciones de la forma que están trabajando, en distintas orientaciones y de diversas categorías. En este sentido, se sugiere también mostrarle formas que no correspondan a la categoría con la que se está trabajando. Se debería mostrar entonces un número adecuado de diversas representaciones de triángulos no prototípicos y también un conjunto de formas que no lo sean.

En el caso del cuadrado es importante trabajarlo con distintas posiciones en el plano, para que el alumno estudie sus características y lo reconozca independientemente de la posición que tenga, como se muestra en la figura 21. Los estudiantes suelen visualizar a la figura de la derecha como un rombo, pues generalmente se les presenta el cuadrado en la posición estándar.

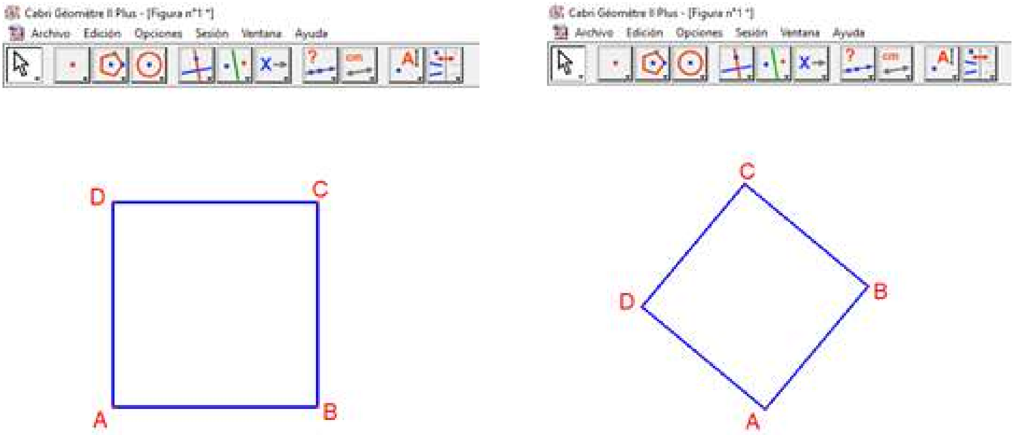


Figura 21. Cuadrado en dos posiciones en el plano

ALGUNOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS FUNDAMENTALES

En geometría existen tres objetos primitivos que no se definen, y solo se representan: el punto, la recta y el plano. A partir de ellos, es posible construir con artefactos o softwares las diversas formas geométricas presentes en el curriculum escolar.

Los puntos tienen cero dimensión (0D) y se denotan con letra mayúscula. Cada recta queda determinada por dos puntos distintos en el plano[21]. Estos al carecer de dimensión, solo se pueden ver cuando se intersectan trazos secantes o trazos que forman una esquina (vértices).

Las rectas tienen una dimensión (1D) y se pueden nombrar a partir de dos puntos o bien, con una letra minúscula, como muestra la Figura 22, en la que se denota como recta *AB* o $\overleftrightarrow{AB}$[22] y se lee "recta AB" y en el segundo caso se escribe recta l y se lee recta l (Ver Figura 22).

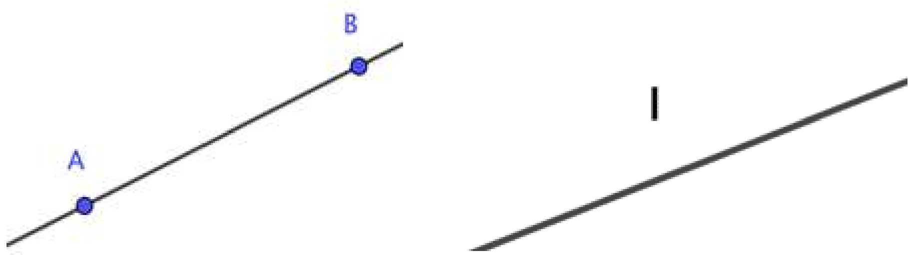


Figura 22. Distintas Notaciones para recta

Dos rectas del plano se llaman paralelas si no tienen puntos en común o si tienen igual dirección[23] y dos rectas se llaman secantes cuando tienen un punto en común, como se muestra en la Figura 23. Existe un caso particular de rectas secantes, que corresponde a cuando las rectas al intersectarse generan cuatro ángulos rectos. En ese caso, se les denominan perpendiculares.

21 Primer Axioma de Euclides
22 El segmento de recta con punta de flecha en ambos sentidos sobre AB es solo para la notación y no significa que cuando se grafica una recta se le ponga esas puntas de flecha, ya que el concepto de recta en el plano establece que se prolonga indefinidamente en ambos sentidos, sin necesidad de incluir las puntas de flecha.
23 Segundo Axioma de Euclides: Por un punto P fuera de una recta l existe una sola recta l' paralela a l.

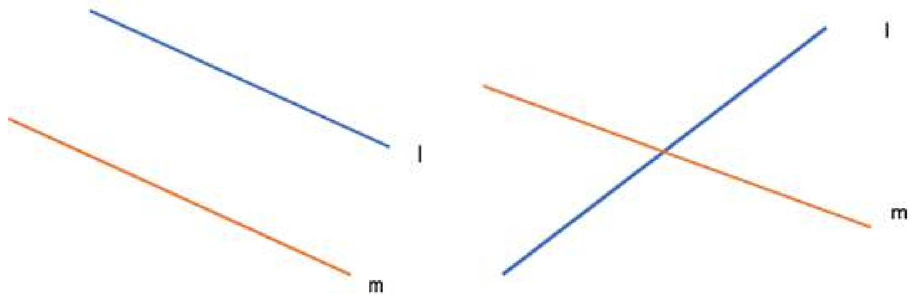
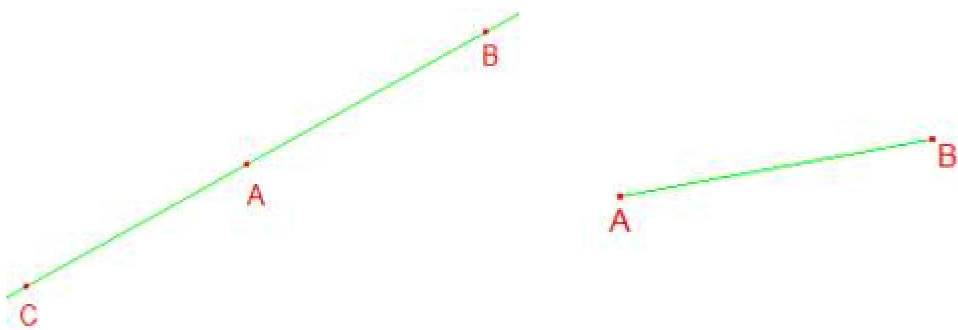


Figura 23. Rectas paralelas y secantes

En la recta existen subconjuntos de elementos que se pueden formar a partir de ella. Corresponden a rayos, las semirrectas y segmentos. Si en una recta se determinan los puntos A, B y C, se determinan en ella dos rayos (Ver Figura 24). Además, se puede señalar que A divide a la recta en dos semirectas, por lo tanto, el rayo y la semirecta describen la misma figura. En este nivel educativo se trabajan como sinónimos. Para denotarlos, se escribe como rayo *AB* o $\overrightarrow{AB}$ y se lee "rayo AB". Esta notación depende del punto de origen y del punto hacia donde se dirige. Es posible encontrar en la figura mencionada, los rayos $\overrightarrow{AB}$, que se dirige de A hacia B, $\overrightarrow{AC}$ que se dirige de A hacia C, $\overrightarrow{CA}$ que se dirige de C hacia A, etc[24]. Si en una recta se denominan A y B a dos de sus puntos, entonces se define al segmento de recta AB, como la porción de recta comprendida entre los puntos A y B, donde A y B son los extremos del segmento. Se escribe segmento AB o $\overline{AB}$ y se lee segmento AB, tal como se muestra en la Figura 24.



Rayo

Segmento

Figura 24. Rayo y segmento

24 Dos puntos cualesquiera de la recta determinan su dirección, pero el sentido viene dado por el punto el desplazamiento que se da a partir de un punto de inicio.

Un ángulo es un objeto matemático que queda determinado por dos rayos de origen común, uno de los cuales es fijo y el otro es móvil. Este es generado al girar el rayo móvil con respecto al rayo fijo, independiente de su sentido (reloj o antireloj).

Tiene como elementos un vértice y dos lados, como se muestra en la Figura 25.

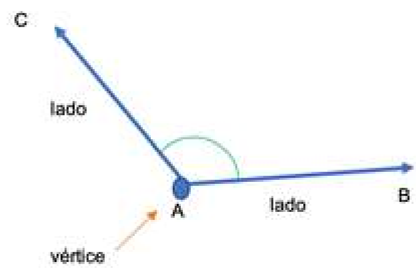


Figura 25. Ángulo

Si se yuxtaponen[25] segmentos de recta unidos en sus extremos, de manera que formen figuras cerradas, se generan polígonos. Estos corresponden a figuras geométricas planas cerradas. Están formados por segmentos de rectas que se intersectan en sus extremos. A las intersecciones de los extremos de los segmentos se les denomina vértices. Para denominar al polígono, se denotan con letras mayúsculas sus vértices, usualmente en orden alfabético y en contra de las manecillas del reloj. A los segmentos se les denomina lados del polígono. Si en un polígono todos los lados son congruentes[26], entonces lo denominaremos como regular. En caso contrario, se le denomina polígono irregular.

Se clasifican de acuerdo al número de lados que posean: si tiene tres lados, se le llama triángulo, si tiene cuatro se le llama cuadrilátero; si tiene cinco, pentágono; si tiene seis se le denomina hexágono y así sucesivamente.

Se pueden distinguir también ángulos, que son los generados al intersectarse dos lados de él. Si el ángulo está dentro del polígono, se le denomina ángulo interior. Se pueden identificar también ángulos exteriores, que se generan al considerar un lado del polígono y la prolongación de un lado consecutivo. Al segmento que va desde un vértice a otro no contiguo se le denomina diagonal del polígono. En la Figura 26 se ilustran los conceptos antes descritos: allí se observa un polígono de cinco lados, por tanto, se denomina pentágono. En este caso, pentágono ABCDE. Se tiene que A, B, C, D, y E son los vértices y el segmento AD corresponde a una diagonal. Tiene

25 Corresponde a poner una cosa al lado de otra. En este caso, segmentos unidos a partir de sus extremos.
26 Dos figuras son congruentes cuando al superponerlas coinciden. Si comparamos medidas entonces hablaremos de igualdad.

cinco ángulos interiores y cinco ángulos exteriores. Por ejemplo, ∢AED es un ángulo interior y ∢DEF es uno exterior.

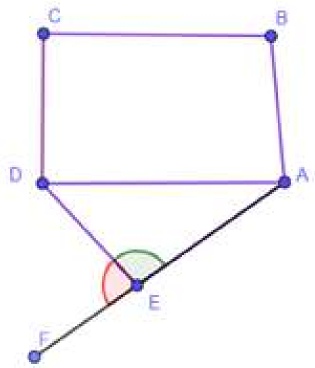


Figura 26. Elementos de un polígono usando como referencia un polígono de cinco lados

Los polígonos más sencillos, de acuerdo a su número de lados, son los triángulos y cuadriláteros. A continuación, se definen y clasifican de acuerdo a ciertos criterios:

Triángulos

El triángulo es un polígono de tres lados. En él, se consideran dos tipos de ángulos: interiores (formados por dos lados) y exteriores (formado por un lado y la prolongación de otro). El triángulo tiene 3 ángulos interiores. Cada vértice del ángulo es vértice también del triángulo. En todo triángulo, se tiene que, al sumar las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, se forma un ángulo extendido.

En la Figura 27 se ilustran sus elementos para un triángulo ABC cualquiera, se tienen: ángulo BAC (de vértice A), ángulo CBA (de vértice B) y ángulo ACB (de vértice C). Se designan a α, β y γ como las medidas de sus ángulos interiores. Los lados se denominan con letras minúsculas, usando como nombre la letra del vértice opuesto. Por ejemplo, el lado opuesto al vértice A, se denomina "*a*". Se incluye en la representación el ángulo BCD, que corresponde al ángulo exterior del ángulo ACB.

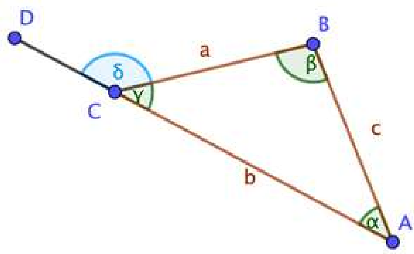


Figura 27. Ejemplo de triángulo ABC.

Los triángulos se clasifican según sus lados o también según sus ángulos (ver Figura 28).

Según sus lados, se clasifican en triángulo equilátero, isósceles y escaleno. Un triángulo es equilátero cuando todos sus lados son congruentes. Es isósceles cuando tiene dos lados congruentes. A partir de esta clasificación, se desprende que un triángulo equilátero es un caso particular de triángulo isósceles. Un triángulo es escaleno cuando no tiene lados congruentes.

Según sus ángulos se clasifican en rectángulo, acutángulo y obtusángulo. Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, es acutángulo si todos sus ángulos son agudos, es decir, miden menos de 90 grados cada uno. Es obtusángulo si tiene un ángulo obtuso (mayor de 90º).

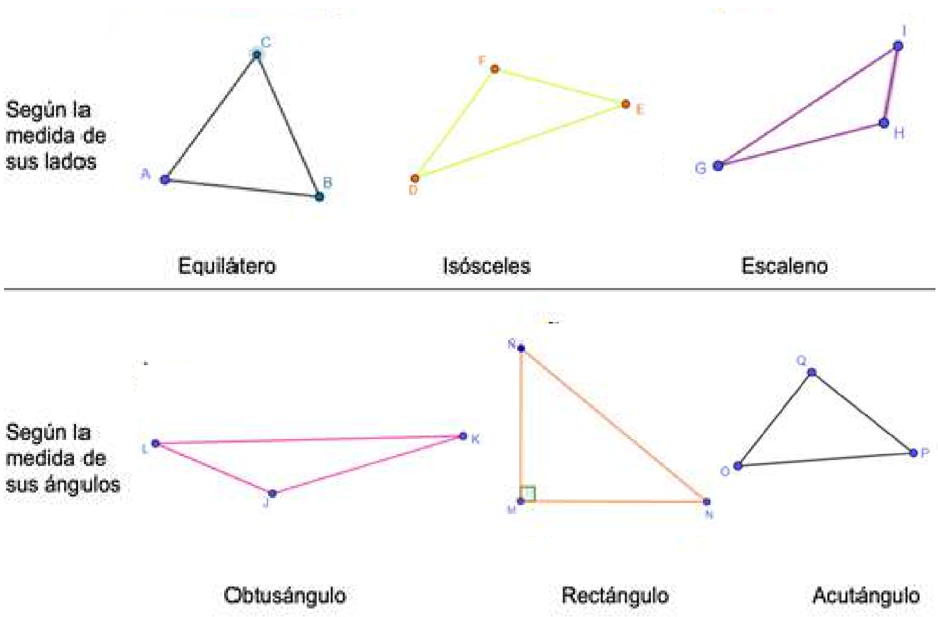


Figura 28. Clasificación de los triángulos

Cuadriláteros
Los cuadriláteros son polígonos que tienen cuatro lados. Se clasifican en un primer momento de acuerdo al paralelismo de sus lados. Esta clasificación permite estudiar las relaciones que existen entre las figuras.

Se clasifican en trapecios si tienen un par de lados paralelos (ver Figura 29). Un caso particular de trapecio, corresponde a los paralelogramos, estos tienen dos pares de lados paralelos. En el contexto de matemática escolar, los cuadriláteros que no son trapecios, se llaman trapezoides. Estos no tienen ningún par de lados paralelos.

Un segundo y tercer criterio de clasificación es la congruencia de los lados y ángulos interiores congruentes. En el caso de los paralelogramos, corresponde a rombo, cuadrado y rectángulo: El rombo es un paralelogramo que tiene todos sus lados congruentes. El cuadrado es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes y tiene cuatro ángulos rectos. Es importante abordar en su enseñanza la relación que existe entre el cuadrado y el rombo: el estudio del cuadrado como caso particular de rombo permite a los estudiantes comprender las propiedades puestas en juego cuando se construyen estos objetos. Estudiar el cuadrado como un rombo que tiene todos sus ángulos congruentes. Por otro lado, el rectángulo es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos. Al estudiar este tipo de formas, se puede observar el cuadrado como caso particular de rectángulo, es decir el cuadro es un rectángulo de lados congruentes.

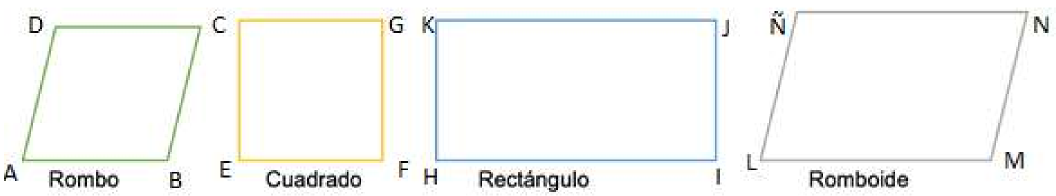


Figura 29. Clasificación de los paralelogramos

Existen dos casos particulares de trapecio: los isósceles y los rectángulos (ver Figura 30). En los trapecios isósceles, sus lados no paralelos son congruentes. Y en el trapecio rectángulo, uno de los lados no paralelos es perpendicular al otro.

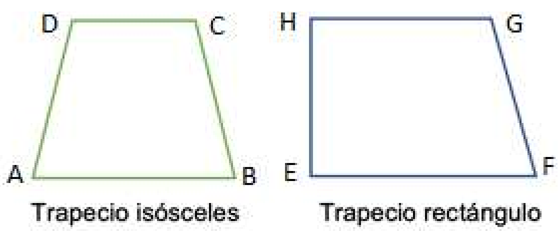


Figura 30. Casos especiales de trapecios

En la Figura 31 se entrega un esquema en el que se especifica la clasificación de los cuadriláteros de acuerdo al paralelismo de sus lados, descrito anteriormente. Se tiene así que un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos. Más específicamente, si dicho cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos, entonces se denomina paralelogramo. Dentro de los paralelogramos, es posible clasificarlos de acuerdo a lo ilustrado en la Figura 29. En relación a las propiedades que cumplen, se tiene que un cuadrado posee propiedades de rombo y rectángulo a la vez, es decir, tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos rectos como se indicó anteriormente. Se describen allí también casos particulares de trapecios: isósceles y rectángulos, ilustrados en la Figura 30.

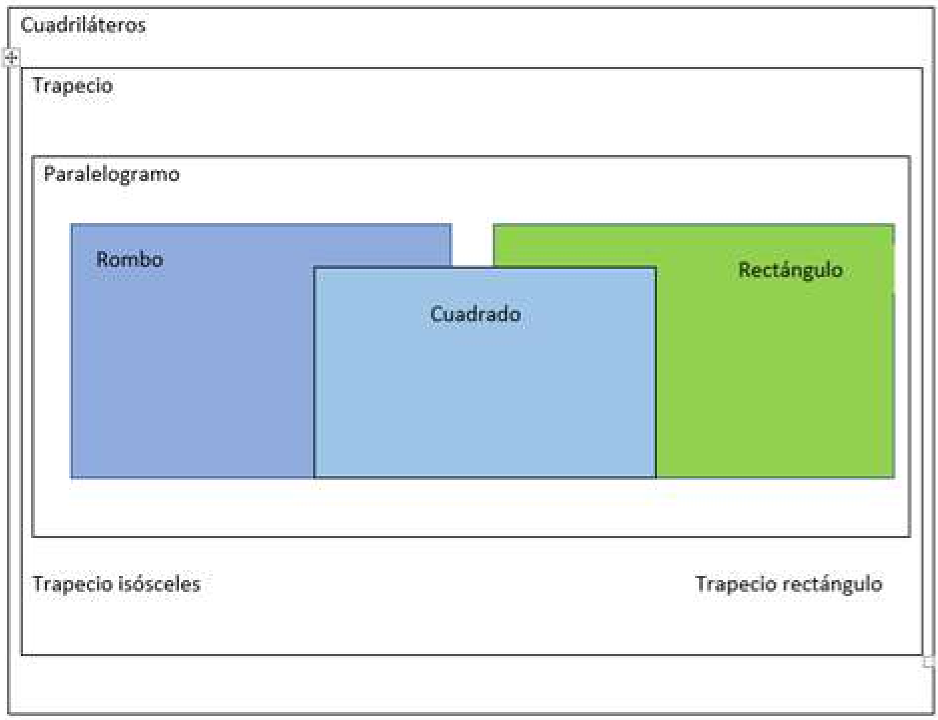


Figura 31. Clasificación de cuadriláteros, adaptado de Peault, H. (2006). Cuadriláteros particulares. In Copirelem (eds). La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años. Herramientas para la formación de los profesores en Francia (pp. 96). Paris: Arpeme.

REFLEXIONES FINALES

La manera tradicional de enseñar la geometría intenciona solo algunas habilidades que se están desarrollando en el estudiante. Duval (2005, 2016) señala que el esquema clásico y errado es el siguiente: primero trabajar sobre el reconocimiento perceptivo de las formas, sobre la adquisición del vocabulario apropiado y luego hacer reproducir las figuras. La única entrada que lleva al razonamiento matemático es deconstruyendo las formas geométricas. El trabajo armando y desarmando cajas o utilizando materiales concretos como los cuerpos geométricos desarmables.

La geometría ofrece una variedad de maneras de ver, las que conducen a desarrollar y ampliar capacidades de visualización y por consiguiente de imaginación. Esto es tanto más importante cuanto en geometría la visualización se articula con el razonamiento, Duval (2005). Así como se ofrece una amplia variedad de maneras de acceder a ella, también existe una gran gama de recursos con los que podemos adentrar a nuestros estudiantes en su aprendizaje. Cada vez que se diseña una tarea matemática se deben considerar algunos criterios para la elección de estos recursos. Es importante verificar si el material escogido es realmente el apropiado para propiciar el aprendizaje y no va a constituir en un obstáculo, como se describió en el apartado cuatro de este capítulo.

Además, se debe tener plena conciencia del rol que cumple el material concreto en el logro de la meta u objetivo propuesto. El uso del material es un recurso fundamental en el primer ciclo de educación básica. Sin embargo, es primordial que los docentes, previo a su utilización, tengan claridad de lo que esperan que el estudiante descubra o refuerce al manipular el material. Operativamente, esto se traduce en: elección de recursos adecuados para el logro del objetivo, devoluciones pertinentes y gestión adecuada de las TM propuestas, de modo que, la manipulación de ellos no se quede solo en un contexto lúdico.

Independientemente del tipo de tarea propuesta y de los recursos seleccionados para organizar las secuencias de aprendizaje, se debe fomentar que los estudiantes comuniquen y argumenten de manera escrita u oral las conclusiones que derivan de la realización de cada una de ellas.

REFERENCIAS

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l"apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En D. Raymond, y A. Sáenz-Ludlow, (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.* (pp. 13-60). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gonseth, F. (1945-1952). *La géométrie et le problème de l'espace.* 27. Éditions du Griffon, Lausanne.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth destiné étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics. 40*(3), 283-312. https://doi.org/10.1023/A:1003851228212

Iglesias-Mancini, C., y Pizarro-Canales, A. (2021). *La enseñanza y el aprendizaje de las formas 3D desde primero a cuarto básico desarrollando habilidades de visualización*. En A. Pizarro-Canales, C. Caamaño-Espinoza y M. C. Brieba-Brieba (Eds.), Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Aportes a la Formación Continua de Profesores, Tomo I (pp. 102-129). Valparaíso: Ediciones Univeristarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.euv.cl/archivos_pdf/DDM_1.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/03/ME2_web.pdf

Ministerio de Educación (2013). Programa de estudio segundo año básico: Matemática. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18977_programa.pdf

Peault, H. (2006). Cuadriláteros particulares. En Copirelem (Eds). *La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años. Herramientas para la formación de los profesores en Francia* (pp. 93-102). Paris: Arpeme.

Jaguthsing, D. (2014). La enseñanza de la geometría. En L. Peng Yee (Ed.), *La enseñanza de la matemática en educación básica: Un libro de recursos* (pp. 243-264). Academia Chilena de Ciencias.

Pizarro, A. (2018). El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos. Tesis doctoral, Universidad Paris Diderôt. Recuperado de http://www.theses.fr/2018USPCC336

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (22), 67-90. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_22/adsc-2017_003.pdf

Piaget, J., y Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

La importancia del concepto de medida en la resolución de problemas en contexto real

CARLOS CAAMAÑO-ESPINOZA
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

INTRODUCCIÓN

La medición, según la RAE, es simplemente la acción o efecto de medir. Pero de forma más específica, desde la Didáctica de la Matemática y de acuerdo con Romero y Rodríguez (2005), en su acepción fundamental, la medición se identifica con la acción o conjunto de acciones por medio de las cuales se compara una propiedad o cualidad de un objeto o sistema, con otra de la misma clase asumida como patrón; donde el resultado de dicha comparación es un número. Es así como se suele afirmar, por ejemplo, que la longitud o el peso son magnitudes, consideradas como propiedades físicas susceptibles de ser medidas, ya que a un cuerpo que tiene una longitud (largo, ancho o alto) o un peso determinado, se le puede asignar una cifra, que corresponde al valor que adquiere la respectiva propiedad, cuando se le compara con un valor establecido como patrón.

Desde los primeros tiempos, la necesidad de medir permitió que el hombre pudiera ir ampliando el campo numérico y dotándolo de diversos instrumentos para poder hacerlo. Es así como, teniendo en cuenta el Sistema de Numeración Decimal, en Francia (1799) se llega a la creación del Sistema Métrico Decimal, que es el sistema de unidades basado en el metro, que se convirtió internacionalmente en el único sistema legal de pesas y medidas desde 1801.

La idea central aquí es entregar algunas orientaciones y sugerencias que permitan que los docentes logren que sus estudiantes puedan ir comprendiendo gradualmente, desde los primeros niveles escolares, la necesidad de medir. Esto es, partiendo con la noción de comparar y ordenar, entiendan que medir es comparar una magnitud con una cierta unidad de medida y que se pueden realizar algunas estimaciones sobre la cantidad, con la utilización de algún instrumento u objeto (no estandarizado), que sea adecuado para medir. Así podrán descubrir que la medida depende de que la unidad elegida sea la más adecuada (estandarizada) y no de la magnitud que se mide, y que realizar la medición corresponde a verificar cuántas veces la unidad está contenida en la magnitud a medir y comparar el resultado con la estimación realizada, cuando sea necesario.

De acuerdo a lo anterior, el desarrollo de este capítulo se centra en la resolución de tareas matemáticas, que corresponden a problemas de contexto real o realista (Díaz y Poblete, 2001), que facilitan la enseñanza para el aprendizaje de la medición, usando estrategias didácticas específicas, que permitan la argumentación y la comunicación matemática por parte de los estudiantes.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS DE ENSEÑANZA

La medida de magnitudes es uno de los temas relevantes que ha motivado a los especialistas en Didáctica de la Matemática a estudiar el difícil problema de las relaciones entre la matemática y la realidad. Así es como los fenómenos, tanto físicos como sociales, son organizados haciendo uso del lenguaje matemático, lo que deriva en la necesidad de reflexionar sobre la naturaleza de los diferentes objetos matemáticos, sean estas tareas matemáticas, donde se encuentran los problemas, los ejercicios y las preguntas; como también las técnicas, símbolos, conceptos, proposiciones, justificaciones, argumentaciones, modelos y teorías, entre otros (Godino, Batanero y Roa, 2002).

El aprendizaje de la medida contribuye a la formación de conceptos matemáticos específicos, relacionados con otros ejes curriculares, como son: Números y operaciones, Geometría y Datos y probabilidades. En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. Además, desde un punto de vista físico, todo atributo o característica cuantificable recibe el nombre de magnitud y desde el punto de vista matemático, una magnitud es un conjunto de cantidades que tienen determinadas propiedades, por ejemplo, ser aditivas o sumables. Esto es, la medida de la suma de dos cantidades es la suma de sus respectivas medidas y, por lo tanto, también son multiplicables, primero por un número natural distinto de cero en los primeros niveles escolares del sistema educativo y posteriormente por un número real positivo. Estas magnitudes se denominan extensivas, porque dependen de la cantidad o tamaño del objeto que se va a medir. En cambio, las magnitudes intensivas no dependen de la cantidad de materia del sistema, ya que no varían cuando cambia la extensión del cuerpo u objeto y expresan una relación variacional entre magnitudes básicas (extensivas), donde las más importantes son: la velocidad, la aceleración, el peso específico y la densidad.

Por esta razón, se habla de dos tipos de magnitudes extensivas: discretas y continuas. Las discretas pueden cuantificarse usando los números naturales, por ejemplo, la cantidad de estudiantes en una sala de clases o el número de figuritas de un determinado tipo coleccionadas por los niños y niñas. Por su parte, las extensivas continuas, son aquellas a las que se les puede atribuir una estructura aditiva y están relacionadas con la conservación de la cantidad (invariancia) y se pueden representar geométricamente, ya que corresponden a propiedades físicas de ciertos objetos o acontecimientos y requieren el uso de los números reales positivos, por ejemplo: longitud, amplitud, superficie, volumen, entre otras.

Desde el punto de vista físico, medir, es ver cuántas veces una unidad está contenida en una cantidad determinada y desde el punto de vista matemático, consiste en atribuir un número real a una determinada cantidad, usando las herramientas específicas de acuerdo con el objetivo de la medición. De tal forma que, una medida es el número de veces que una cantidad cualquiera contiene a la unidad o cantidad de referencia (estandarizada o no) que se toma para hacer la valoración del resto de las cantidades de su especie (Bressan y Yaksich, 2001).

Diversas investigaciones en esta línea (Romero y Rodríguez, 2005; Chamorro, 1998; Dickson et al, 1991; Lovell, 1982), demuestran que la conservación de la longitud y el área anteceden a las de masa, peso y volumen. Al mismo tiempo, concuerdan en que no siempre los estudiantes que aprenden a estimar longitudes y medirlas con precisión, estarán en condiciones de transferir estas habilidades a la medición de otras magnitudes. Por lo tanto, señalan que es imprescindible que todas las magnitudes se trabajen dedicando el tiempo requerido y siguiendo los pasos adecuados, ya que cada una presenta distintos obstáculos específicos. Sin embargo, en dicho trabajo, hay que tener en cuenta que la conservación de la cantidad no se construye y desarrolla al mismo tiempo en todas las magnitudes, aunque suponga las mismas estructuras lógicas (reversibilidad, transitividad).

Por su parte, Bressan y Yaksich (2001), plantean que también se debe tener en cuenta que, en el proceso de construcción de la conservación de las cantidades, los estudiantes tienden a confundir ciertos atributos físicos de los objetos, tales como: la forma, el material, el tamaño, el espacio ocupado, entre otros; con atributos medibles que no están relacionados con ellos. De esta forma, debiera entenderse que: no todo objeto de gran tamaño es necesariamente más pesado que otro más pequeño; un camino sinuoso puede ser de la misma longitud que uno recto; la capacidad de un objeto no queda determinada por el espacio que ocupa; dos o más objetos exteriormente idénticos pueden ser de peso o capacidad distinta. Al mismo tiempo, estos autores concluyen que: descubrir estos aspectos lleva mucho esfuerzo por parte de los estudiantes y por lo tanto, plantean que es necesario ayudarlos a que puedan desvincular la cantidad a medir de otros datos posibles de percibir, que terminan confundiéndolos, tales como: la longitud de la configuración espacial de las líneas; la capacidad del tamaño y de la forma del objeto; la masa del tamaño y la amplitud del ángulo de la “longitud” de sus lados.

Ahora, en relación con la conservación de la cantidad y la transitividad, que son las primeras condiciones necesarias para que el alumno adquiera el concepto y los procedimientos de la medida, señalan que el proceso de medición requiere también de la comprensión del concepto de que un todo se compone de partes agregadas y por lo tanto es posible subdividirlo y que se mide transportando la unidad elegida a otras partes de la totalidad (principio de sustitución e iteración). Además, está claro que los niños y niñas deben ser capaces de comprender la importancia que tiene la medición en la vida cotidiana, como también que esta sea realizada con absoluta precisión y saber cuáles son las consecuencias si no es así. Esto es particularmente necesario, por ejemplo, para ubicarse en el tiempo o cuando se requiere tomar alguna decisión sobre la construcción de un objeto determinado.

ESTRATEGIAS CON TAREAS MATEMÁTICAS MODELADORAS Y PROPUESTA DE RECURSOS DIDÁCTICOS ESPECÍFICOS

De acuerdo con Godino, Batanero y Roa (2002), si se pretende que los estudiantes logren entender la medida y sus aplicaciones, es necesario enfrentarlos a algunas situaciones de contexto real, no para que se centren en la posibilidad de reinventar alguna técnica, pero sí para que, a partir de una base conceptual, lleguen a “dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir”.

Por otra parte, al identificar el papel del agrimensor, que ha sido abordado en el capítulo anterior, permite que el docente tome conciencia de su importancia y lo ponga en juego, se mejoran significativamente las habilidades de visualización, y junto con ello, el fortalecimiento del pensamiento creativo.

Por lo anterior, la medida de uso corriente en la vida cotidiana, aunque no siempre es posible darse cuenta de ello, es el puente entre la Aritmética y el mundo físico, ya que permite explorar el espacio físico y describirlo por medio de las magnitudes tales como longitud, área y volumen; a la vez que interpreta otros fenómenos menos perceptivos como el peso, la aceleración y el tiempo (Dickson et al, 1991). Es así como diariamente se emplea una gran variedad de medidas, algunas muy precisas, por ejemplo, “1 kilo y medio de pan”, “5 litros de parafina”, “1 litro de leche”, y otras que corresponden a estimaciones, por ejemplo, “como 10 minutos”, “alrededor de 4 hojas”, “en unos 3 o 4 días”. Además, con bastante frecuencia se suele utilizar unidades no convencionales o no estandarizadas, tales como “1 vaso de agua”, “5 pasos”, “6 cuartas”.
Ahora, se proponen tareas matemáticas que presentan situaciones de uso de la medida, y se parte de un nivel intuitivo, desde los primeros cursos escolares, porque

ayudará a superar gradualmente las dificultades que tendrán los estudiantes en los siguientes niveles. Así, en este apartado se proponen algunas estrategias didácticas específicas y diversas de cómo abordar la enseñanza para el aprendizaje de la medición, de forma secuenciada y gradual, en el contexto de la resolución de tareas matemáticas, de acuerdo a los objetivos de aprendizaje de cada uno de los cursos de primero a cuarto básico. A continuación, se presenta una tabla donde se sugiere una secuencia didáctica, que puede ayudar a los estudiantes a que logren adquirir un conocimiento conceptual de la medida.

Tabla 1. Propuesta de secuencia didáctica

CONCEPTO	ACTIVIDADES DE AULA
Comprender cuál es la propiedad o cualidad del objeto a medir.	Hacer comparaciones basadas en la propiedad que se mide.
Entender qué “completar” o como “recubrir” una cualidad con una unidad específica produce una medida.	Emplear distintos patrones como unidades de medida.
Conocer la técnica para la utilización de diversos instrumentos de medida.	Hacer (o seleccionar) y manejar diversos instrumentos de medida.

EN PRIMERO BÁSICO.

En este curso uno de los objetivos priorizados es el OA 17, que plantea: “Usar un lenguaje cotidiano para secuenciar eventos en el tiempo: días de la semana, meses del año y algunas fechas significativas”.

Es sabido que captar la noción de tiempo no es fácil y los escolares la elaboran muy lentamente, ya que requiere el concurso de ciertas relaciones fundamentales. Por lo tanto, para abordar este primer objetivo, se proponen unas tareas matemáticas intuitivas en las que se usa la estrategia de secuenciar eventos invariantes en el tiempo (comparación y orden). Se pretende que, en primer lugar, el docente procure que sus estudiantes tengan una copia de un calendario del año que corresponda, como el de la figura 1, de tal forma que cuando él les formule las tareas, puedan entender lo que es un calendario y para qué sirve, y logren reconocer y nombrar fechas importantes, identificando y secuenciando aquellas que son significativas, y comunicándolas con un lenguaje cotidiano, como en las siguientes tareas:

a. Encierra en un círculo el mes en que nos encontramos y después marca el mes y el día de tu cumpleaños.
b. Marca el mes y el día de uno de tus familiares que esté de cumpleaños antes que tú y de otro, cuyo cumpleaños sea después que el tuyo.
c. Escoge dos meses que te agraden y dibuja en cada uno de ellos algo que permita reconocerlos.

Figura 1. Calendario 2021 Chile (https://michelzbinden.com/es/calendario-2021-chile).

Un segundo objetivo, en que la medición se focaliza en otras propiedades, es el OA18, que plantea: "Identificar y comparar la longitud de objetos, usando palabras como largo y corto". Para abordarlo, se presentan las siguientes estrategias:

1. Comparar y determinar longitudes de objetos.

Aquí corresponde introducir intuitivamente el concepto de medición, por medio de la comparación de objetos al superponerlos, por ejemplo, colocar dos segmentos paralelos ayuda a verificar la mayor o menor longitud de ambos. Así los estudiantes podrán comparar objetos y determinar cuál de ellos es el más corto, el más largo o si son del mismo tamaño (o igual longitud). Una tarea matemática idónea para tal efecto, es aquella que se propone en la figura 2 y que se presenta en el texto del estudiante de primero básico (Isoda y Estrella, 2020a). Esta tarea es trabajada usando una estrategia muy propicia, para que los estudiantes tengan que hacer una superposición de objetos, de tal forma de poder compararlos, haciendo uso de la orientación de su profesor, a través de las siguientes preguntas: ¿qué objeto es el más corto?; ¿qué objeto es el más largo? y ¿los objetos son del mismo tamaño?

Figura 2. ¿Cuál lápiz es más largo? (Isoda y Estrella, 2020a, p. 57).

2. Medir usando una medida no estandarizada

La siguiente estrategia consiste en que los estudiantes midan longitudes de objetos, haciendo uso de una medida no estandarizada, por ejemplo, una cinta. Con ella podrán determinar la longitud de diferentes objetos, tales como: la longitud de los brazos extendidos, el ancho de una mesa, el ancho de una puerta, la altura de un mueble, entre otros.

Figura 3. ¿Cuál es el ancho de la mesa? (Isoda y Estrella, 2020a, p. 58).

Para esta actividad, que también se presenta en el texto del estudiante de primero básico (Isoda y Estrella, 2020a), es importante iniciar la medición ubicando el punto de partida de la cinta en uno de los bordes (tal como se muestra en la figura 3) o en la misma base del objeto, cuando corresponda. Esto ayudará a que los estudiantes comiencen desde el cero cuando trabajen con herramientas de medición estandarizadas.

3. Comparar longitudes de objetos medidos

Una actividad central, que permite ver el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el concepto de medición, es aquella en que establecen comparaciones de los objetos una vez que han sido medidos. Por ejemplo, a los estudiantes se les puede preguntar: ¿la mesa puede pasar por la puerta?, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4. ¿Podremos pasar la mesa por esta puerta? (Isoda, y Estrella, 2020a, p. 58).

PARA SEGUNDO BÁSICO.

Aquí se considera el OA 19, que plantea: "Determinar la longitud de objetos, usando unidades de medidas no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m), en el contexto de la resolución de problemas".

Para abordar este objetivo, se presentan las siguientes estrategias:

1. Hallar cuántas veces cabe un objeto sobre otro.

Para continuar avanzando gradualmente con la introducción del concepto de medición en este curso, se propone utilizar ahora la estrategia de encontrar cuántas veces cabe un objeto en otro y asignar una medida. Para tal propósito se sugiere el trabajo con medidas no estandarizadas.

Por ejemplo, medir la longitud de un lado de una mesa con un lápiz (u otro objeto que esté cercano al estudiante) y determinar cuántos de ellos caben. Una tarea matemática de este tipo, se presenta en el texto del estudiante de segundo básico (Isoda y Estrella, 2020b, p. 34), tal como se puede ver en la siguiente figura 5:

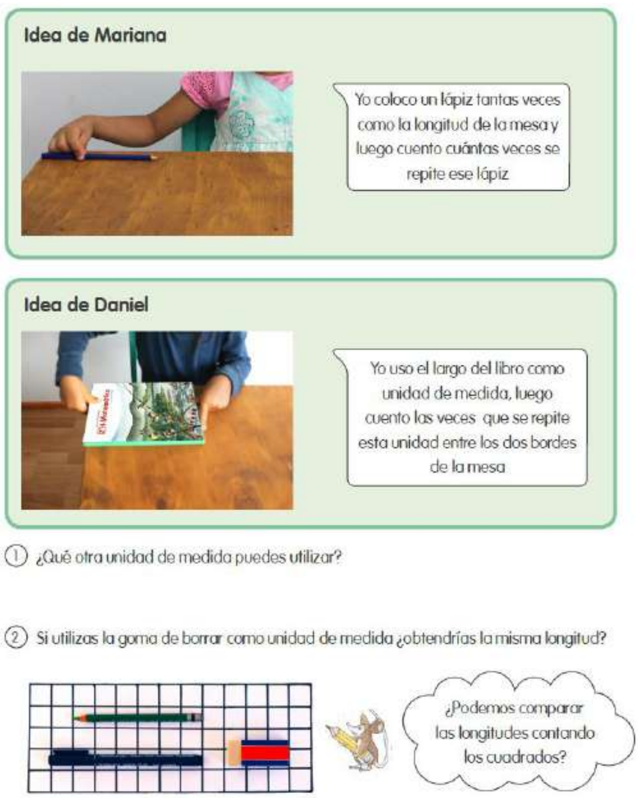


Figura 5. Determinando la longitud de una mesa
(Isoda y Estrella, 2020b, p. 34).

2. Hallar cuántas veces cabe una cierta unidad no estandarizada sobre un objeto determinado y compararla con su medida estandarizada (en cm).

Para introducir la medición utilizando una unidad estandarizada en este curso, se acude a la estrategia de encontrar cuántas veces cabe un cierto elemento, que servirá de unidad de medida no estandarizada, en el largo de un objeto y asignar una medida, la que posteriormente será comparada con su correspondiente medida estandarizada (en cm).

En este caso, la tarea profesional docente será lograr que los estudiantes elijan un objeto cercano, por ejemplo, una mesa y, junto a otra persona mayor, lo midan con una unidad no estandarizada, por ejemplo, "la cuarta", que sean distintas y comuniquen la medición nombrando cuántas cuartas midió cada uno, de tal forma que se pueda hacer un análisis de lo ocurrido. Posteriormente, se medirá el mismo objeto haciendo uso de una huincha de medir de un metro, con el objetivo de establecer la relación existente entre ambas medidas. Para tal efecto se plantea el siguiente problema de contexto real:

Luciana y su abuelo Carlos jugaron a medir el ancho de la mesa de comedor de su casa usando cada uno su "cuarta". Luciana obtuvo 6 cuartas, mientras que su abuelo obtuvo 4, más la mitad de otra.

a. ¿Por qué crees que obtuvieron medidas diferentes? y ¿Alguno de los dos tiene la medida correcta?

La idea es que a continuación se mida en centímetros cada una de las cuartas, para continuar con la actividad y resolver el problema. Entonces, la pregunta es:

¿Y si lo hiciéramos usando una regla marcada con centímetros (cm)?

Bueno, en las imágenes se puede ver que, usando una regla marcada con "cm", la cuarta de Luciana (que tiene 8 años) mide 15 cm y la de su abuelo mide 20 cm.

Si tienes una regla, pídele a alguien de tu familia que te ayude a medir los centímetros de "tu cuarta", tal como lo hizo Luciana, poniendo el dedo pulgar (el gordo) en la marca del cero.

Figura 6. ¿Cuánto mide mi cuarta?

Para solucionar el problema, felizmente llegó Paula, mamá de Luciana y les pasó una huincha de medir de 1 metro (se escribe 1 m), que tiene 100 cm. Esto ayudará además a comparar las distintas "cuartas" con "cm".

b. ¿Cuántos cm crees tú que mide el ancho de la mesa de Luciana?
c. ¿Cuántos cm mide el ancho de tu mesa? ¿Qué podrías hacer si no tienes una huincha?
d. ¿Y el largo de tu mesa medirá más cm que su ancho? ¿Medirá más de 1 m? ¿Cuántos cm más que 1 m?
e. Ahora si transformamos a cm las medidas de las cuartas ¿Tú crees que resultará aproximadamente lo mismo que con la huincha?

MIDIENDO OBJETOS SOLO EN CENTÍMETROS.
De acuerdo con la estrategia anterior, ahora se hace necesario que los docentes orienten a sus estudiantes sobre la necesidad de preferir el uso de una medida estandarizada, con el propósito de que comprendan su importancia en la correcta medición de cualquier objeto (figura 7). Para tal efecto se propone las siguientes acciones:

a. Aprender a utilizar la regla posicionando el cero de la regla con el inicio del objeto a medir.
b. Mantener a la par la regla con el objeto a medir.
c. Expresar el número de la regla que coincide con el final del objeto: "mide 10 centímetros", que corresponde a una sola medida directa.

Figura 7. Objeto que mide 10 cm
(Isoda y Estrella, 2020b, p. 35).

COMPARANDO OTRA MEDIDA NO ESTANDARIZADA CON "CM".
La idea de la siguiente tarea matemática corresponde a la comparación de una medida no estandarizada, con su medida estandarizada en "cm" y que sea mayor a 1 metro, con el objeto de introducir el concepto de esta unidad de medida. Aquí se plantea la conveniencia de usar una actividad del texto del estudiante de segundo básico (Isoda y Estrella, 2020b), donde se propone medir la longitud de los brazos extendidos de una niña, tal como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Mariana con los brazos extendidos
(Isoda y Estrella, 2020b, p. 36).

Dos compañeras de Mariana se encargan de medir la longitud de los brazos extendidos de Mariana, usando una regla de 30 cm, tal como se muestra en la figura 9.

Figura 9. Medida de la longitud de los brazos extendidos de Mariana en cm
(Isoda y Estrella, 2020b, p. 36).

Finalizando esta actividad, que en este caso se trata de una medida indirecta, porque se compone de cuatro partes o secciones, cuyas medidas se conocen y posteriormente se suman y se tiene que la medida de esta longitud es de 115 cm (figura 10). Ahora se sugiere aprovechar esta oportunidad para introducir el concepto de 1 metro (1 m), como la unidad de medida que corresponde a 100 cm y que se utiliza para medir longitudes de objetos más grandes, tales como la altura de una puerta, el largo de una pizarra, el ancho y el largo de una sala de clases, entre otros.

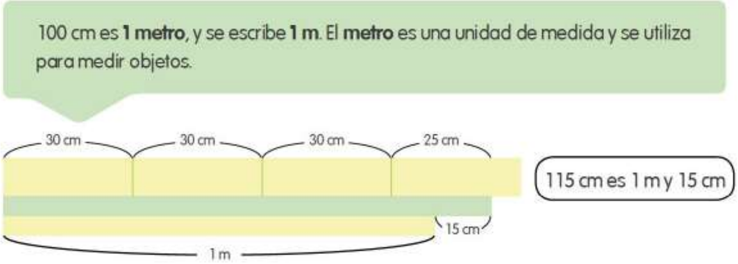


Figura 10. Medida de la longitud de los brazos extendidos de Mariana en m y cm
(Isoda y Estrella, 2020b, p. 36).

PARA TERCERO BÁSICO.

En este curso se encuentra el OA21 del programa de estudios, donde se señala que los estudiantes deben ser capaces de: “Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular:

- Midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas.
- Determinando el perímetro de un cuadrado y un rectángulo”.

1. Perímetro de una figura regular: Determinando el perímetro de un cuadrado.

Para lograr este objetivo la idea es poder realizar un trabajo que se inicie con una orientación del docente, para que sus estudiantes comprendan el concepto de perímetro usando una situación de contexto real, primero como el contorno de un cuadrado, como una figura regular, porque tiene sus cuatro lados de igual medida. Para tal efecto se sugiere una metodología de enseñanza activa y colaborativa, como la que se presenta en la siguiente tarea matemática que corresponde a un problema que es muy apropiado para introducir el concepto de perímetro (figura 11) y que se encuentra en el texto del estudiante de tercero básico (Isoda y Estrella, 2020c, p. 35), se espera que los estudiantes:

a. Observen la fotografía cuadrada que se quiere enmarcar, donde se indica una medida del cuadrado.
b. Se les oriente para que interpreten correctamente que dicha medida es la misma para sus otros lados.
c. Así estarán en condiciones de escribir la frase matemática que les permitirá resolver el problema.

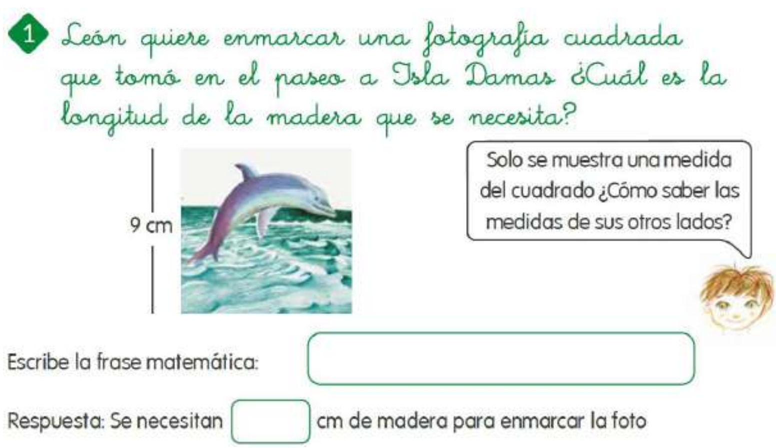


Figura 11. Longitud del contorno de una figura cuadrada (Isoda y Estrella, 2020c, p. 35)

La idea es que los estudiantes concluyan que la expresión matemática es:

$$9 + 9 + 9 + 9 = 36$$

Y, por lo tanto, la respuesta al problema sería: **Se necesitan 36 cm de madera para enmarcar la foto.**

La idea es que cuando los estudiantes estén en cuarto básico, sean capaces de escribir la expresión anterior como: **4×9**; lo que les permitirá comprender que la expresión general con la que se determina el perímetro de un cuadrado de lado ℓ es: $4\times\ell$.

1. Perímetro de una figura irregular: Determinando el perímetro de un rectángulo. De la misma forma en que se planteó el perímetro para el caso del cuadrado, como una figura regular, se presenta ahora la siguiente tarea matemática (figura 12), que permitirá comprender que el rectángulo es una figura irregular, porque no tiene todos sus lados de igual medida. Esta corresponde a otro problema adaptado del texto del estudiante de tercero básico (Isoda y Estrella, 2020c, p. 34), donde se utiliza otra situación de contexto real:

2. Perímetro de una figura irregular: Determinando el perímetro de un rectángulo. De la misma forma en que se planteó el perímetro para el caso del cuadrado, como una figura regular, se presenta ahora la siguiente tarea matemática (figura 12), que permitirá comprender que el rectángulo es una figura irregular, porque no tiene todos sus lados de igual medida. Esta corresponde a otro problema adaptado del texto del estudiante de tercero básico (Isoda y Estrella, 2020c, p. 34), donde se utiliza otra situación de contexto real:

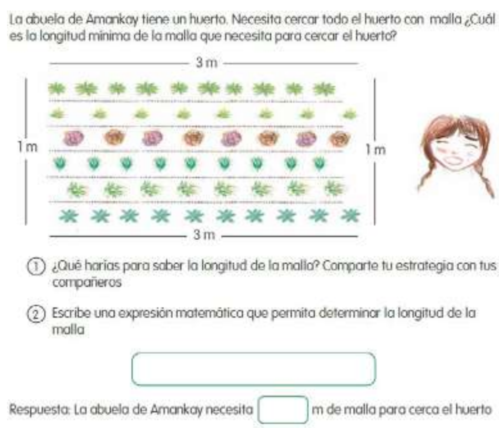


Figura 12. Longitud del contorno de una figura rectangular (Adaptado de Isoda y Estrella, 2020c, p. 34)

Una posible expresión matemática de los estudiantes podría ser: **3 + 1 + 3 + 1 = 8**.

Y, por lo tanto, la respuesta al problema sería: La abuela de Amankay necesita 8 m de malla para cercar el huerto.

La idea es que posteriormente, a manera de conclusión, se plantee a los estudiantes que la longitud del cerco del huerto, que se describió como el contorno de un rectángulo, recibe el nombre de perímetro.

Por otra parte, cuando los estudiantes estén en cuarto básico y tengan una correcta orientación de su profesor, sean capaces de escribir la expresión anterior como: **3 + 3 + 1 + 1**; o mejor aún, como: **2×3 + 2×1**; lo que les permitiría comprender que la expresión general con la que se determina el perímetro de un rectángulo de largo ℓ y ancho a, como: $2\times\ell + 2\times a$.

3. Determinando el perímetro de un pentágono irregular.
Como cierre de las actividades relacionadas con el OA21, se planteará una tarea matemática relacionada con el cálculo del perímetro de una figura irregular, con más de cuatro lados y de esta forma consolidar el concepto de perímetro de una figura irregular cualquiera, como la medida de todo su contorno, es decir, la suma de las medidas de todos los segmentos que la forman.

Pero primero, con el objeto de orientar el razonamiento de los estudiantes, se propone la siguiente tarea previa:

Partiendo del problema del cálculo de la longitud de la malla que se necesitaba para cercar el huerto de la abuela de Amankay, que tenía la forma de un rectángulo de 3m de largo y 1m de ancho, que resultó ser de 8m y que correspondía al perímetro de ese rectángulo; ¿qué pasaría si ese rectángulo se transformara en un rombo como el que se presenta en la siguiente figura?

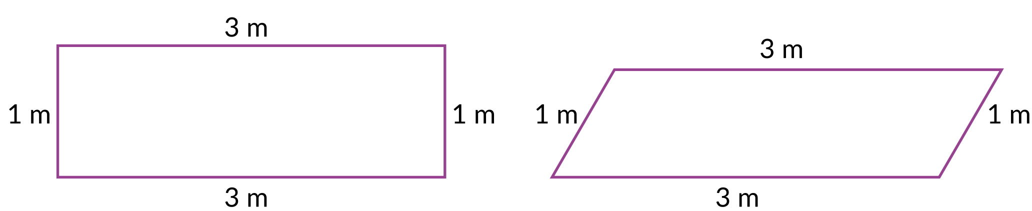


Figura 13. Calculando el perímetro de un rombo

La idea aquí es que los estudiantes puedan visualizar que esta transformación cambia solo la forma de la figura, manteniendo la longitud de sus lados y, por lo tanto, se obtendrá el mismo perímetro. Esto podrá permitirles que, a continuación, comprendan más fácilmente que el perímetro de cualquier figura será la suma de las medidas de sus lados, sin importar su forma ni la cantidad de lados que tenga y se les plantea un nuevo problema, como el siguiente:

Problema: Calcula el perímetro de la siguiente figura:

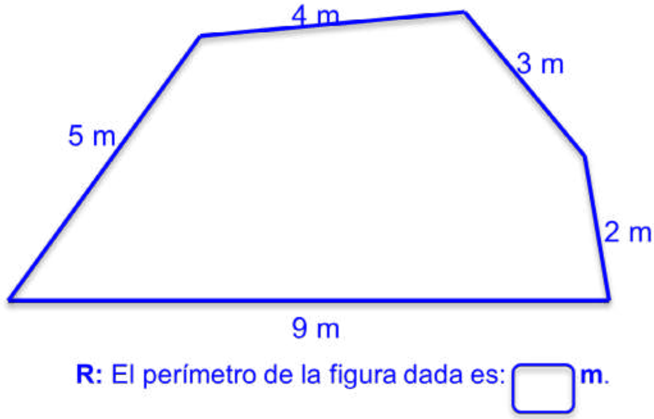


Figura 14. Calculando el perímetro de un pentágono irregular

4. Algo más sobre perímetros

En la siguiente tarea matemática se espera que, formando grupos pequeños de tres estudiantes, para que trabajen mejor de forma colaborativa resuelvan el siguiente problema:

Problema: Dada la siguiente figura hecha con palos de fósforos, de 4 cm de longitud, resuelve las siguientes situaciones:

a. Determina su perímetro y
b. Dibuja por lo menos otras tres figuras distintas que tengan el mismo perímetro y el mismo número de cuadrados que las forman:

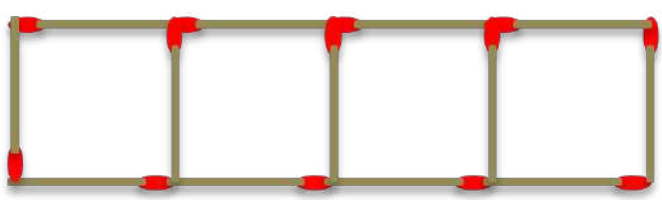


Figura 15. Calculando el perímetro y dibujando otras figuras

La idea aquí es que el docente oriente a los estudiantes para que puedan verificar que, sacando los tres palos de fósforos que forman el cuadrado de uno de sus extremos (desarman el primero o el último cuadrado), los pueden colocar en otro lugar, obteniendo cada una de las figuras diferentes, que dan solución al problema

EN CUARTO BÁSICO

Para este último curso, se consideran los dos objetivos curriculares que se presentan a continuación.

El primero de ellos es el OA 22, donde se plantea que los estudiantes sean capaces de: "Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm) y realizar transformaciones entre estas unidades (m a cm, y viceversa), en el contexto de la resolución de problemas".

Una muy buena situación, orientada al logro de este objetivo, se encuentra en la siguiente tarea matemática, donde se debe hacer uso de una regla graduada en cm, de tal forma que los estudiantes midan longitudes superiores a 1m, y a continuación puedan hacer las respectivas transformaciones, expresando dicha medida en m e indicando sus cm adicionales cuando corresponda.

Problema: Usando solo una regla, mide en centímetros (cm) el largo y el ancho de tu dormitorio y de la cocina. Luego transforma esas medidas en metros y centímetros (m y cm), por ejemplo "2 m y 30 cm" y completa la siguiente tabla:

Tabla 2. Medidas de un dormitorio y la cocina de mi casa.

Habitación	Medida en cm		Medida en m y cm	
	Largo	Ancho	Largo	Ancho
Dormitorio				
Cocina				

La idea es que si la medida es de 230 cm, que se señala en el ejemplo, se tendría que expresar intuitivamente "en m y cm", de la siguiente forma: "2 m y 30 cm", lo que posteriormente, usando la notación decimal, quedaría como: 2,3 m.

El segundo objetivo es el OA 23, que plantea la necesidad de que los estudiantes lleguen a: "Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas:

- Determinando y registrando el área en cm^2 y m^2 en contextos cercanos.
- Construyendo diferentes rectángulos para un área dada (cm^2 y m^2) para demostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área".

1. Una primera tarea matemática, que ha sido extraída de un problema del texto del estudiante de cuarto básico (Isoda y Estrella, 2020d, p. 60), que se presenta ahora y que corresponde al problema de determinar cuál bancal es más grande, se centra en la idea de que los estudiantes puedan comprender que es posible considerar un cuadrado como figura rectangular porque es un caso particular de un rectángulo en que las medidas de su largo y su ancho son iguales:

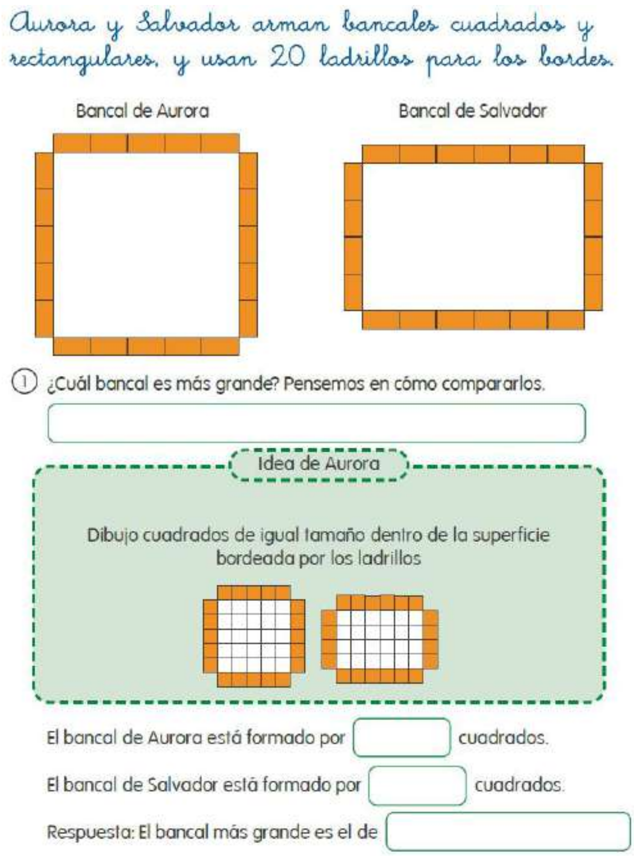


Figura 16. ¿Cuál bancal es más grande?
(Isoda y Estrella, 2020d, p. 60),

CAPÍTULO VII

Este problema presenta una situación clara de contexto real muy idónea para hacer una comparación de áreas, desde el punto de vista intuitivo, de dos superficies que tienen el mismo perímetro.

2. Otra tarea matemática interesante para este curso, donde se comparan dos terrenos de área compuestas y distintas, pero que tiene el mismo perímetro se presenta en el siguiente problema.

Problema: Los padres de Amankay desean comprar un terreno para construir su casa y conversan con corredor de propiedades que les ofrece los siguientes terrenos, que tienen el mismo valor ¿cuál de los dos terrenos les conviene comprar? ¿por qué?

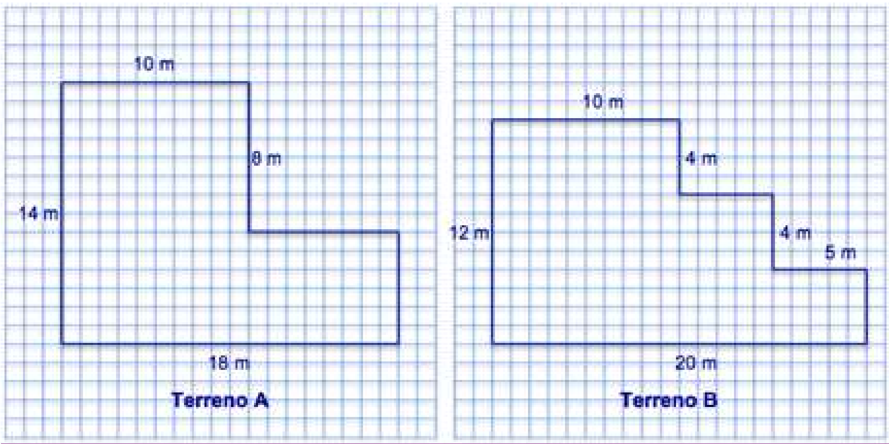


Figura 17. Planos de los terrenos A y B que están en venta

3. La última tarea matemática que se presenta a continuación y que también está relacionada con el mismo objetivo, corresponde a un tipo de problema de optimización, que suele ser trabajado con un nivel de razonamiento matemático que trasciende a la educación superior. Pero que aquí solo puede ser resuelto haciendo uso del concepto de medida que se ha presentado en este capítulo y contando con las competencias del profesor para asumirlo como una tarea profesional docente, que dé respuesta a la siguiente pregunta: ¿qué estrategias utilizaría como profesor para que los estudiantes puedan resolver el problema y lleguen a concluir que el área máxima de una figura rectangular se obtiene construyendo un cuadrado, que corresponde a un caso particular de un rectángulo?

Problema:
Si dispones 36 m de alambre y necesitas cercar un bancal de forma rectangular para sembrar tomates ¿Qué medidas elegirías para tener el mayor terreno disponible?

Aquí se espera que, si los estudiantes no están en condiciones de obtener una respuesta a partir de una generalización del anterior problema de comparar dos bancales, ahora puedan ser capaces de hacer distintas representaciones rectangulares de un bancal de 36 m de perímetro e ir comparando sus áreas, hasta llegar al caso particular de un cuadrado de 9 m por lado, que es el de mayor extensión de superficie de terreno disponible, que recibe el nombre de área y es igual a 81 m^2.

ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA

Para finalizar, y respondiendo a uno de los objetivos de la Didáctica de la Matemática, que se centra en que el aprendizaje matemático debe permitir un desarrollo adecuado del razonamiento de los estudiantes, de tal forma que sean capaces de resolver problemas en contexto real relacionados con la medida, cuestión que se ha tenido presente en el desarrollo de este capítulo, a continuación se presentan algunas tendencias erróneas en su enseñanza, que pueden actuar como obstáculos para lograr dicho objetivo y que han sido reportadas por la Agencia de Calidad de la Educación (2019).

LA ARITMETIZACIÓN DE LA MEDIDA

Lo primero es la tendencia no poco común entre los docentes de aritmetizar la medida, es decir, intentar llegar lo antes posible al trabajo con los números y el uso de unidades de medidas estandarizadas, descuidando la comprensión del concepto de medida junto a la importancia de medir. Esto se traduce en que la mayoría de los errores de los estudiantes, están directamente relacionados con las “reducciones” que derivan de la falta de representaciones mentales de diversas unidades de medida no estandarizadas.

EL INSUFICIENTE TRABAJO CON OBJETOS REALES

También se ha observado la necesidad de dedicar más tiempo a un trabajo con diversos tipos de objetos reales, de tal forma que los estudiantes puedan comprender que es posible medir longitudes en objetos cuyos lados no siempre son rectos. Así mismo, no se debiera hacer uso indiscriminado de algunas ilustraciones, que aparecen en textos y revistas, que no siempre consideran la respectiva proporcionalidad del tamaño que existe entre dichas representaciones en el mundo real.

LA AUSENCIA DE TRABAJO CON INSTRUMENTOS Y ESCALAS

Otra tendencia es la elaboración de instrumentos y escalas, como también la lectura de las mediciones en los distintos instrumentos y gráficos, que no siguen un proceso constructivo, tanto en el aula como en los textos. Esto contribuye a que los estudiantes confundan fácilmente el número de espacios que existe entre las marcas de un instrumento con su número de marcas, incluso en la regla escolar, lo que claramente complica de manera significativa la posterior construcción de escalas.

EL ABUSO DE LENGUAJE Y USO CONFUSO DEL VOCABULARIO

Por último y tanto o más importante, es el abuso de lenguaje y el uso poco claro del vocabulario de medida, tanto en la vida cotidiana como en la escuela. Es así como se utilizan de manera alternativa, algunos términos con distintos significados, para referirse un mismo objeto o procedimiento matemático, lo que contribuye a la poca claridad conceptual de los estudiantes. Por ejemplo: medida y cantidad, unidad y magnitud o precisión y exactitud.

REFLEXIONES FINALES

Este capítulo ha focalizado un tema poco desarrollado en estudiantes de primer ciclo de la enseñanza básica, intentado establecer que, en la enseñanza para el logro de los aprendizajes de la medida, se debe procurar que los estudiantes la relacionen con situaciones cotidianas. Por esta razón, tal como se planteó al comienzo, se ha pretendido entregar algunas orientaciones y sugerencias que permitan que los docentes consigan que sus estudiantes puedan ir comprendiendo gradualmente, tanto el concepto de medida como la necesidad de medir.

De acuerdo con lo anterior, se hace presente considerar que el docente es quien debe procurar que sus estudiantes puedan utilizar intuitivamente ciertas unidades de medidas no estandarizadas de uso frecuente, para que posteriormente comprendan la importancia que tienen los instrumentos de medidas estandarizadas, que permiten asegurar la exactitud de las medidas de objetos que están presente en diversas situaciones del ámbito real. En particular, se ha mostrado que, a partir de primero básico, es particularmente importante y necesario que los estudiantes hagan uso de instrumentos estandarizados tales como una regla y que puedan realizar mediciones, promoviendo las siguientes acciones: a) utilizar la regla posicionando el cero de la regla con el inicio del objeto a medir; b) mantener a la par la regla con el objeto a medir; y c) expresar el número de la regla con el final del objeto.

Por otra parte, tal como se ha presentado, la medida de magnitudes pone en juego un conjunto de destrezas prácticas, junto a un lenguaje de difícil dominio y comprensión para los estudiantes de los primeros cursos educativos. Además, es un tema que tiene una estrecha relación con la construcción de los sistemas numéricos y con las formas o las dimensiones de los cuerpos y figuras mediante operaciones aritméticas.

Por último, se ha pretendido que quede claro que la mejor forma de lograr que los estudiantes entiendan la razón de ser de la medida, es enfrentarlos a diversas situaciones reales o realistas, no tanto para que ellos creen o reinventen por sí mismos alguna técnica, sino para que puedan dominar los distintos procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas Santiago de Chile.* Agencia de la Educación. Recuperado dehttp://archivos.agenciaeducacion.cl/WEB_TIMSS_MATEMATICAS_8_2015.pdf.

Bressan, A. y Yaksich, F. (2001). Enseñanza de la Medida en la Educación General Básica. *Dirección General de Educación Provincia de Buenos Aires*. Buenos Aires.

Chamorro M. (1998). *Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, (18), 95-112.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. *Ed. Labor.* España.

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Isoda, M. (2020). *Sumo Primero: texto del estudiante 1° básico Tomo 2*. Traducción y Adaptación Ministerio de Educación de Chile.

Isoda, M., y Estrella, S. (2020a). *Sumo Primero: libro del estudiante, 1° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME1_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020b). *Sumo Primero: libro del estudiante, 2° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME2_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020c). *Sumo Primero: libro del estudiante, 3° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME3_web.pdf

Isoda, M., y Estrella, S. (2020d). *Sumo Primero: libro del estudiante, 4° básico*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de https://www.sumoprimero.cl/wp-content/uploads/2020/05/ME4_web.pdf

Lovell K. (1982). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Editorial Morata.

Ministerio de Educación (2020). *Priorización Curricular Covid-19 Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-177735_archivo_01.pdf

Ministerio de Educación (2013a). *Programa de estudio primer año básico: Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación (2013b). *Programa de estudio segundo año básico: Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación (2013c). *Programa de estudio tercer año básico: Matemática.* Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación (2013d). *Programa de estudio cuarto año básico: Matemática*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile.

Ministerio de Educación (2012). Progresión de Objetivos de Aprendizaje-Habilidades. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71256_archivo_01.pdf

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Ministerio de Educación: Santiago de Chile. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-120183.html

Romero, A. y Rodríguez, O. (2005). El concepto magnitud como fundamento del proceso de medición. La cuantificación de los estados de movimiento y sus cambios. *Revista Educación y Pedagogía*, *16*(43), 127-140. Recuperado de https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/6058

SUMO primero EN TERRENO

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO